Ujjgyakorlat - pontok kombinálása (súlyozott átlagok)

Válasszon tetszőleges alfa súlyokat:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \mathbf{p}_i, \quad \alpha_i \in R, \mathbf{p}_i \in R^3, i = 1,2,3$$

- lineáris kombináció (de nem baricentrikus, és nem konvex) :

$$\alpha_1 = \ldots\ldots \quad \alpha_2 = \ldots\ldots \quad \alpha_3 = \ldots\ldots$$

- baricentrikus kombináció (de nem konvex):

$$\alpha_1 = \ldots\ldots \quad \alpha_2 = \ldots\ldots \quad \alpha_3 = \ldots\ldots$$

- konvex kombináció:

$$\alpha_1 = \ldots\ldots \quad \alpha_2 = \ldots\ldots \quad \alpha_3 = \ldots\ldots$$

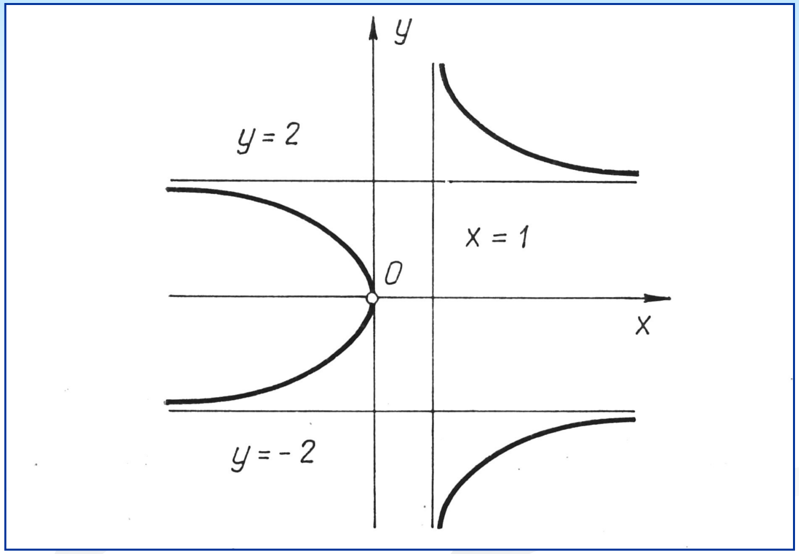
Ujjgyakorlat - implicit görbék

Pontok kiértékelése :
'+' vagy '-' vagy '0'

$$F(x,y) = xy^2 - y^2 - 4x = 0$$

$$P_1 = (2,5),\ P_2 = (-\frac{1}{2},1),\ P_3 = (-\frac{1}{3},1),\ P_4 = (1,\frac{1}{2})$$

$[...],\qquad [...],\qquad [...],\qquad [...],$



Gradiens vektor komponenseinek meghatározása

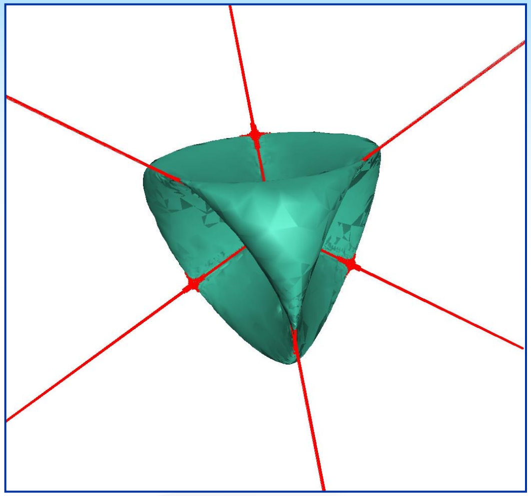
$$grad\ F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (\ ...., ...,)$$

Gradiens kiértékelése a 3. görbepontban: $(\qquad,\qquad)$

Érintővektor a 3. görbepontban: $\Big(\qquad,\qquad\Big)$

Ujjgyakorlat - implicit felületek

Implicit felület kiértékelése az *(1,2,2)* pontban



$$F(x,y,z) = x^2 y + y^2 z - 5xy = 0$$

Gradiens vektor komponenseinek meghatározása

$$grad\ F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

Gradiens kiértékelése a fenti görbepontban: $(\ldots\ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ldots)$

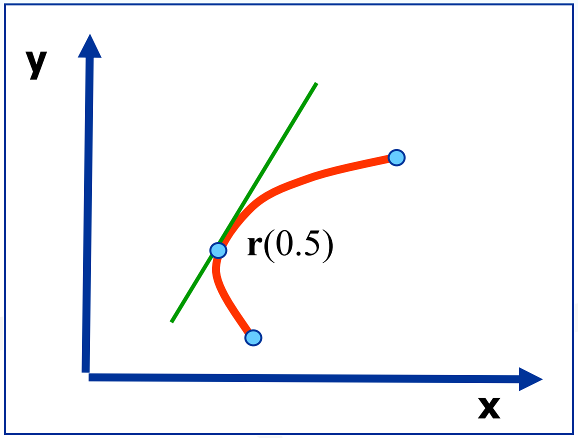
Az érintősík egyenlete a fenti görbepontban: $\big((x,y,z) - (\ldots,\ \ldots,\ \ldots)\ ,\ (\ldots\ldots,\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots)\ \big) = 0$

Ujjgyakorlat - érintő egyenes

Parametrikus görbe

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{b}_2 t^2 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_0,\ t \in [0,1]$$

$$\mathbf{b}_2 = (12,6) \quad \mathbf{b}_1 = (-8,2), \quad \mathbf{b}_0 = (4,1)$$



Érintővektor egyenlete:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ t \in [0,1]$$

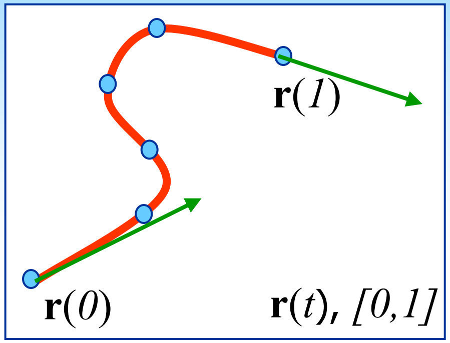
Görbepont és érintővektor a középpontban:

$$\mathbf{r}(0.5) = (\ldots\ldots, \ldots\ldots), \quad \dot{\mathbf{r}}(0.5) = (\ldots\ldots, \ldots\ldots)$$

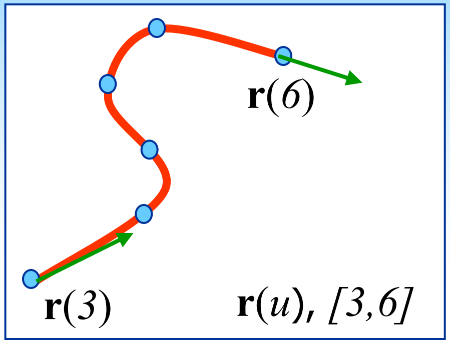
Érintő egyenes egyenlete:

$$\mathbf{l}(w) = \mathbf{r}(t_0) + w\,\dot{\mathbf{r}}(t_0),\ t_0 = 0.5,\ \mathbf{l}(w) = (\ldots, \ldots.) + w\,(\ldots, \ldots.)$$

