3D számítógépes geometria és alakzatrekonstrukció

18. Szabadformájú felületek illesztése

http://cg.iit.bme.hu/portal/node/312
https://www.vik.bme.hu/kepzes/targyak/VIIIMA01

Dr. Várady Tamás, Dr. Salvi Péter
BME, Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Irányítástechnika és Informatika Tanszék

Tartalom

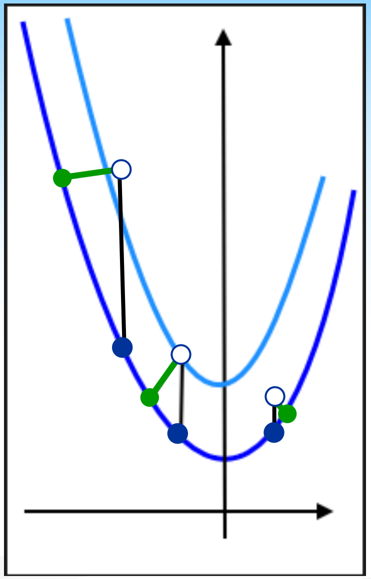
- B-spline görbe approximáció
  - legkisebb négyzetes minimalizálás
  - ismeretlen felület, ismeretlen parametrizáció
  - iteratív eljárás, paraméter korrekció
- B-spline felület approximáció
  - általánosítás
  - paraméter korrekció
- Felületek parametrizálása
- Gyenge kontrollpontok

Approximáció görbékkel$_1$

Legkisebb négyzetes (lsq) távolság minimalizás:

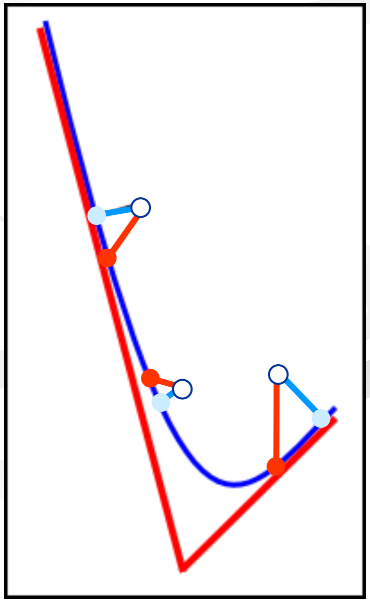
$$\{\mathbf{P}_i = (x_i, y_i)\}, i = 0,\ldots,M; \rightarrow \min \sum d_i^2$$

- függvény: $y = f(x); \min \sum (f(x_i) - y_i)^2$
- implicit (algebrai): $F(x,y) = 0; \min \sum F(x_i, y_i)^2$
- parametrikus: $\mathbf{r}(t); \{t_i\}, i = 0,\ldots,M; \min \sum (\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{P_i})^2$
- euklideszi: $\mathbf{r}(t); \min \sum (\mathbf{r}(\tau_i) - \mathbf{P_i})^2$



Kiindulás – valamilyen görbereprezentáció, ismeretlen görbeparaméterek

- $y = f(x) = ax^2 + bx + c; \Rightarrow \{a,b,c\}$
- $F(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0; \Rightarrow \{a,b,c,d,e,f\}$
- $\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^{2} \mathbf{c}_i B_i^2(t); \Rightarrow \{\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$
- $\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^{2} \mathbf{c}_i B_i^2(t); \Rightarrow \{\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, [\{\tau_\mathrm{i}\}, 0 = 1,\ldots,M]\}$



