3D - geometriai modellezés, alakzatrekonstrukció, nyomtatás

19. Szabadformájú felületek simítása

http://cg.iit.bme.hu/portal/node/312
https://www.vik.bme.hu/kepzes/targyak/VIIIAV54

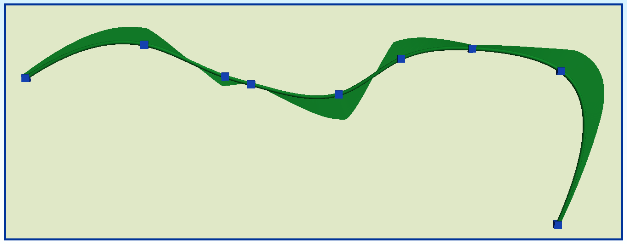
Dr. Várady Tamás, Dr. Salvi Péter
BME, Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Irányítástechnika és Informatika Tanszék

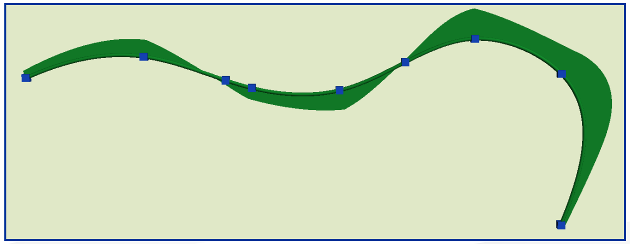
Tartalom

- Szép (fair) görbék és felületek
  - simító energia integrálok
- Felületapproximáció B-spline-okkal
  - ismétlés - a megoldandó egyenletrendszer
  - simítótagokkal kibővített egyenletrendszer
- Lokális kontrollpont optimalizálás
  - görbék - csomó törlés és beszúrás
  - kiterjesztés felületekre

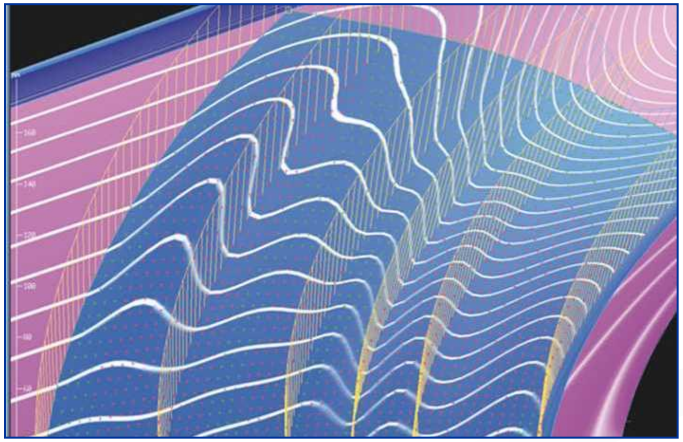
Szép (fair) görbék és felületek

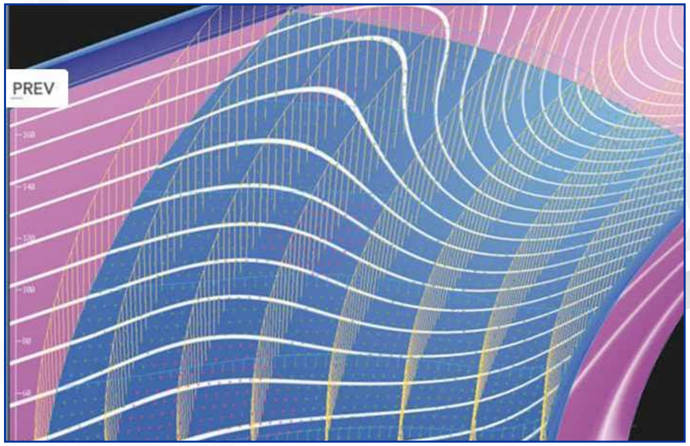
- nincs egyértelmű matematikai definíció...
- fair: a görbületeloszlás egyenletes és a lehető legkevesebb monoton szakaszból áll
- kerülendő: felesleges inflexiók, erős görbületi szélsőértékek, lapos szakaszok