Ujjgyakorlat - átparaméterezés



1. Kiinduló görbe



2. Lineáris átparaméterezés

Adott egy görbe: $\mathbf{r}(t) = (2{,}3)t^2 + (5{,}8)$

Keressük ennek a görbének az átparaméterezett változatát:

$$\mathbf{r}(t) \to \mathbf{r}(u); \quad [0{,}1] \to [3{,}6]$$

Az átparaméterező függvény lineáris:

$$u(t) = at + b, \quad a = ..., \quad b = ...$$

Írja fel az új görbét u hatványai szerint:

$$\mathbf{r}(u) = (.....,........)u^2 + (.....,........)u + (.....,........)$$

Ujjgyakorlat - affin invariancia

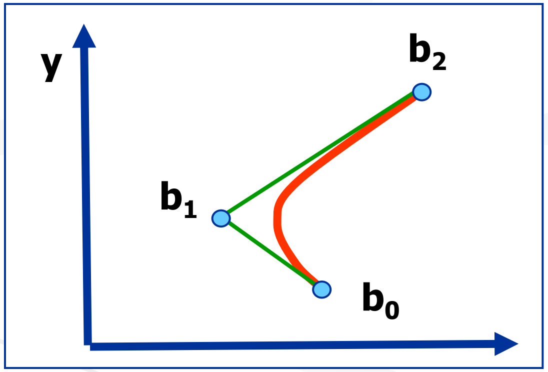
Szemléltesse, hogy az affin invariancia teljesül az alábbi másodfokú Bézier görbére a $t=0.25$ pontban

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{b}_0(1-t)^2+\mathbf{b}_1 2t(1-t)+\mathbf{b}_2 t^2 \qquad \mathbf{b}_0=(4,2),\mathbf{b}_1=(2,4),\mathbf{b}_2=(8,8)$$

Értékelje ki a $t=1/4$ pontot az eredeti görbén $\quad \mathbf{r}(0.25)=(\ldots\ldots,\ldots\ldots)$

Értékelje ki a $t=1/4$ pontot az alábbi transzformált görbén

$$\mathbf{r}^*(0.25)=\mathbf{r}(0.25)+(2,4)=(\ldots\ldots,\ldots\ldots)$$



Ellenőrizze, hogy a súlyfüggvények kielégitik a baricentrikus feltételt

$$(1-t)^2+2t(1-t)+t^2=???$$

Transzformálja a tartópontokat

$$\mathbf{b}_0^*=(\ldots\ldots,\ldots\ldots),\mathbf{b}_1^*=(\ldots\ldots,\ldots\ldots),\mathbf{b}_2^*=(\ldots\ldots,\ldots\ldots)$$

Értékelje ki a módosított görbét $t=0.25$-ben

$$\mathbf{r}^*(t)=\mathbf{b}_0^*(1-t)^2+\mathbf{b}_1^* 2t(1-t)+\mathbf{b}_2^* t^2=(\ldots\ldots,\ldots\ldots)$$

Ujjgyakorlat-parametrikus felületek

$v=1$ konstans paraméter vonal felírása:

$$\mathbf{r}(u,v)=(1,1,0)+(2,4,1)u^2+(5,5,2)uv+(3,3,3)v^2,\ (u,v)\in[0,2]$$

$$\mathbf{r}(u,1)=\mathbf{c}(u)=(\dots,\dots,\dots)+(\dots,\dots,\dots)u+(\dots,\dots,\dots)u^2$$

Derivált függvények és értékük az $(1,1)$ pontban:

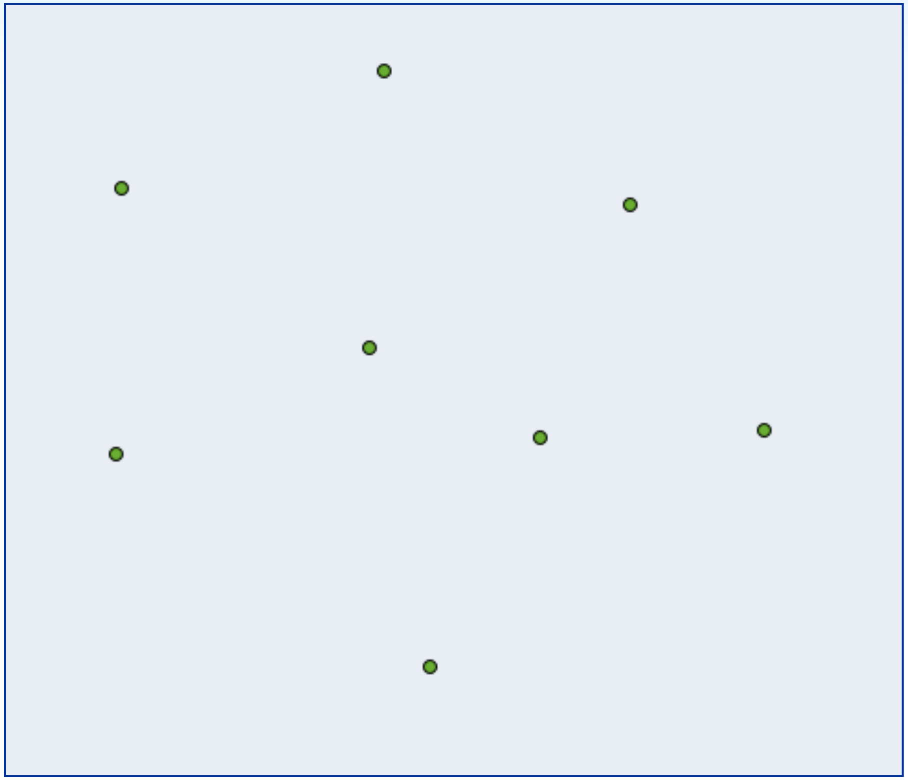
$$\dot{\mathbf{r}}_u(u,v)=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \dot{\mathbf{r}}_v(u,v)=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dot{\mathbf{r}}_u(u=1,v=1)=(\dots,\dots,\dots) \qquad \dot{\mathbf{r}}_v(u=1,v=1)=(\dots,\dots,\dots)$$

3D-s pont egy felületi görbén:

$$(u(t),v(t))=(0.25+t,4t) \qquad \mathbf{r}(u,v)=\mathbf{r}(u(t),v(t))_{|t=0.25}=(\dots,\dots,\dots)$$

Ujjgyakorlat - Delaunay háromszögek és Voronoi diagram



Rajzolja meg az adott ponthalmazhoz tartozó Voronoi diagrammot, majd húzza be a Delaunay háromszögelés éleit

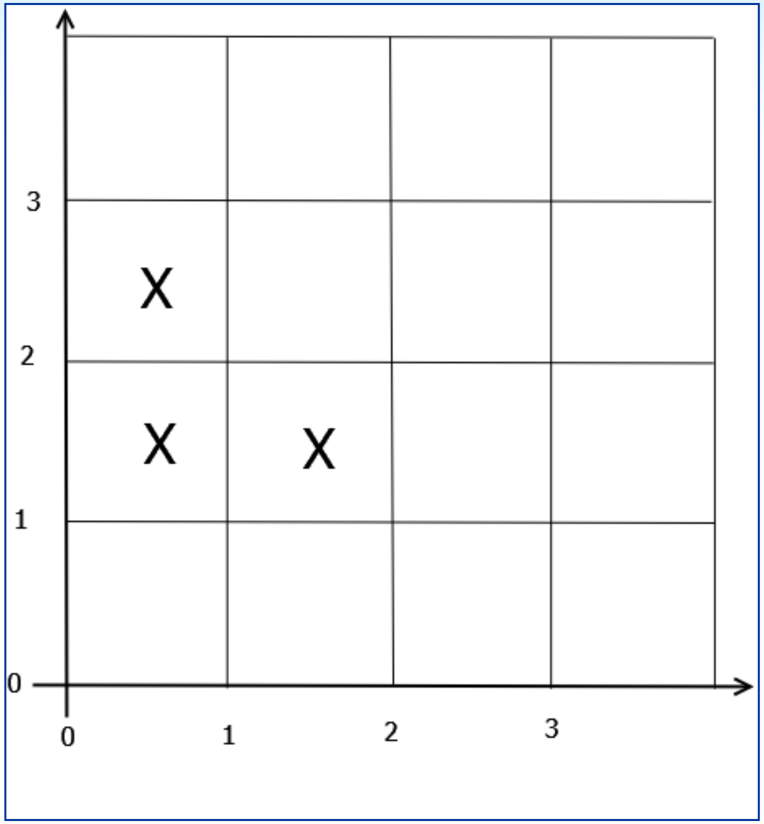
Magyarázza el a duális összerendelést a két struktúra között:

Dealunay csúcs = ...