Approximáció B-spline görbékkel$_2$

Parametrikus minimalizálás B-spline-okkal

- ismeretlen görbe: $\mathbf{r}(t):\{\mathbf{c}_0,\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\ldots,\mathbf{c}_n\}$
- ismeretlen kontrollpontok, azok száma (n) és a csomóvektor
- ismeretlen az adatpontok parametrizációja, azaz a talp-pontok poziciója az ismeretlen görbén:

$$\{\mathbf{P}_i\},\ \{t_i=?\},\ i=0,\ldots,M;$$

Iteratív megoldás

1. kezdeti értékek ($k=0$):
   - kontrollpont szám és csomóvektor, pontok parametrizálása
2. Lsq illesztés (lineáris egyenletrendszer) $\mathbf{r}^{(k)}(t):\{\mathbf{c}_0,\mathbf{c}_1,\ldots,\mathbf{c}_{n_k}\}$
3. hibakiértéklés, ha $|\mathbf{r}^{(k)}(t_i)-\mathbf{P_i}|\le\varepsilon,\ i=0,\ldots,M;\ \Rightarrow$ STOP
4. újraparametrizálás és/vagy szabadságfokok növelése,
   - csomók beszúrása – egyenletes vagy legnagyobb eltérés szerint
   - $k{+}{+},\ \Rightarrow$ 2.

Approximáció B-spline görbékkel$_3$

Lineáris egyenletrendszer

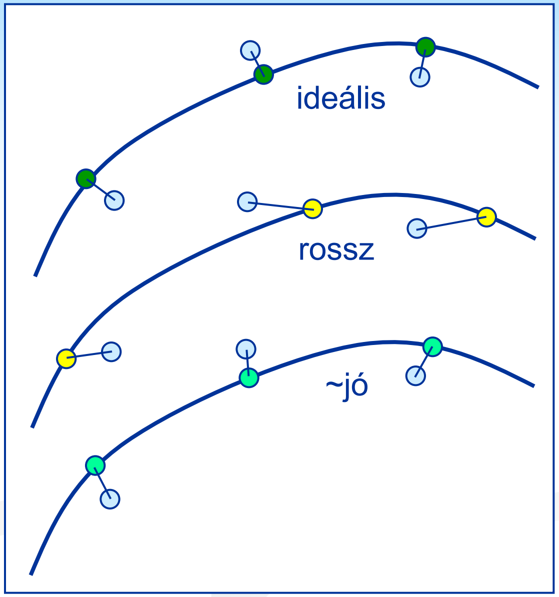
adott: $\{\mathbf{P}_i, t_i\},\ i = 0,\dots,M;$

- $n+1$ ismeretlen: $\{\mathbf{c}_j\},\ j = 0,\dots,n;$
- $M >> n$ egyenlet: $d_i = |\mathbf{P}_i - \sum_{j=0}^{n} \mathbf{c}_j N_j(t_i)|;$

$$f(\mathbf{c}_0,\dots,\mathbf{c}_n) = \sum_{i=0}^{M} (\mathbf{P}_i - \mathbf{r}(t_i))^2 = \sum_{i=0}^{M} (\mathbf{P}_i - \sum_{j=0}^{n} \mathbf{c}_j N_j(t_i))^2$$

$$\min f \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}_k} = \left(\frac{\partial f}{\partial cx_k}, \frac{\partial f}{\partial cy_k}, \frac{\partial f}{\partial cz_k} \right) = \mathbf{0},$$

$$\sum_{i=0}^{M} \left[(\mathbf{P}_i - \sum_{j=0}^{n} \mathbf{c}_j N_j(t_i)) \right] N_k(t_i) = \mathbf{0},\ k = 0,\dots,n;$$



Mátrix alakban:

$$\min\ ([\mathbf{N}][\mathbf{c}] - [\mathbf{P}])^2 \Rightarrow [\mathbf{N}]^T([\mathbf{N}][\mathbf{c}] - [\mathbf{P}]) = 0,$$

$$[\mathbf{N}]^T[\mathbf{N}][\mathbf{c}] = [\mathbf{N}]^T[\mathbf{P}], \quad [\mathbf{M}] = [\mathbf{N}]^T[\mathbf{N}];$$

$$[\mathbf{b}] = [\mathbf{N}]^T[\mathbf{P}]; \Rightarrow [\mathbf{M}][\mathbf{c}] = [\mathbf{b}],$$

$$\Rightarrow [\mathbf{c}] = [\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{b}]$$