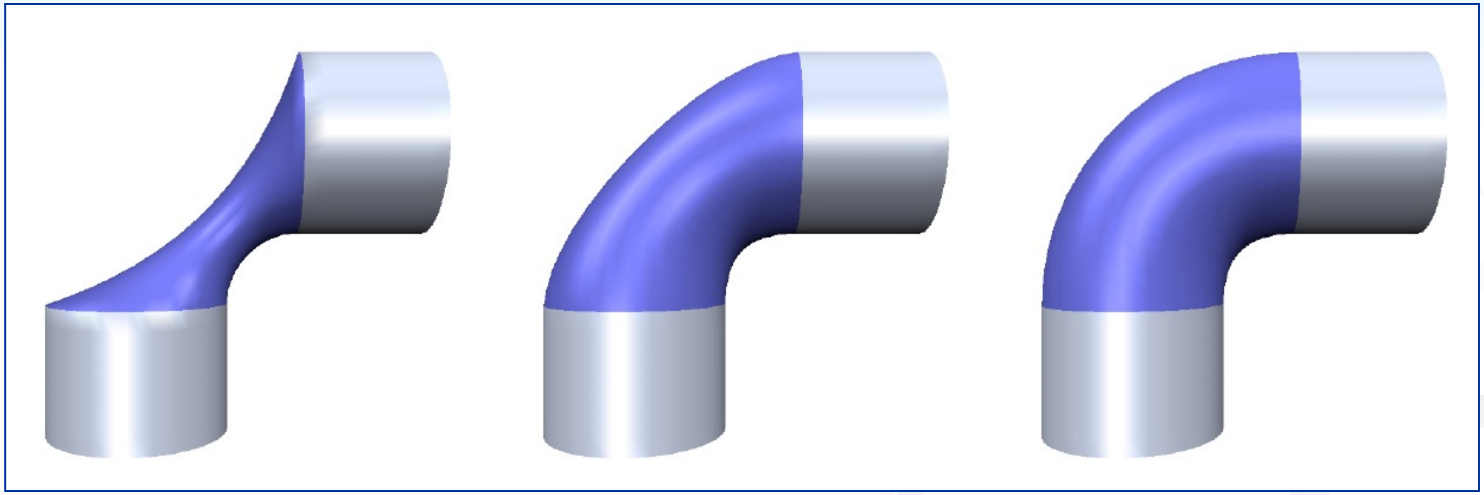
1. globális eljárás: ponthalmaz illesztése simaságot optimalizáló tagokkal
2. lokális eljárás: kontrollpontok poziciójának optimalizálása





Simasági mértékek

- Energia-minimalizálás (fairing) – minőségmérő integrálok: a „tökéletlenséget” büntetik
- A simaság fontos: pl. megjelenítésnél, anyagtulajdonságok, megmunkálás stb.



(Kobbelt)

Membrán energia:
- a felület legyen kicsi

$$\int_S dA = min.$$
$$\iint_\Omega |\mathbf{r}_u|^2 + |\mathbf{r}_v|^2 \, dudv$$

Rugalmas lap energia (thin plate):
- ne legyen nagy a görbület

$$\int_S \kappa_1^2 + \kappa_2^2 dA = min.$$
$$\iint_\Omega |\mathbf{r}_{uu}|^2 + 2|\mathbf{r}_{uv}|^2 + |\mathbf{r}_{vv}|^2 \, dudv$$

Minimális görbület variáció:
- ne változzon gyorsan a görbület

$$\int_S \left(\frac{\partial \kappa_1}{\partial \mathbf{k}_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \kappa_2}{\partial \mathbf{k}_2}\right)^2 dA = min.$$

Approximáció B-spline felületekkel$_1$

Lineáris egyenletrendszer

- adott pontok: $\{\mathbf{P}_i, u_i, v_i\}, i = 0, \ldots, M;$
- $n+1$ x $m+1$ ismeretlen kontrollpont:

$$\{\mathbf{c}_{kl}\}, k = 0, \ldots, n; l = 0, \ldots, m; \quad \rightarrow \{\mathbf{c}_j\}, j = 0, \ldots, N;$$