Dealunay lap = ...

Dealunay él = ...

Ujjgyakorlat - sétáló négyzet



$$F(x,y) = x^2 - y^2 x + 2$$

Az X-szel jelölt négyzetek sarkaiban értékelje ki a fenti implicit függvényt

Jelölje meg azokat az éleket, amelyeket az $F(x,y)=0$ görbe elmetsz, és rajzolja be a közelítő polyline-t

A metszéspontokat lineáris interpolációval határozza meg a csúcsok között

Ujjgyakorlatok – Hermite interpoláció

Hermite interpoláció (harmadfokú)

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p}_A F_0(t) + \mathbf{t}_A G_0(t) + \mathbf{p}_B F_1(t) + \mathbf{t}_B G_1(t)$$

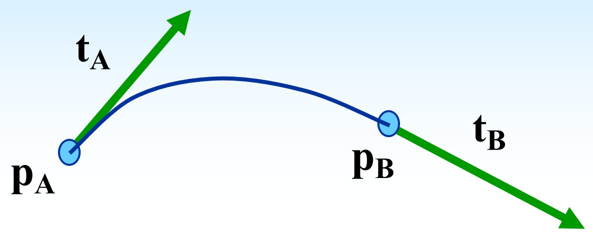
$$F_0(t) = 2\mathrm{t}^3 - 3\mathrm{t}^2 + 1,\ F_0(1) = 0$$

$$G_0(t) = \mathrm{t}^3 - 2\mathrm{t}^2 + \mathrm{t},\ G_0(1) = 0$$

$$F_1(t) = -2\mathrm{t}^3 + 3\mathrm{t}^2,\ F_1(1) = 1$$

$$G_1(t) = \mathrm{t}^3 - \mathrm{t}^2,\ G_1(1) = 0$$

$$\mathbf{r}(1) = \mathbf{p}_B$$



Bizonyítsuk be, hogy a Hermite interpoláció $t=1$-ben reprodukálja a B-beli tangens vektort

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{p}_A F_0'(t) + \mathbf{t}_A G_0'(t) + \mathbf{p}_B F_1'(t) + \mathbf{t}_B G_1'(t)$$

$$F_0'(t) = \text{..........},\ F_0'(1) = \text{.....}$$

$$G_0'(t) = \text{..........},\ G_0'(1) = \text{.....}$$

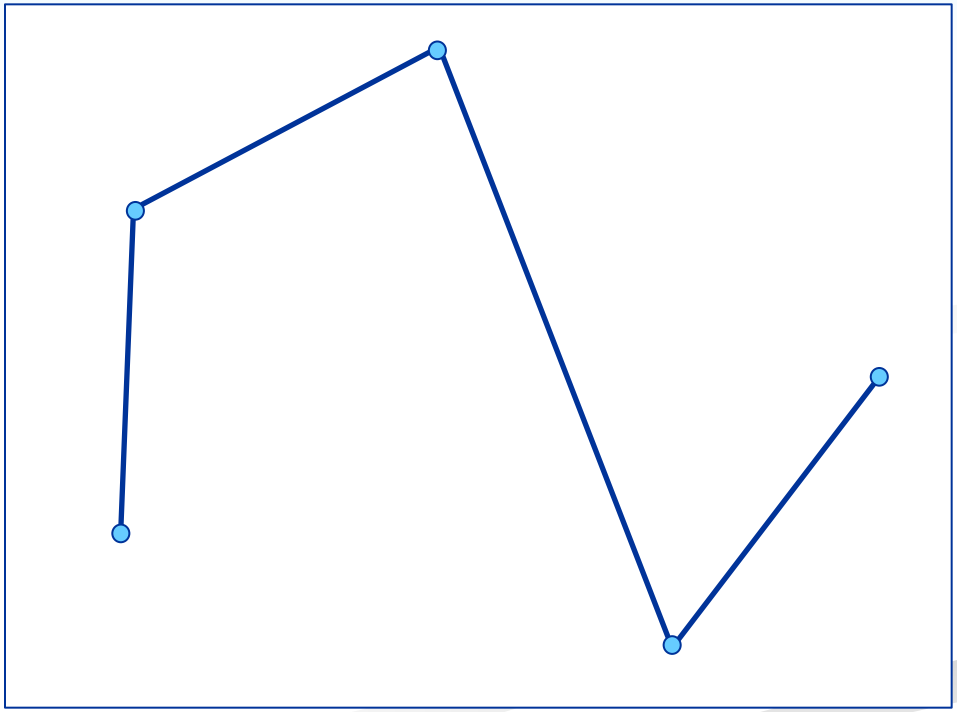
$$F_1'(t) = \text{...........},\ F_1'(1) = \text{......}$$

$$G_1'(t) = \text{............}\ G_1'(1) = \text{......}$$

$$\mathbf{r}'(1) = \text{.......}$$

Ujjgyakorlat - deCasteljau algoritmus

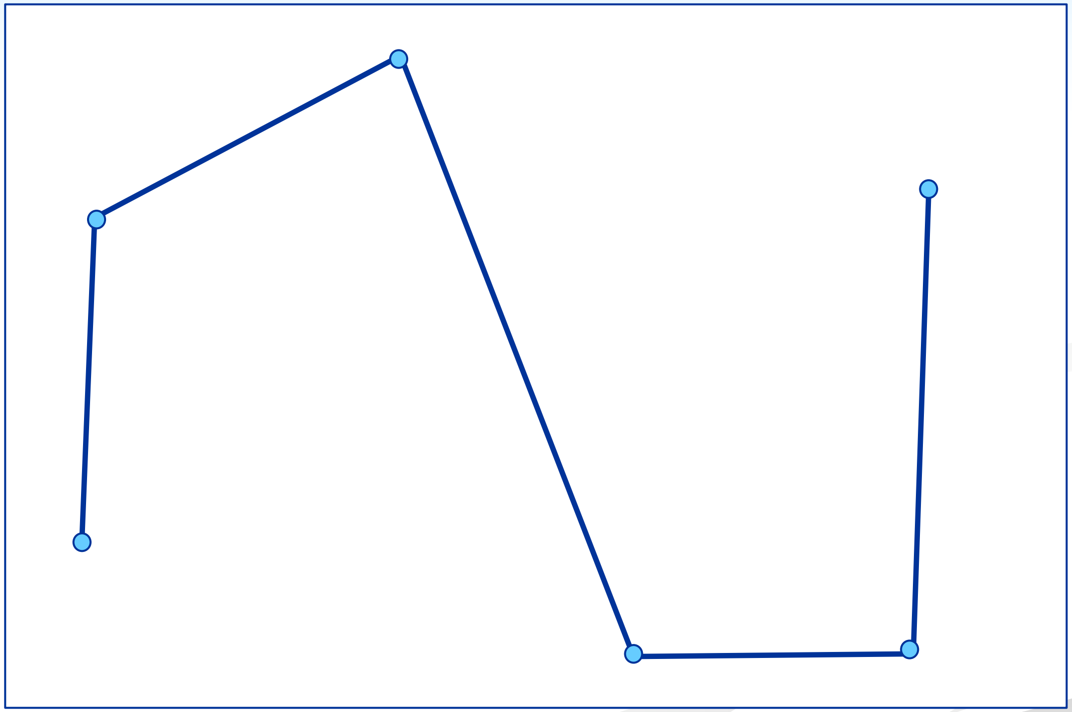
Értékelje ki az adott Bézier görbét a $t=2/3$ pontban a deCasteljau algoritmus segítségével; rajzolja be az algoritmus lépéseit