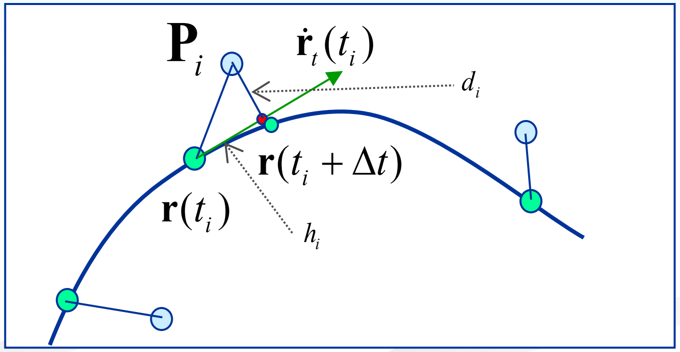
$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_0(t_0) & \dots & N_n(t_0) \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ N_0(t_M) & \dots & N_n(t_M) \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{c}] = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_n \end{bmatrix}$$

Approximáció B-spline görbékkel$_4$

Hibabecslés - adott: $\mathbf{r}(t_i), \dot{\mathbf{r}}_t(t_i)$, ismeretlen: Δt

$$\mathbf{r}(t_i+\Delta t) \cong \mathbf{r}(t_i)+\dot{\mathbf{r}}_t(t_i)\Delta t; \quad |\mathbf{r}(t_i+\Delta t)-\mathbf{r}(t_i)| \cong \boxed{|\dot{\mathbf{r}}_t(t_i)|\Delta t = h_i = \left(\mathbf{P}_i - \mathbf{r}(t_i), \frac{\dot{\mathbf{r}}_t(t_i)}{|\dot{\mathbf{r}}_t(t_i)|}\right);}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \ldots \Rightarrow \quad \boxed{d_i \cong |\mathbf{P}_i - \mathbf{r}(t_i+\Delta t)|}$$

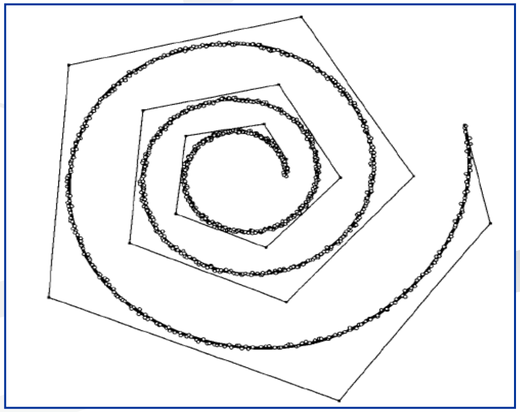


Hibabecslés: $d_i \le \varepsilon$?

Paraméterkorrekció: $t_i^{k+1} = t_i^k + \Delta t_i, i = 0,\ldots,n$

Új iteráció – új csomók beszúrása

(i) a legnagyobb eltéréseknél,
(ii) egyenletesen, intervallum felezéssel $n \rightarrow 2n$



Általános problémák:

- induló konfiguráció (?), kezdeti paraméterezés (?)
- szűk tolerancia – sok szegmens, a zajt közelítjük, hullámzik
- laza tolerancia – kevés szegmens, rossz közelítés, de sima

Ujjgyakorlat* - paraméterkorrekció

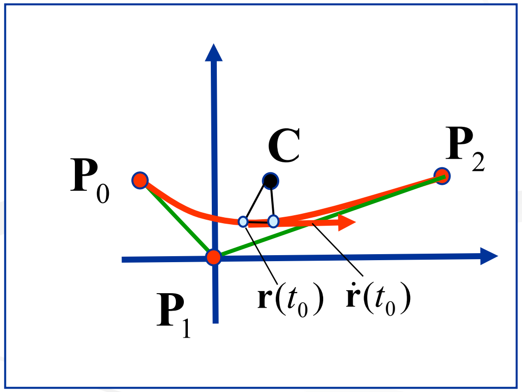
Adott egy görbe $\mathbf{r}(t)$ és egy pont $\mathbf{C}$, határozzuk meg a legközelebbi görbepontot és annak közelítő paraméterértékét!