- $M >> N$ egyenlet $\Rightarrow$ formailag ugyanaz a probléma, mint a görbéknél:

$$d_i = |\mathbf{P}_i - \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} \mathbf{c}_{kl} N_k(u_i)\, N_l(v_i)| = |\mathbf{P}_i - \sum_{j=0}^{N} \mathbf{c}_j \overline{N}_j(u_i, v_i)|;$$

$$j = k(m+1) + l, \mathbf{c}_j = \mathbf{c}_{kl}, \overline{N}_j(u_i, v_i) = N_k(u_i) N_l(v_i);\ j = 0, \ldots, N$$

- négyzetes távolság függvény:

$$F_{lsq}(\mathbf{c}_0, \ldots, \mathbf{c}_N) = \sum_{i=0}^{M} |\mathbf{P}_i - \mathbf{S}(u_i, v_i)|^2 = \sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{N} |\mathbf{P}_i - \mathbf{c}_j \overline{N}_j(u_i, v_i)|^2 = \|\mathbf{Nc} - \mathbf{P}\|^2$$

- minimalizálás:

$$\frac{\partial F_{lsq}}{\partial \mathbf{c}_k}(\mathbf{c}) = 2\sum_{i=0}^{M}\left(\sum_{j=0}^{N} \mathbf{P}_i - \mathbf{c}_j \overline{N}_j(u_i, v_i)\right) \overline{N}_k(u_i, v_i), \quad k = 0, 1, \ldots, N$$

Approximáció B-spline felületekkel$_2$

- mátrix alakban:

$$\min([\mathbf{N}][\mathbf{c}]-[\mathbf{P}])^2 \Rightarrow [\mathbf{N}]^T[\mathbf{N}][\mathbf{c}]=[\mathbf{N}]^T[\mathbf{P}],$$

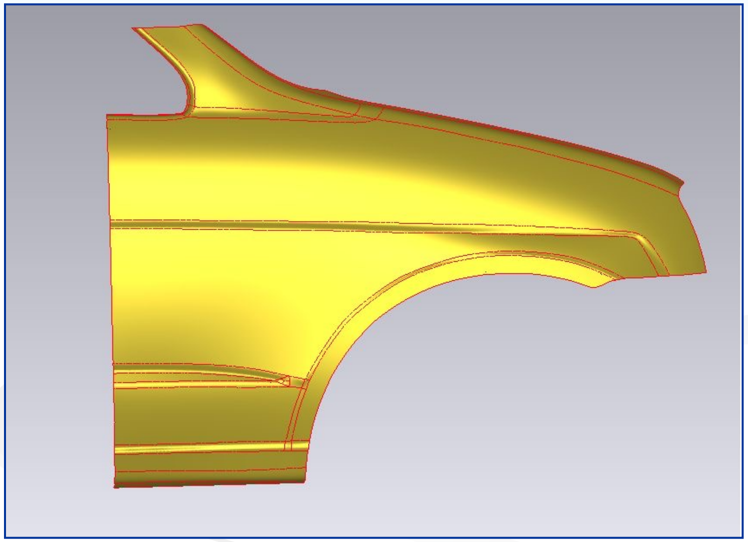
$$[\mathbf{M}_{\mathbf{lsq}}][\mathbf{c}]=[\mathbf{b}]$$

- ahol

$$[\mathbf{M}_{\mathbf{lsq}}]=[\mathbf{N}]^T[\mathbf{N}], \quad [\mathbf{b}]=[\mathbf{N}]^T[\mathbf{P}].$$

- a megoldás:

$$[\mathbf{c}]=[\mathbf{M}_{\mathbf{lsq}}]^{-1}[\mathbf{b}]$$



Simító integrál:

$$F_{smooth}(\mathbf{c}_0,\ldots,\mathbf{c}_N)=\iint_\Omega(\mathbf{S}_{uu}^2+2\mathbf{S}_{uv}^2+\mathbf{S}_{vv}^2)\,du\,dv$$