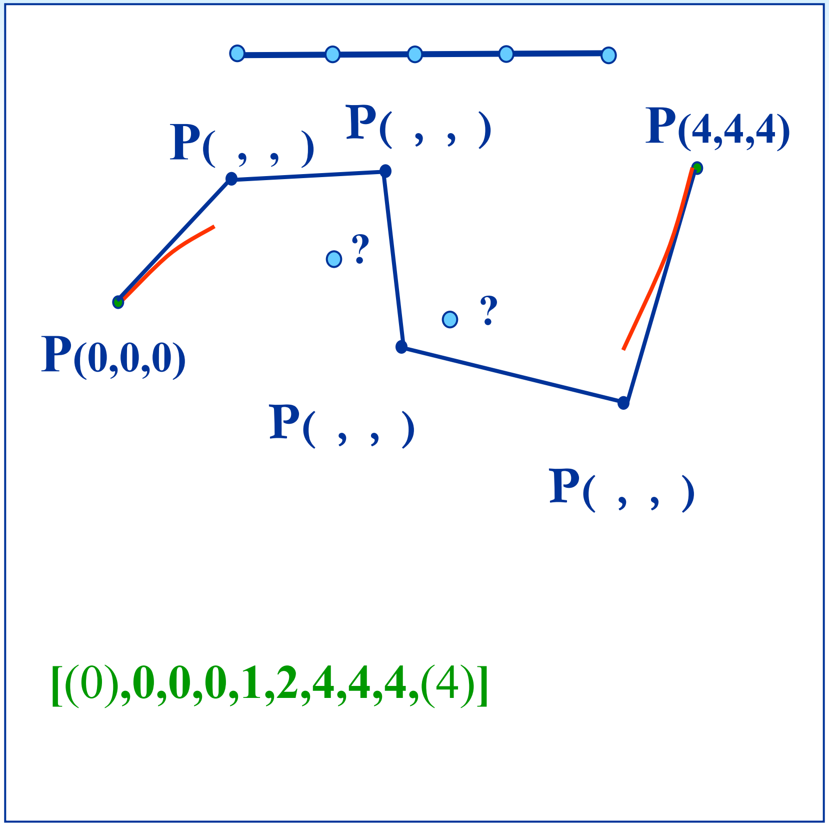
Ujjgyakorlat - fokszámemelés

Rajzolja be az adott ötödfokú Bézier görbe kontrollpoligonját fokszámemelés után

(minden húron keletkezik egy új kontrollpont)



Ujjgyakorlat - poláris koordináták



Adott egy harmadfokú interpoláló B-spline, három szegmenssel a [0,4] intervallumban

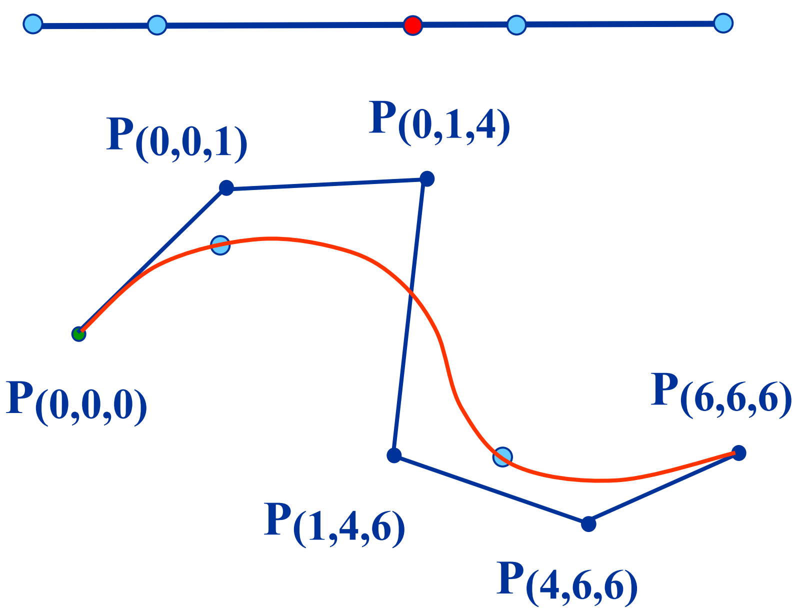
1. Határozza meg a kontrollpontok poláris koordinátáit

2. Határozza meg és rajzolja be a a belső szegmens két végpontját

3. A $P_{(0,1,2)} = (5,4)$ és a $P_{(1,2,4)} = (9,0)$ kontrollpontok alapján határozza meg a $P_{(1,2,1)}$ kontrollpont Descartes koordinátáit

$(x,y) = (........, ...)$

Ujjgyakorlat - csomó beszúrás



[(0),0,0,0,1,4,6,6,6,(6)]

[(0),0,0,0,1,3,4,6,6,6,(6)]

Szúrjon be egy új csomót $u=3$-nál, határozza meg az új kontrollpontok poláris koordinátáit és szerkessze újra a kontroll poligont

Ujjgyakorlat – de Boor algoritmus

Értékelje ki a B-spline-t az $u=2$ pontban 3-szor ismételt csomóbeszúrás segítségével

$$\mathbf{r}(u) = \mathbf{P}_{(u,u,\ldots,u)}$$

Határozza meg a poláris koordinátákat, és rajzolja be a vonatkozó kontrollpontokat

$$\{\mathbf{P}_{(0,0,1)}, \mathbf{P}_{(0,1,3)}\} \Rightarrow \{\mathbf{P}_{(\ldots,\ldots,\ldots)}\}$$

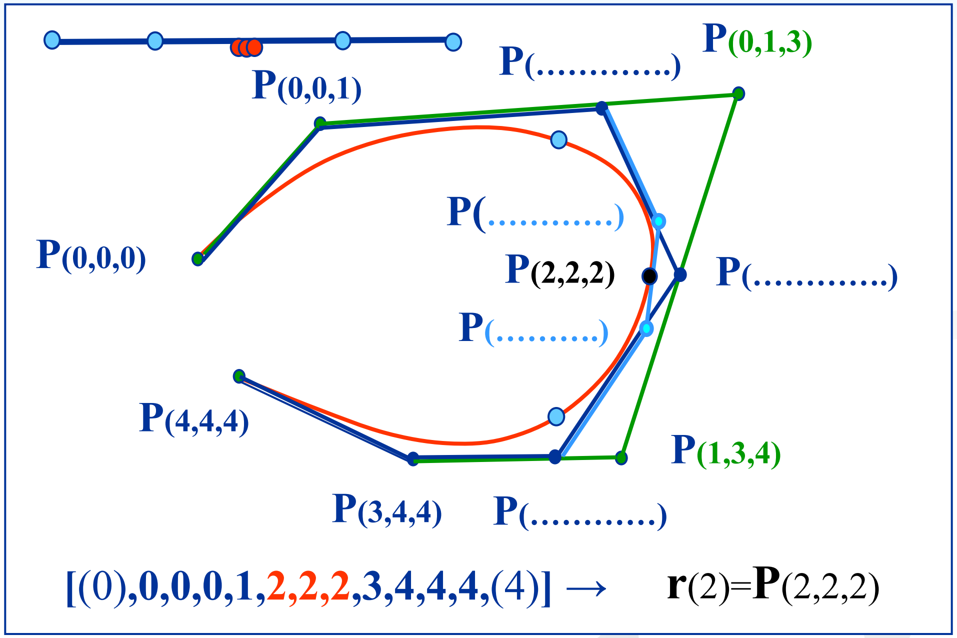
$$\{\mathbf{P}_{(0,1,3)}, \mathbf{P}_{(1,3,4)}\} \Rightarrow \{\mathbf{P}_{(\ldots,\ldots,\ldots)}\}$$

$$\{\mathbf{P}_{(1,3,4)}, \mathbf{P}_{(3,4,4)}\} \Rightarrow \{\mathbf{P}_{(\ldots,\ldots,\ldots)}\}$$

$$\{\mathbf{P}_{(\ldots,\ldots,\ldots)}, \mathbf{P}_{(\ldots,\ldots,\ldots)}\} \Rightarrow \{\mathbf{P}_{(\ldots,\ldots,\ldots)}\}$$

$$\{\mathbf{P}_{(\ldots,\ldots,\ldots)}, \mathbf{P}_{(\ldots,\ldots,\ldots)}\} \Rightarrow \{\mathbf{P}_{(\ldots,\ldots,\ldots)}\}$$

$$\{\mathbf{P}_{(\ldots,\ldots,\ldots)}, \mathbf{P}_{(\ldots,\ldots,\ldots)}\} \Rightarrow \{\mathbf{P}_{(2,2,2)}\}$$



