

3D számítógépes geometria és alakzatrekonstrukció

8. Rekurzív felosztáson alapuló felületek

<http://cg.iit.bme.hu/portal/node/312>

<https://www.vik.bme.hu/kepzes/targyak/VIIIMA01>

Dr. Várady Tamás, Dr. Salvi Péter
BME, Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Irányítástechnika és Informatika Tanszék



Tartalom

- Áttekintés
- Poligonok rekurzív felosztása (subdivision)
 - saroklevágó algoritmusok
 - interpoláló algoritmus
- Poliéderek rekurzív felosztása
 - követelmények
 - alapkérdések
 - 1. Doo-Sabin algoritmus, 2. Catmull-Clark algoritmus, 3. Középosztás, 4. Loop-féle osztás, 5. $\sqrt{3}$ osztás

Szabadformájú felületek - áttekintés

1. Tenzor szorzat alapú felületek

- négyoldalú ($n = 4$) paramétertartomány, $N \times M$ -es kontrol háló
- **Bézier felületek** (polinomiális)
- **B-spline felületek** (szakaszonként polinomiális)

$$\mathbf{s}(u, v) = [\boldsymbol{\alpha}(u)][\mathbf{C}][\boldsymbol{\beta}(v)]^T$$

2. Bézier és B-spline felületek kiterjesztése

- racionális Bézier felületek ($n = 4$)
- racionális B-spline felületek ($n = 4$)
- **T-spline-ok** ($n = 4$, szakaszos polinomok, hiányos kontrollháló)

3. Interpoláló (transzfinit) felületek

- határgörbék és keresztderivált függvények
- **Coons patch** ($n = 4$)
- **általános n -oldalú felületek**

4. Poliéder-alapú általános topológiájú felületek

- **felosztásos felületek** (rekurzív szubdivízió)
- (összeillesztett spline felületek)



Subdivision video

Rekurzív poligon-felosztás₁

Rekurzív poligon-felosztás

$$\{\mathbf{p}_1^i, \mathbf{p}_2^i, \dots, \mathbf{p}_{k_i}^i\} \Rightarrow \{\mathbf{p}_1^{i+1}, \mathbf{p}_2^{i+1}, \dots, \mathbf{p}_{k_{i+1}}^{i+1}\}$$

- korábbi poligon pontok lineáris kombinációja:

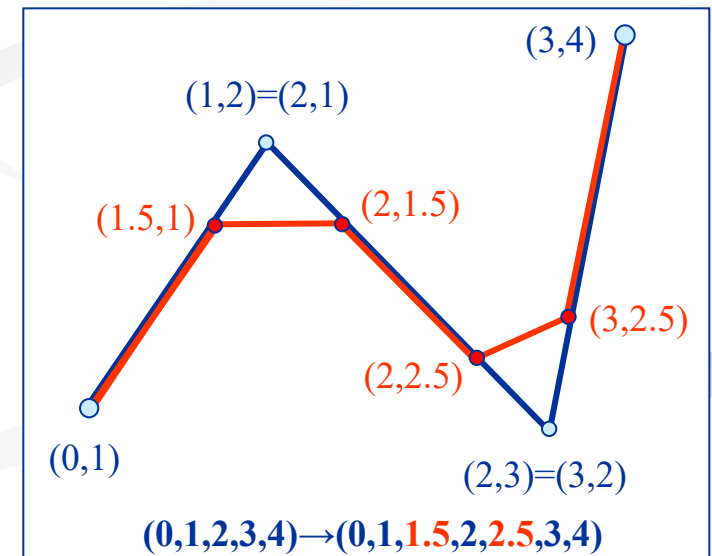
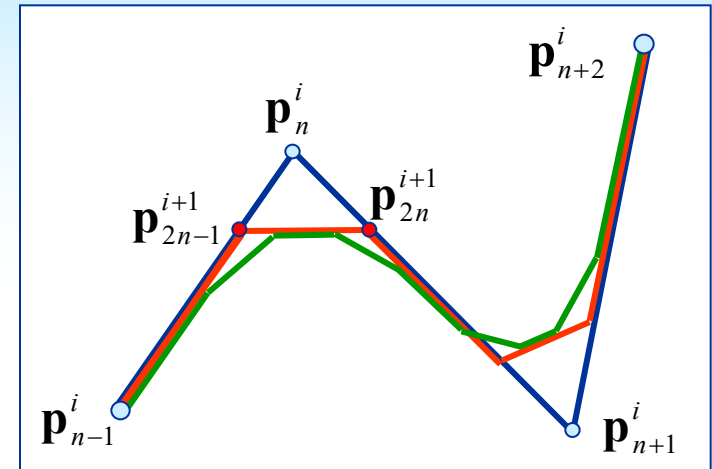
$$\mathbf{p}_m^{i+1} = \sum_{j=1}^l \alpha_j \mathbf{p}_{j(m)}^i, \quad m = 1, \dots, k_{i+1}$$

- kérdések:
 - konvergál valamilyen görbéhez ?
 - polinomiális görbe ?
 - milyen mértékben sima ?