- minimalizálás:

$$F_{comp}(\mathbf{c})=F_{lsq}(\mathbf{c})+\lambda\,F_{smooth}(\mathbf{c}) \quad \Rightarrow [\mathbf{c}]=[\mathbf{M}_{\mathbf{lsq}}+\lambda\mathbf{M}_{smooth}]^{-1}[\mathbf{b}]$$

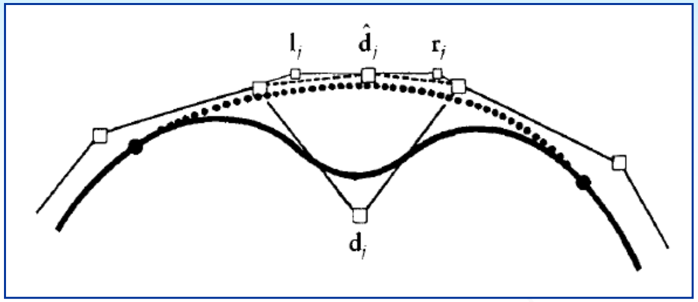
- simítási súly λ , helyes beállítása kritikus lehet

Kontrollpontok optimalizálása$_1$

Harmadfokú B-spline - C^2 folytonos:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{tt}(t_0^-)=\ddot{\mathbf{r}}_{tt}(t_0^+)\rightarrow\kappa(t_0^-)=\kappa(t_0^+)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_{ttt}(t_0^-)\neq\ddot{\mathbf{r}}_{ttt}(t_0^+)\rightarrow\kappa'(t_0^-)\neq\kappa'(t_0^+)$$

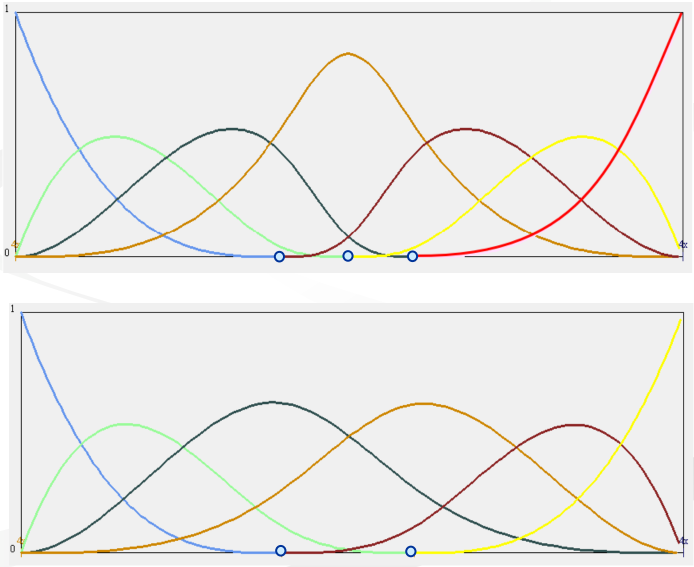


- simasági mérték - a görbületváltozások összege:

$$\sum_i|\kappa'(t_i^-)-\kappa'(t_i^+)|\Rightarrow\sum_i|\ddot{\mathbf{r}}_{ttt}(t_0^-)-\ddot{\mathbf{r}}_{ttt}(t_0^+)|$$

- lokális optimalizálás a csomóértékeknél: a folytonossági ugrás csökkentése
  - (i) csomótörlés → módosított görbe
  - (ii) két szegmens közelítése eggyel → új súlyfüggvények, új tartópontok
  - (iii) csomóbeszúrás → görbe nem változik