Ujjgyakorlat – Bézier szegmensek

Állítsa elő a B-spline görbe középső szegmensének Bézier kontrollpontjait poláris cimkék segítségével

$$\mathbf{r}^B(u),\ u \in [1,3]$$

az alábbi formában

$$\mathbf{P}_{(a,a,a)}, \mathbf{P}_{(a,a,b)}, \mathbf{P}_{(a,b,b)}, \mathbf{P}_{(b,b,b)}$$

Lépések:

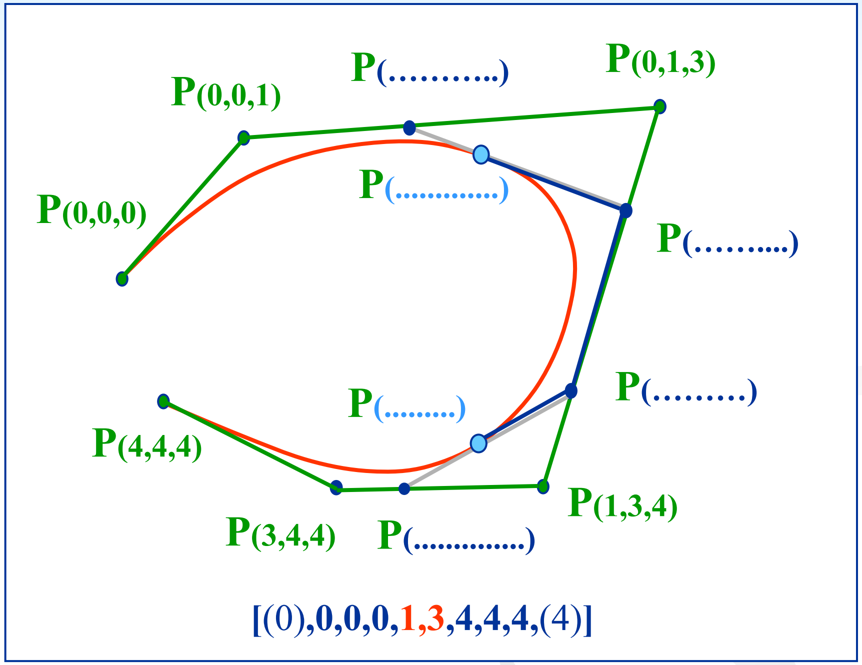
$$\left\{\mathbf{P}_{(0,0,1)}, \mathbf{P}_{(0,1,3)}\right\} \Rightarrow \left\{\mathbf{P}_{(\ldots.,\ \ldots..,\ \ldots..)}\right\}$$

$$\left\{\mathbf{P}_{(0,1,3)}, \mathbf{P}_{(1,3,4)}\right\} \Rightarrow \left\{\mathbf{P}_{(\ldots.,\ \ldots..,\ \ldots..)}, \mathbf{P}_{(\ldots.,\ \ldots..,\ \ldots..)}\right\}$$

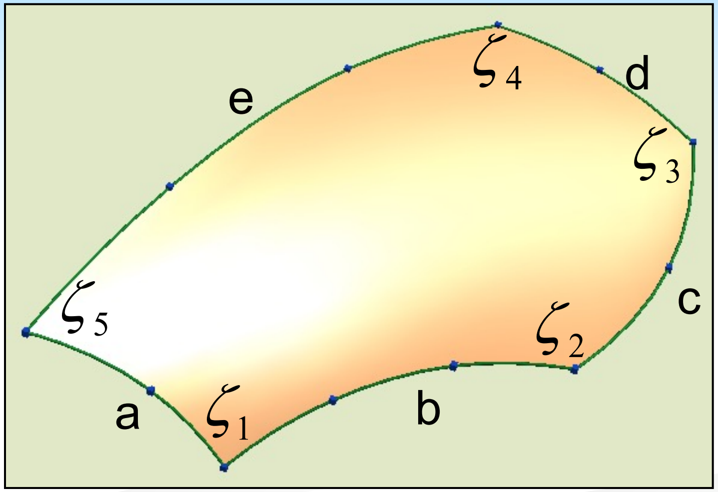
$$\left\{\mathbf{P}_{(0,1,1)}, \mathbf{P}_{(1,1,3)}\right\} \Rightarrow \left\{\mathbf{P}_{(\ldots.,\ \ldots..,\ \ldots..)}\right\}$$

$$\left\{\mathbf{P}_{(\ldots.,\ \ldots..,\ \ldots..)}, \mathbf{P}_{(\ldots.,\ \ldots..,\ \ldots..)}\right\} \Rightarrow \left\{\mathbf{P}_{(\ldots.,\ \ldots..,\ \ldots..)}\right\}$$

$$\left\{\mathbf{P}_{(\ldots.,\ \ldots..,\ \ldots..)}, \mathbf{P}_{(\ldots.,\ \ldots..,\ \ldots..)}\right\} \Rightarrow \left\{\mathbf{P}_{(\ldots.,\ \ldots..,\ \ldots..)}\right\}$$



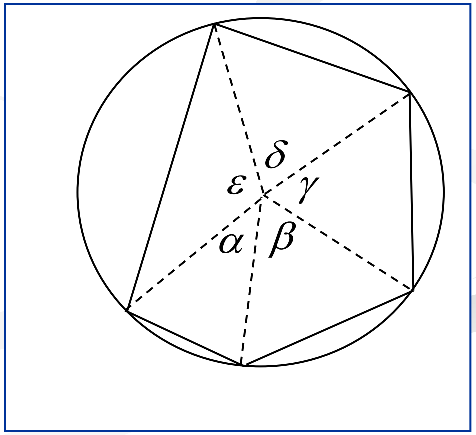
Ujjgyakorlat - poligonális domén



Adott n darab határgörbe 3D-ben, hosszuk rendre:

$$a = 3, b = 2, c = 4, d = 3, e = 6$$

Ez alapján határozzuk meg az alábbi körpoligonban létrehozott domén belső szögeit:



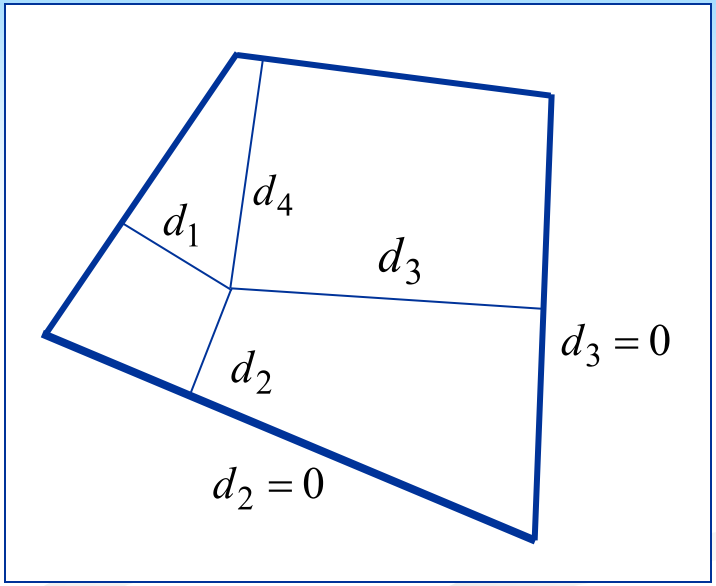
$$\alpha = \ldots\ldots, \beta = \ldots\ldots, \gamma = \ldots\ldots, \delta = \ldots\ldots, \varepsilon = \ldots\ldots\ldots$$