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{P}_0(1-t)^2 + \mathbf{P}_1 2(1-t)t + \mathbf{P}_2 t^2,\ t \in [0,1]$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = 2(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)(1-t) + 2(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)t$$

$$\mathbf{P}_0 : (-1,1),\ \mathbf{P}_1 : (0,0),\ \mathbf{P}_2 : (3,1)$$

$$\mathbf{C} : (1,1), \quad t_0 = 0.5$$



Kiszámítandó:

$$\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) = (?,?)$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = (?,?)$$

$$h = \frac{(\mathbf{C} - \mathbf{r}(t_0), \dot{\mathbf{r}}(t_0))}{|\dot{\mathbf{r}}(t_0)|} = \frac{((?,?),(?,?))}{?} = ?$$

$$\Delta t = \frac{h}{|\dot{\mathbf{r}}(t_0)|} = ?; \quad t_1 = t_0 + \Delta t = ?$$

Ujjgyakorlat - paraméterkorrekció

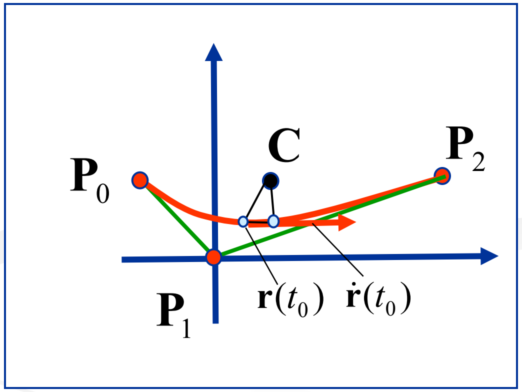
Adott egy görbe $\mathbf{r}(t)$ és egy pont $\mathbf{C}$, határozzuk meg a legközelebbi görbepontot és annak közelítő paraméterértékét!

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{P}_0(1-t)^2 + \mathbf{P}_1 2(1-t)t + \mathbf{P}_2 t^2,\ t \in [0,1]$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = 2(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)(1-t) + 2(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)t$$

$$\mathbf{P}_0 : (-1,1),\ \mathbf{P}_1 : (0,0),\ \mathbf{P}_2 : (3,1)$$

$$\mathbf{C} : (1,1), \quad t_0 = 0.5$$



Kiszámítandó:

$$\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) = (0.5, 0.5)$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = (4,0)$$

$$h = \frac{(\mathbf{C} - \mathbf{r}(t_0), \dot{\mathbf{r}}(t_0))}{|\dot{\mathbf{r}}(t_0)|} = \frac{((0.5,0.5),(4,0))}{4} = 0.5$$

$$\Delta t = \frac{h}{|\dot{\mathbf{r}}(t_0)|} = 1/8; \quad t_1 = t_0 + \Delta t = 5/8$$

Approximáció B-spline felületekkel$_1$

Lineáris egyenletrendszer (megegyezik a görbe illesztési módszerrel)

- adott pontok: $\{\mathbf{P}_i, u_i, v_i\}, i = 0,\ldots,M;$
- $n+1$ x $m+1$ ismeretlen kontrollpont: $\{\mathbf{c}_{kl}\}, k = 0,\ldots,n; l = 0,\ldots,m; \quad \to \{\mathbf{c}_j\}, j = 0,\ldots,N;$
- $M >> N$ egyenlet $\Rightarrow$ formailag ugyanaz a probléma, mint a görbéknél:

$$d_i = |\mathbf{P}_i - \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} \mathbf{c}_{kl} N_k(u_i)\, N_l(v_i)| = |\mathbf{P}_i - \sum_{j=0}^{N} \mathbf{c}_j \overline{N}_j(u_i, v_i)|;$$

$$j = k(m+1) + l, \mathbf{c}_j = \mathbf{c}_{kl}, \overline{N}_j(u_i, v_i) = N_k(u_i) N_l(v_i);\ j = 0,\ldots, N$$