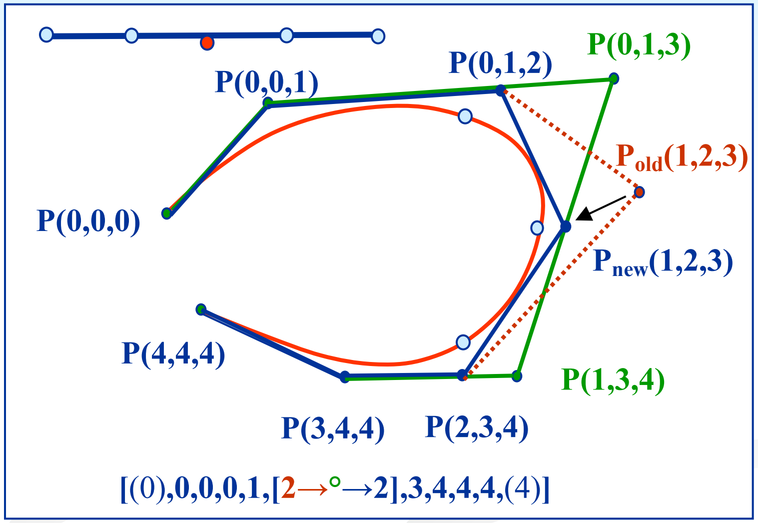
- csomótörlés - nem egyértelmű; legegyszerűbb, ha csak egy kontrollpont változik

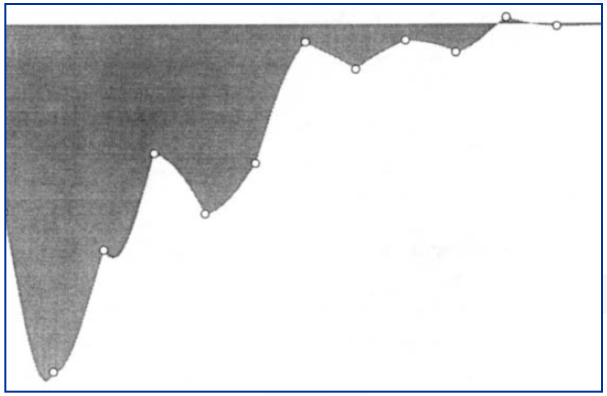


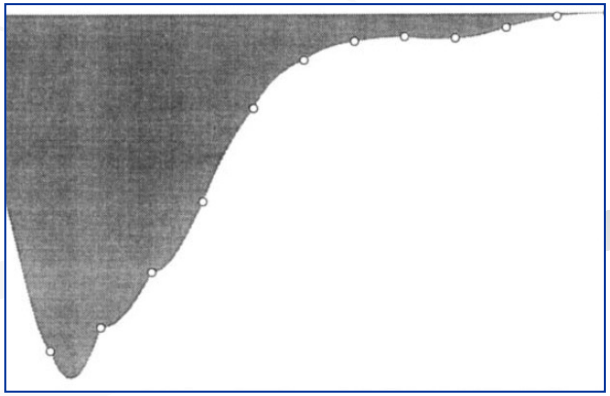
Csomótörlés

Kontrollpontok optimalizálása$_2$

- csomóbeszúrás poláris koordináták segítségével (lásd B-spline fejezet)
- csomótörlés: azonos logika visszafele
- javítandó kontrollpontok sorba állítása a folytonossági ugrások alapján:
  - harmadfokú B-spline esetén: három csomóbeli ugrás összege
  - kontrollpont javítás → prioritás sor módosítása