Ujjgyakorlat - súlyfüggvények

- Oldal-alapú súlyfüggvény:

- ● i-edik oldalon: $\mathrm{Blend}^i_{oldal} = 1$
- ● j≠i oldalakon: $\mathrm{Blend}^i_{oldal} = 0$

$$\mathrm{Blend}^i_{oldal}(d_1, d_2, \ldots d_n) = \frac{\prod_{j \neq i} d_j^{\,2}}{\sum_k \prod_{j \neq k} d_j^{\,2}}$$



Feladat:

- $n=4$, a 2-es blend függvény meghatározása
- ellenőrzés a 2. és 3. oldalakon

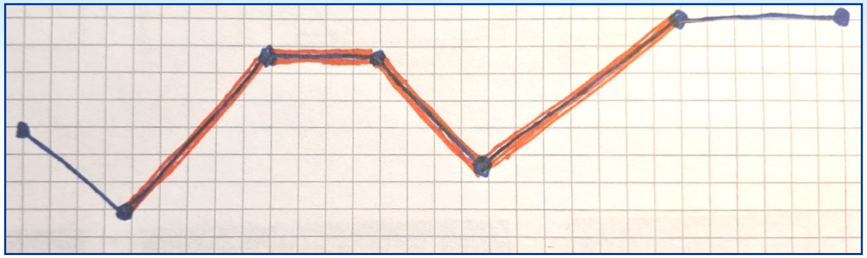
$$\mathrm{Blend}^2_{oldal} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots + \ldots. + \ldots. + \ldots.}$$

$$\mathrm{Blend}^2_{oldal}(d_2 = 0) = ?$$

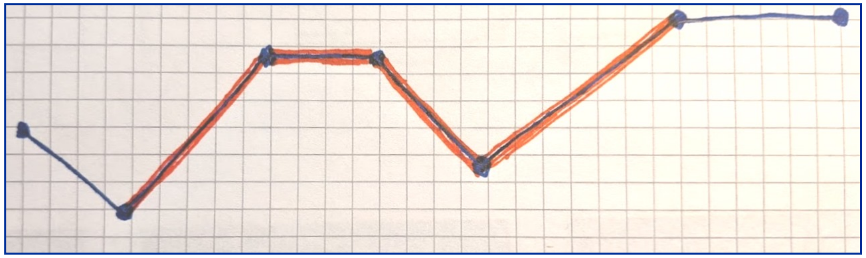
$$\mathrm{Blend}^2_{oldal}(d_3 = 0) = ?$$

Ujjgyakorlat - rekurzív poligonosztás

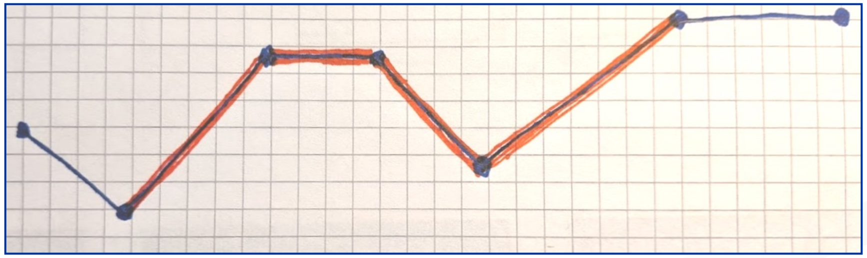
Saroklevágás (Chaikin)



Húrfelezés

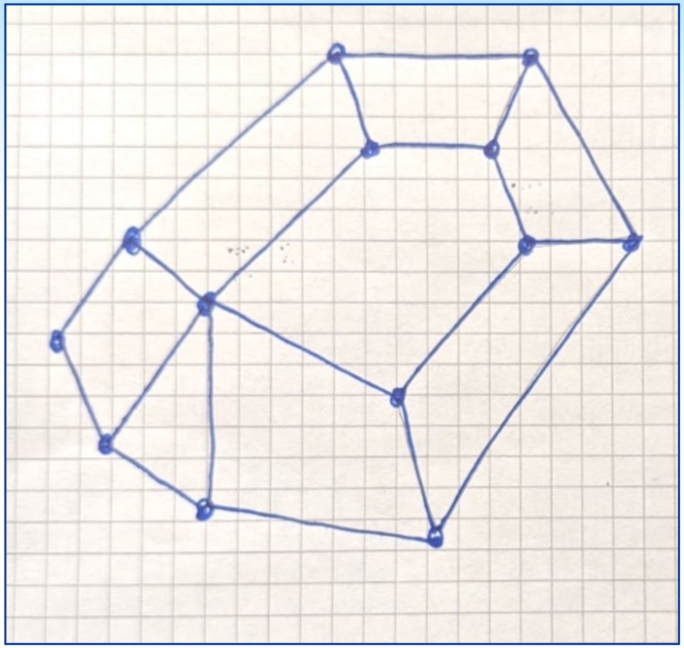


Interpoláló



- Hajtson végre egy felosztási lépést mindhárom kontrollpoligon pirossal kiemelt részén
- Rajzolja be az új csúcsokat, és jelölje meg, hogy hány darab régi csúcs lineáris kombinációja alapján jöttek ezek létre

Ujjgyakorlat - rekurzív felosztás$_1$



- Hajtson végre egy felosztási lépést az X módszer szerint és rajzolja be az új csúcsokat és éleket

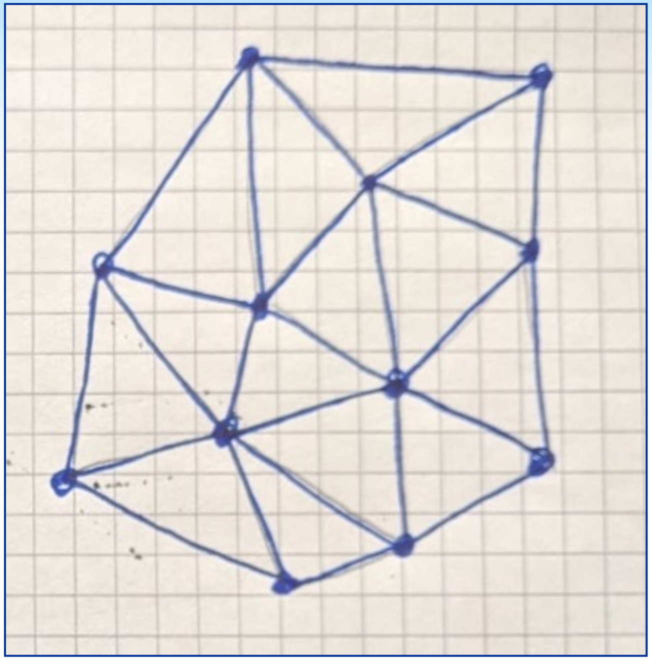
  X = Doo-Sabin vagy Catmull-Clark vagy középosztás

- Egy-egy kiválasztott új csúcsra jelölje meg, hogy mely régi csúcsok lineáris kombinációja alapján jöttek létre
- Számolja össze hány n-oldalú lap keletkezett:

3-oldalú: 1 db
4-oldalú: 6 db
5-oldalú: 1 db

3-oldalú: ....
4-oldalú: ....
5-oldalú: ....