- négyzetes távolság függvény:

$$F_{lsq}(\mathbf{c}_0,\ldots,\mathbf{c}_N) = \sum_{i=0}^{M} |\mathbf{P}_i - \mathbf{s}(u_i, v_i)|^2 = \sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{N} |\mathbf{P}_i - \mathbf{c}_j \overline{N}_j(u_i, v_i)|^2 = \|\mathbf{Nc} - \mathbf{P}\|^2$$

- minimalizálás:

$$\frac{\partial F_{lsq}}{\partial \mathbf{c}_k}(\mathbf{c}) = 2\sum_{i=0}^{M}\left(\sum_{j=0}^{N} \mathbf{P}_i - \mathbf{c}_j \overline{N}_j(u_i, v_i)\right) \overline{N}_k(u_i, v_i), \quad k = 0, 1,\ldots, N$$

$$\min\,([\mathbf{N}][\mathbf{c}] - [\mathbf{P}])^2 \Rightarrow [\mathbf{N}]^T[\mathbf{N}][\mathbf{c}] = [\mathbf{N}]^T[\mathbf{P}], \quad [\mathbf{M}][\mathbf{c}] = [\mathbf{b}] \Rightarrow \quad [\mathbf{c}] = [\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{b}]$$

Approximáció B-spline felületekkel$_2$

Hibabecslés:

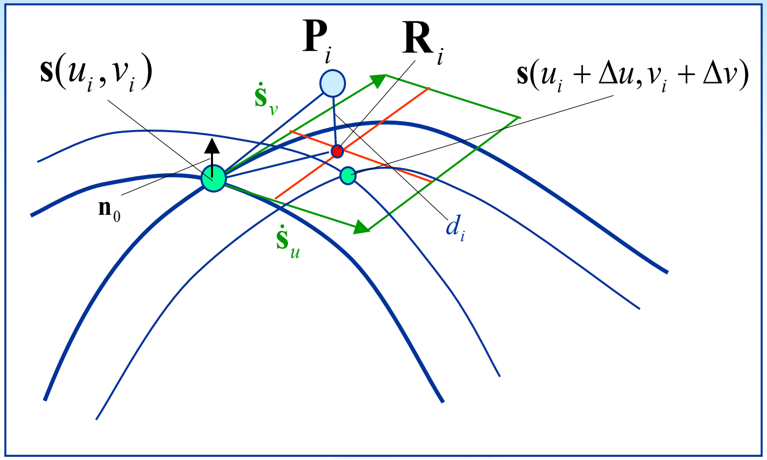
$$\mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{s}_u \times \mathbf{s}_v}{|\mathbf{s}_u \times \mathbf{s}_v|},\ d_i \cong |\mathbf{P}_i - \mathbf{s}(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v)|$$

$$\boxed{d_i = |\mathbf{P}_i - \mathbf{s}(u_i, v_i)|\,|\mathbf{n}_0|\cos\varphi = (\mathbf{P}_i - \mathbf{s}(u_i, v_i), \mathbf{n}_0)}$$

$$d_i \le \varepsilon$$

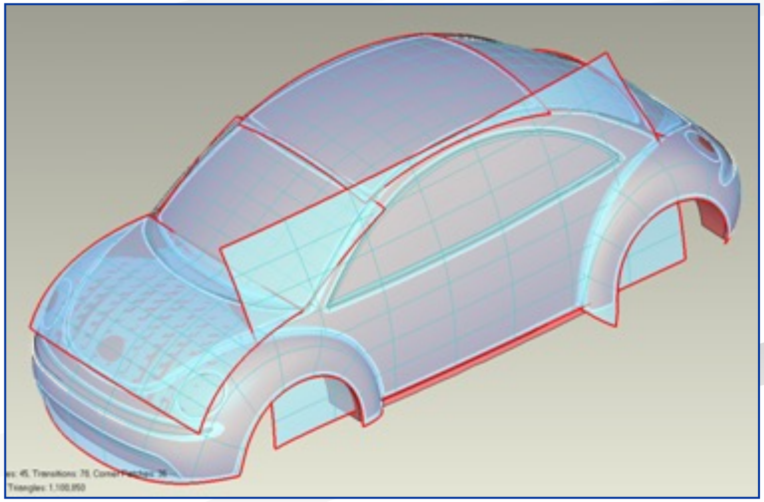
$$\mathbf{R}_i = \mathbf{P}_i - d_i \mathbf{n}_0 \cong \mathbf{s}(u_i, v_i) + \Delta u \dot{\mathbf{s}}_u + \Delta v \dot{\mathbf{s}}_v,$$