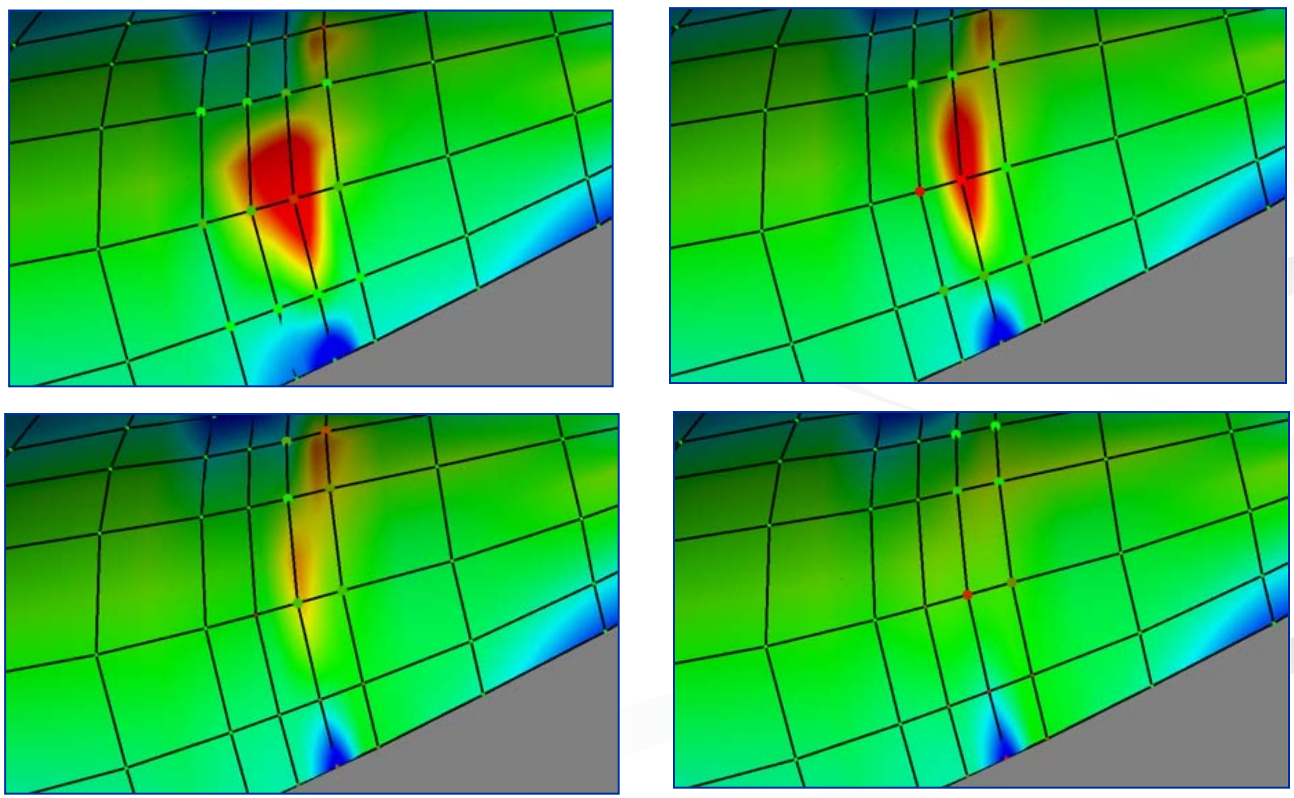




Kontrollpontok optimalizálása$_3$

Általánosítás felületekre

- a csomók által alkotott rács pontjaiban
  a simasági mérték: $|\ddot{\mathbf{r}}_{uuu}(u_0^-,v_0)-\ddot{\mathbf{r}}_{uuu}(u_0^+,v_0)|^2+|\ddot{\mathbf{r}}_{vvv}(u_0,v_0^-)-\ddot{\mathbf{r}}_{vvv}(u_0,v_0^+)|^2$
- a javítandó kontrollpontokat sorba rendezzük és optimalizáljuk