Ujjgyakorlat - rekurzív felosztás$_2$



- Hajtson végre egy felosztási lépést az X módszer szerint és rajzolja be az új csúcsokat és éleket

  X = Loop-féle osztás vagy √3 osztás

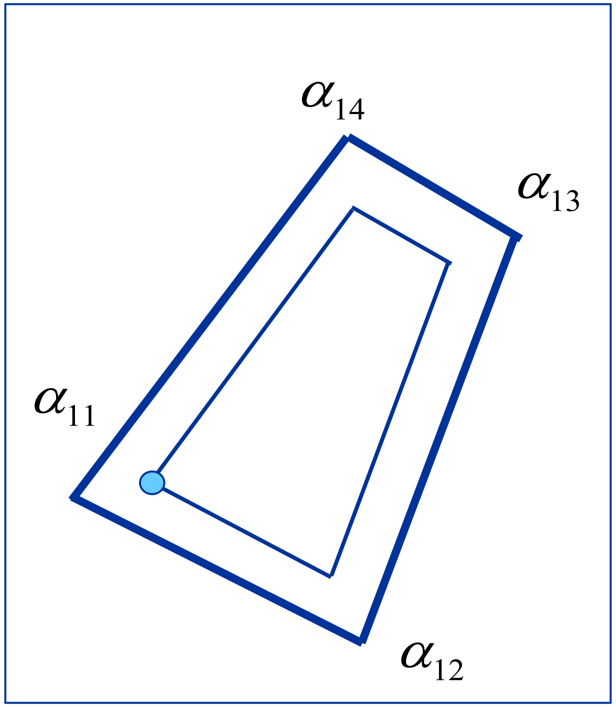
- Egy-egy kiválasztott új csúcsra jelölje meg, hogy mely régi csúcsok lineáris kombinációja alapján jöttek létre
- Számolja össze hány lapból indultunk és hány új 3-oldalú lap keletkezett:

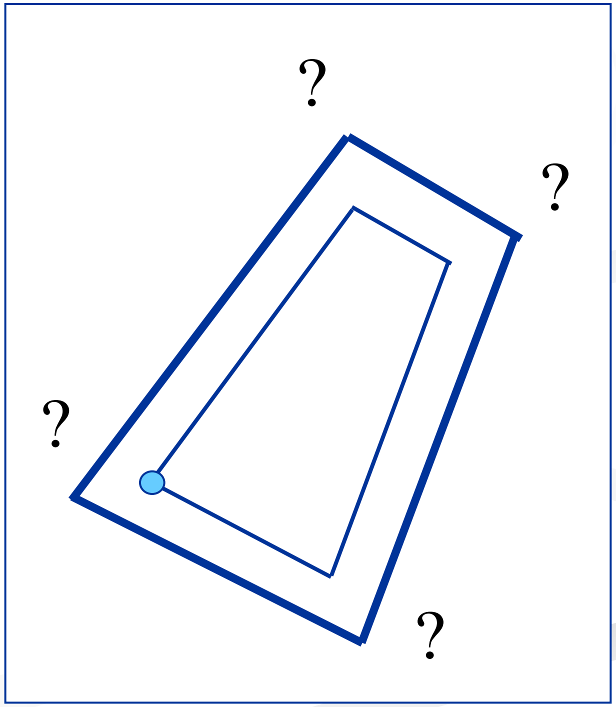
Induló lapok száma: .....

Keletkezett lapok száma: ....

Ujjgyakorlat - Doo-Sabin súlyok

$$n = 4,\ i = 1,\ \alpha_{11} = \frac{n+5}{4n}, \quad \alpha_{1j} = \frac{3 + 2\cos\dfrac{2\pi(i-j)}{n}}{4n},\ j = 2,3,4$$





Ujjgyakorlat – tangens becslés

Parabolikus tangens becslés három adatpont alapján:

$$\mathbf{r}(u) \to \mathbf{r}(1) = \mathbf{P}_0 = (0,0); \mathbf{r}(3) = \mathbf{P}_1 = (5,2); \mathbf{r}(4) = \mathbf{P}_2 = (6,0)$$

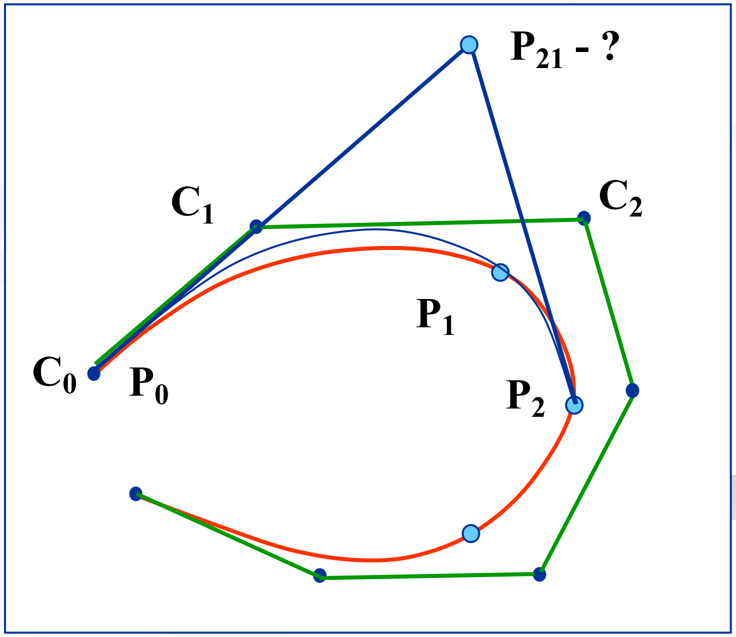
$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}_0(1-t)^2 + \mathbf{P}_{21} 2t(1-t) + \mathbf{P}_2 t^2, t \in [0,1]$$

Meghatározandó a középső kontroll pont $\mathbf{P}_{21}$, majd a tangens vektor:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{p}(t_0), t_0 = \ldots\ldots;$$

$$\mathbf{P}_{21} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = (\ldots\ldots,\ldots\ldots)$$

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = 2(\mathbf{P}_{21} - \mathbf{P}_0) = (\ldots\ldots,\ldots\ldots)$$



Ujjgyakorlat - parametrizáció

Egy adott B-spline interpolációs feladathoz négy adatpontot parametrizálni kell

$$P_0 = (0,0), P_1 = (15,20), P_2 = (31,20), P_3 = (46,0)$$

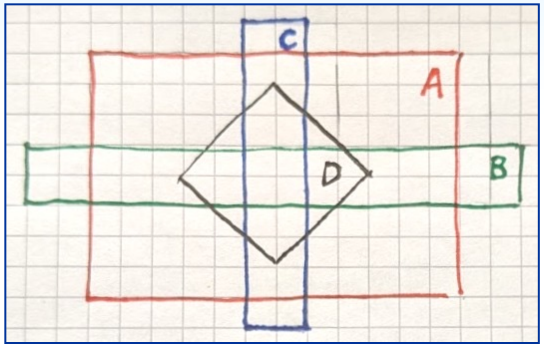
Jelölések

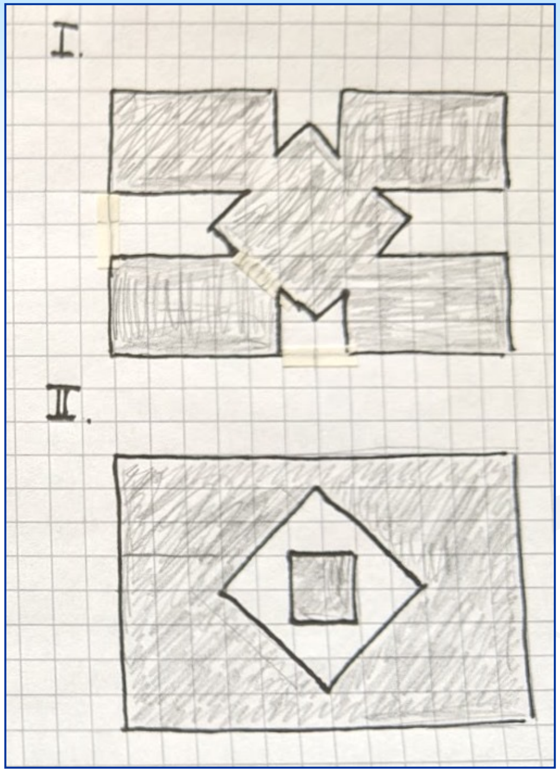
$$\Delta_i = u_i - u_{i-1}, d_i = |\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}|, i = 1,\ldots,n$$

Határozzuk meg a csomó értékeket a következő algoritmusok szerint:

- egyenletes: $\Delta_i = const.$ $\quad u_0 = 0,\ u_1 = \ldots\ldots, u_2 = \ldots\ldots, u_3 = \ldots\ldots$
- húrhossz szerint: $\dfrac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}} = \dfrac{d_i}{d_{i+1}}$ $\quad u_0 = 0,\ u_1 = \ldots\ldots, u_2 = \ldots\ldots, u_3 = \ldots\ldots$
- (iii) centripetális: $\dfrac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}} = \dfrac{\sqrt{d_i}}{\sqrt{d_{i+1}}}$ $\quad u_0 = 0,\ u_1 = \ldots\ldots, u_2 = \ldots\ldots, u_3 = \ldots\ldots$

Ujjgyakorlat - CSG



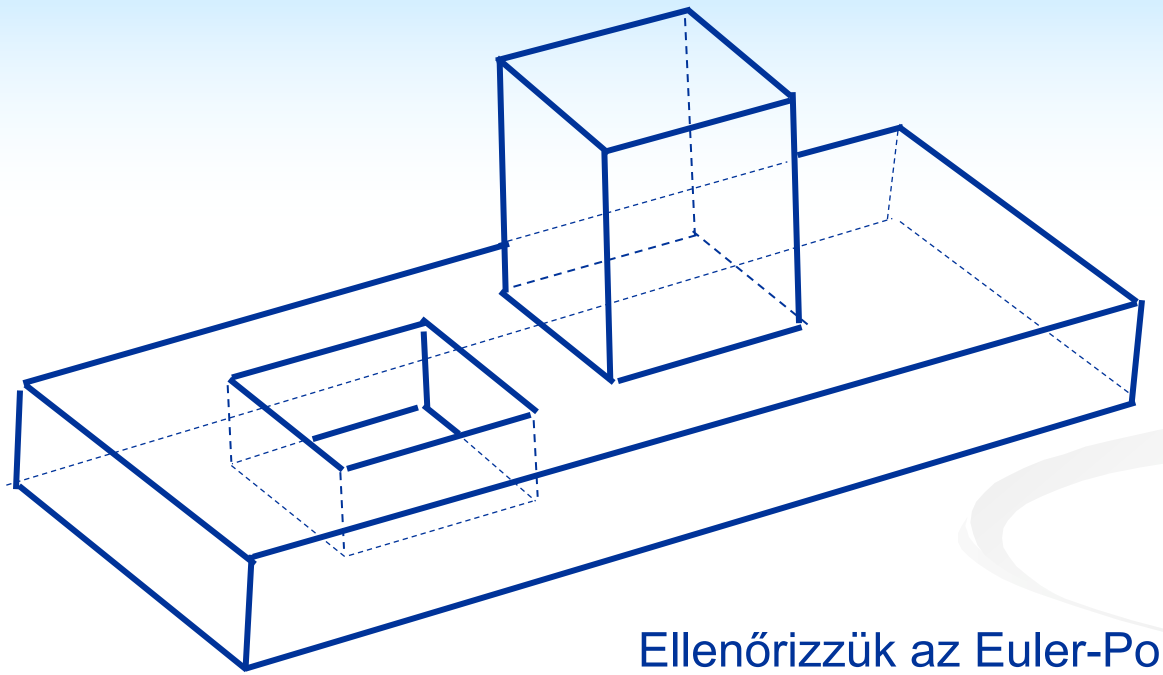


I. fa:

II. fa:

Az A,B,C és D primitív objektumok halmazműveleti kombinációjával hozza létre az I. és II. modellek bináris CSG gráfjait (bináris fa).

Ujjgyakorlat - E-P egyenlet



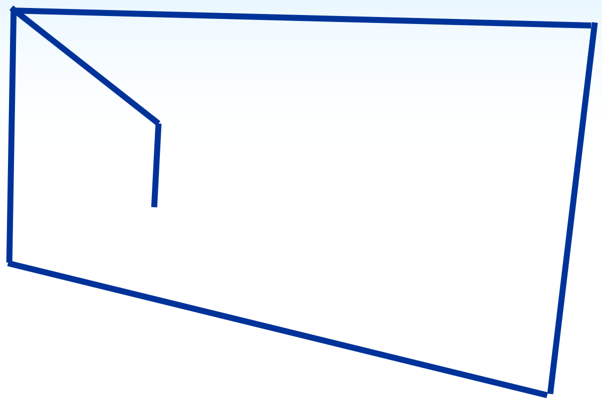
Ellenőrizzük az Euler-Poincare egyenletet:

V: ….., E: ….., F: ……, L_i: …….., G: …..

V - E + F - (L_i) = 2(1 - G)

Ujjgyakorlat - Euler operációk

Generáljon egy Euler operáció sorozatot (MEV, MEF, KEML), amely A állapotból B-be visz

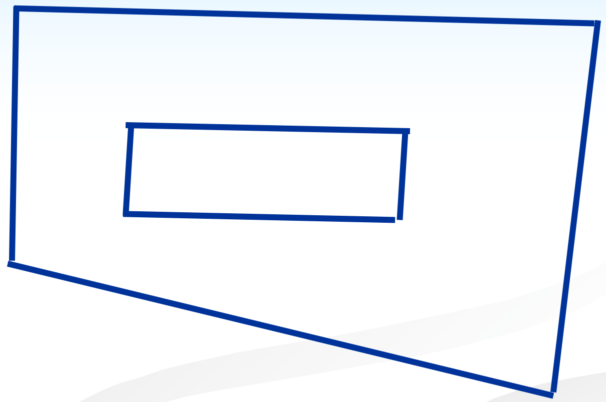


A - Kiindulás:

V:6, E:6, F:1, L_i:0

(6,6,2)

1.............2..............3.............4.............



B - Végeredmény:

V:...., E:...., F:...., L_i:.....

Ujjgyakorlat - paraméterkorrekció

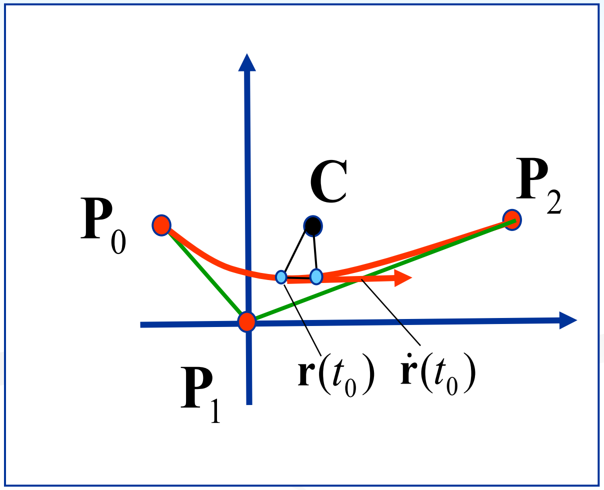
Adott egy $\mathbf{r}(t)$ görbe és egy C pont, határozzuk meg a legközelebbi görbepontot és annak közelítő paraméterértékét!

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{P}_0(1-t)^2 + \mathbf{P}_1 2(1-t)t + \mathbf{P}_2 t^2,\ t \in [0,1]$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = 2(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)(1-t) + 2(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)t$$

$$\mathbf{P}_0 : (-1,1),\ \mathbf{P}_1 : (0,0),\ \mathbf{P}_2 : (3,1)$$

$$\mathbf{C} : (1,1),\quad t_0 = 0.5$$



Kiszámítandó:

$$\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) = (\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots)$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = (\ldots\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots)$$

$$h = \frac{(\mathbf{C} - \mathbf{r}(t_0), \dot{\mathbf{r}}(t_0))}{|\dot{\mathbf{r}}(t_0)|} = \frac{((\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots),(\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots))}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta t = \frac{h}{|\dot{\mathbf{r}}(t_0)|} = \ldots\ldots\ldots\ldots; \quad t_1 = t_0 + \Delta t = \ldots\ldots\ldots\ldots$$