$$\Rightarrow (\Delta u, \Delta v)$$



Paraméterkorrekció:

$$\boxed{(u_i, v_i)^{k+1} = (u_i, v_i)^k + (\Delta u_i, \Delta v_i),\ i = 0, \ldots, M}$$



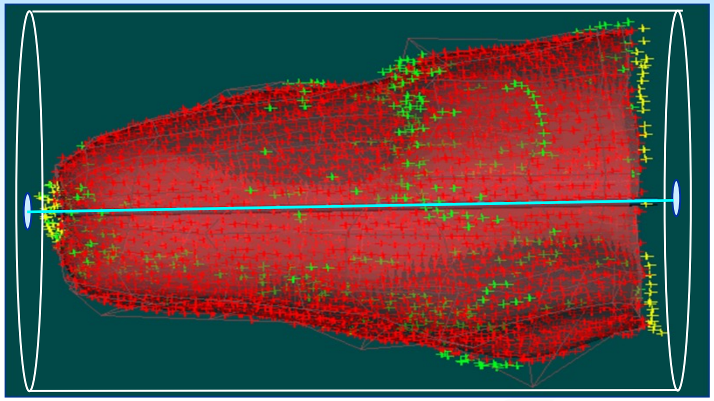
Általános problémák:

- kezdeti paraméterezés – n-oldalú szabálytalan ponttartományra
- nagyon sok lehetőség van – jelentősen befolyásolja a felületminőséget

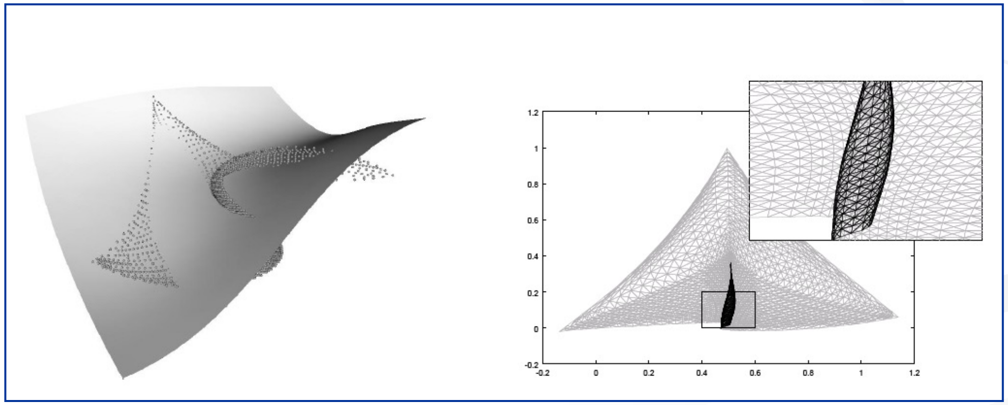
Felületek paraméterezése$_1$

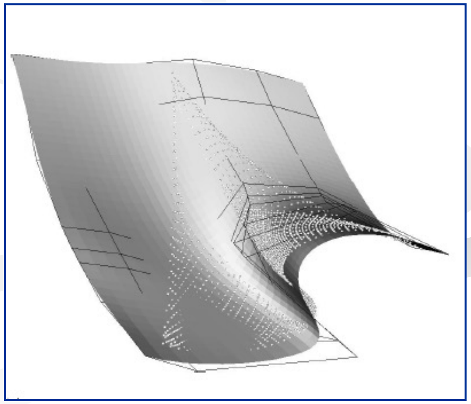
$$|\mathbf{P}_i - S(u_i, v_i)|^2$$

Alapkövetelmény: a jó illesztés feltétele



- legegyszerűbb - projekció az LSQ síkra
- referencia felület - tág toleranciával
  közelítő felület, amely paraméterezhető
  - (i) hengerfelület
  - (ii) alacsony fokszámú Bézier felület
- érvényes parametrizáció: leképzett háromszögek
  nem torzulnak és nem fordulnak át