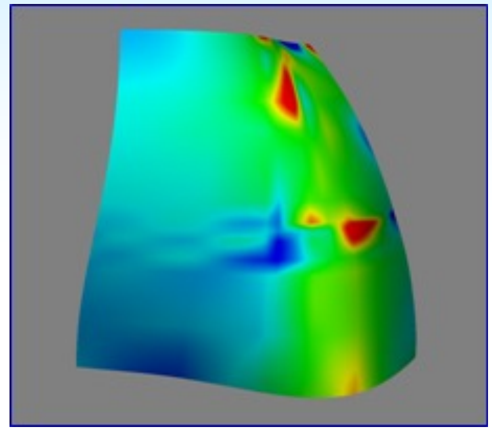
Kontrollpontok optimalizálása$_4$

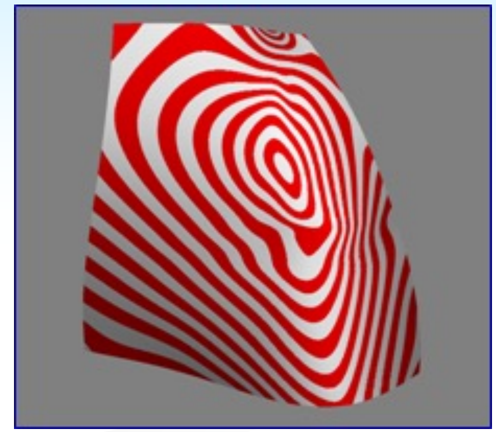
Grafikus indikátorok

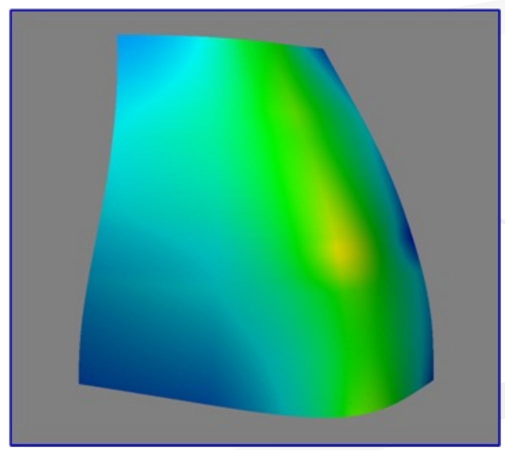
- síkmetszetek (G^1)
- átlaggörbületi térkép (G^2)
- Gauss görbületi térkép (G^2)
- fényvonalak (isophotes) (G^2)

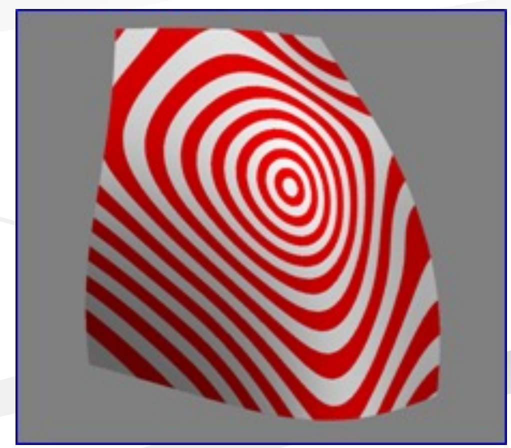
  - a fény beesési szögét mutatja a normálvektorhoz viszonyítva (diszkrétizált csíkok)

  - nagyon érzékeny felületi jellemző





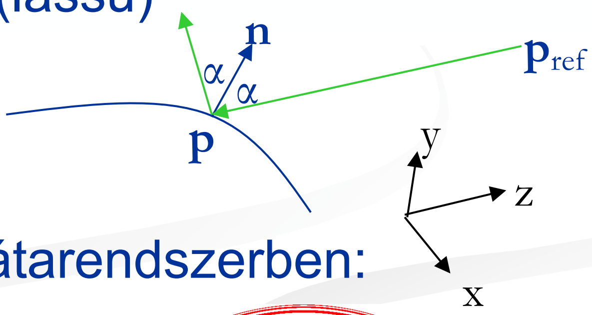




Fényvonalak számítása

opcionális

- A fény beesési szöge a normálvektorhoz képest $\alpha = \arccos \mathbf{n} \frac{\mathbf{p}_{ref} - \mathbf{p}}{\|\mathbf{p}_{ref} - \mathbf{p}\|}$
- Fényforrás (referenciapont): p_{ref}
- Megjelenítés: 5 fokos szögtartományok váltakozó színekkel
- Probléma: mozgatáskor textúra újraszámolás (lassú)
- Ötlet: OpenGL textúra-koordináta generálás
  (gömb-textúra, referenciapont = szem)



- Gömb-textúra leképzés –
  (x,y,z) a visszaverődés iránya a szem-koordinátarendszerben:

$$\left(\frac{x}{m} + \frac{1}{2}, \frac{y}{m} + \frac{1}{2}\right) \qquad m = \sqrt{x^2 + y^2 + (1+z)^2}$$

- (x,y,z) egységvektor:

$$z = 8 \cdot \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{x}{m}\right)^2 - \left(\frac{y}{m}\right)^2\right) - 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\arccos z}{2}$$

- A szögnek megfelelően kiszínezzük a textúrát