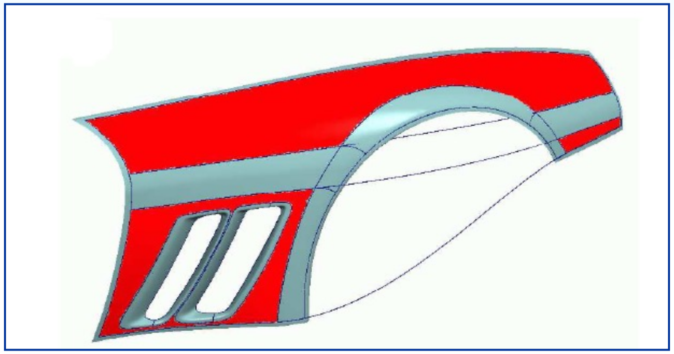


Felületek paraméterezése$_2$

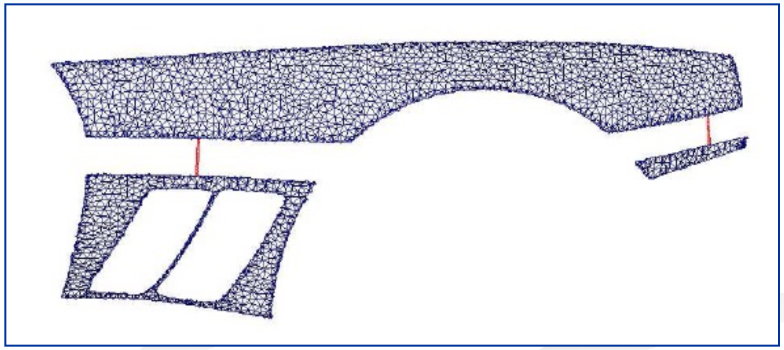
$|\mathbf{P}_i - S(u_i, v_i)|^2$

Legáltalánosabb megoldás

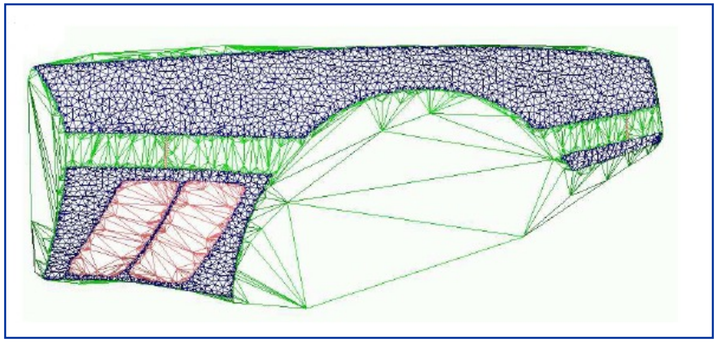
- síkbaterítés (flattening vagy mesh-parametrization)



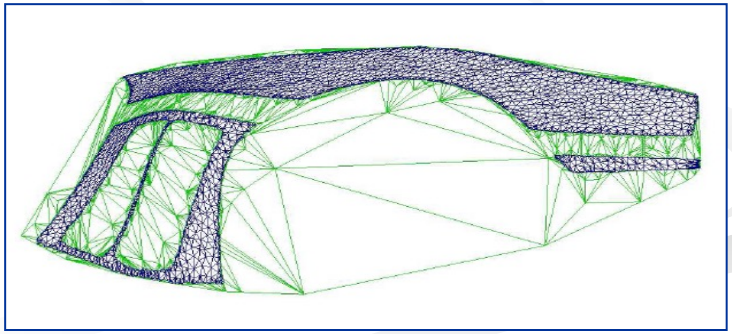
3D modell



Háromszögháló



Lyukak és konkáv részek kitöltése

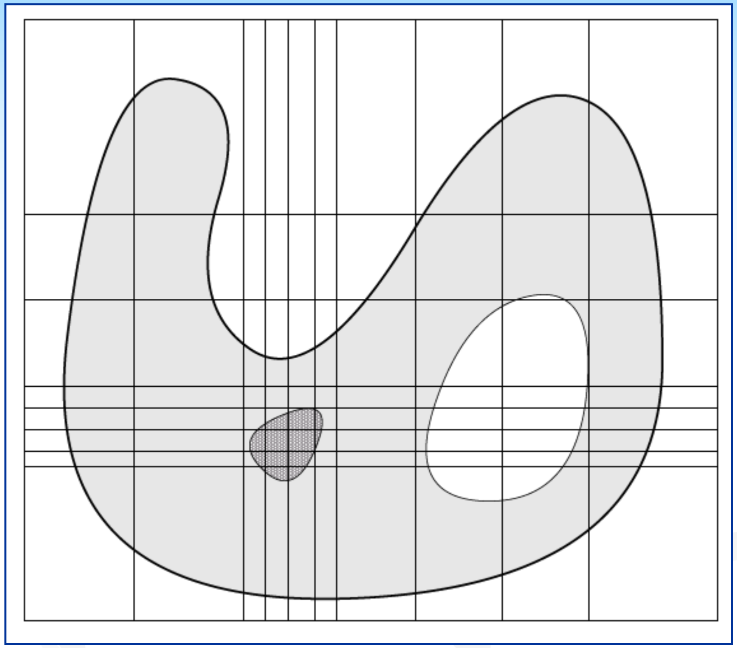


2D parametrizáció

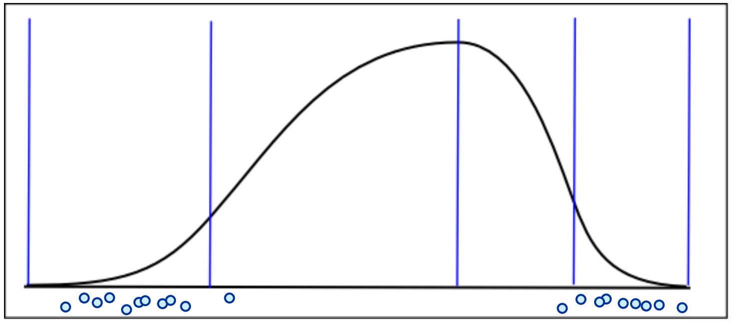
Gyenge kontrollpontok$_1$

Vágott tartományok illesztése

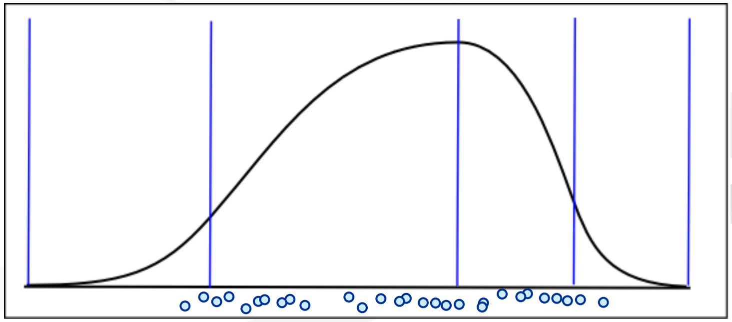
- lyukak, konkáv részek
- különböző részletgazdaság
- egyenlőtlen csomóeloszlás



- gyenge kontroll pont - a bázisfüggvény csak nagyon kis súlyokat hoz be a minimalizálási egyenletbe
- ezen pontok pozíciója kis mértékben meghatározott → nem kívánatos hullámzás



Gyenge kontrollpont



Erős kontrollpont

Gyenge kontrollpontok$_2$

Megoldás: gyenge kontrollpontok kényszerezése

- kontrollpontok lekötése
- simító függvények alkalmazása