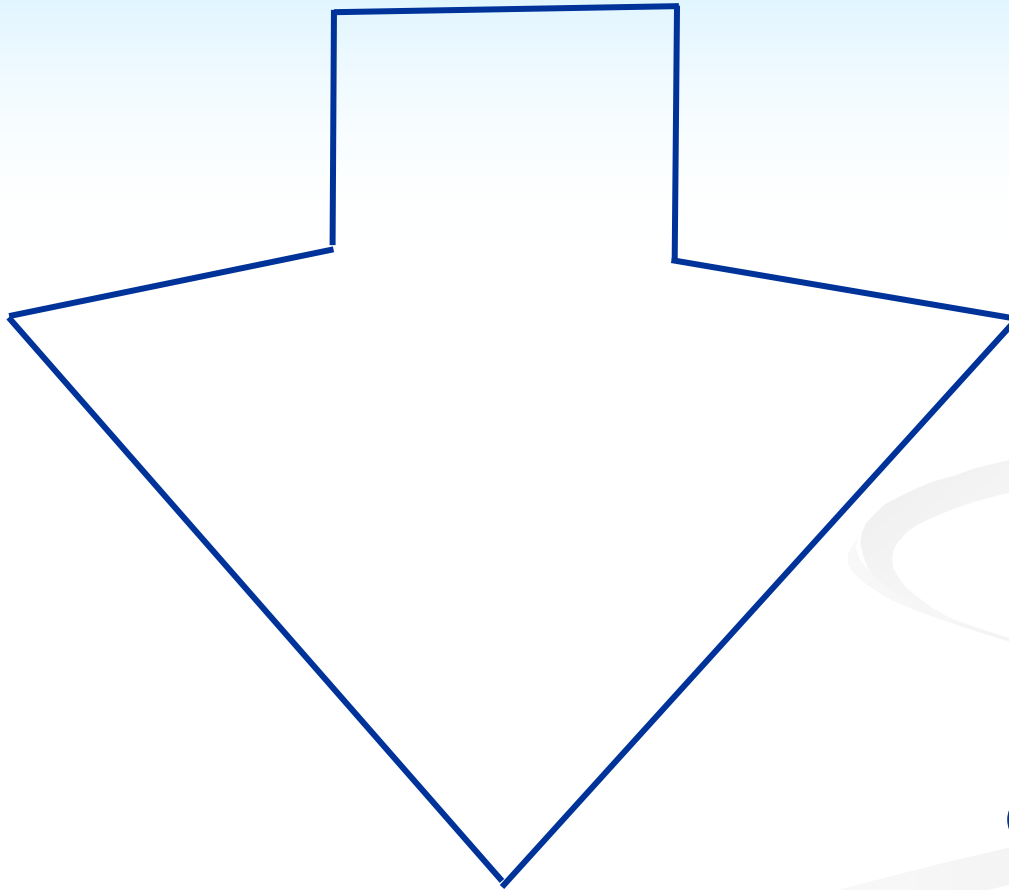
1. Chaikin algoritmus (sarkok levágás):

$$\mathbf{p}_{2n-1}^{i+1} = \frac{3}{4} \mathbf{p}_n^i + \frac{1}{4} \mathbf{p}_{n-1}^i; \quad \mathbf{p}_{2n}^{i+1} = \frac{3}{4} \mathbf{p}_n^i + \frac{1}{4} \mathbf{p}_{n+1}^i.$$

- \Rightarrow másodfokú B-spline (!), C^1

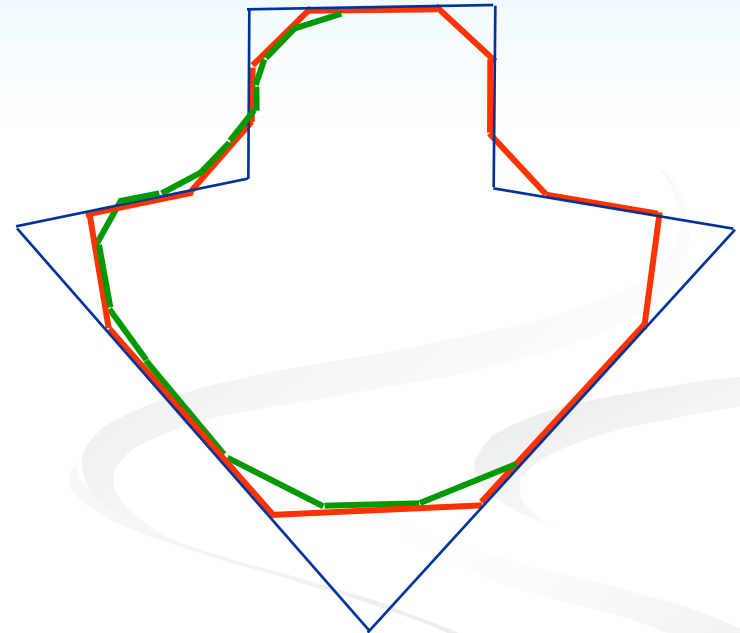
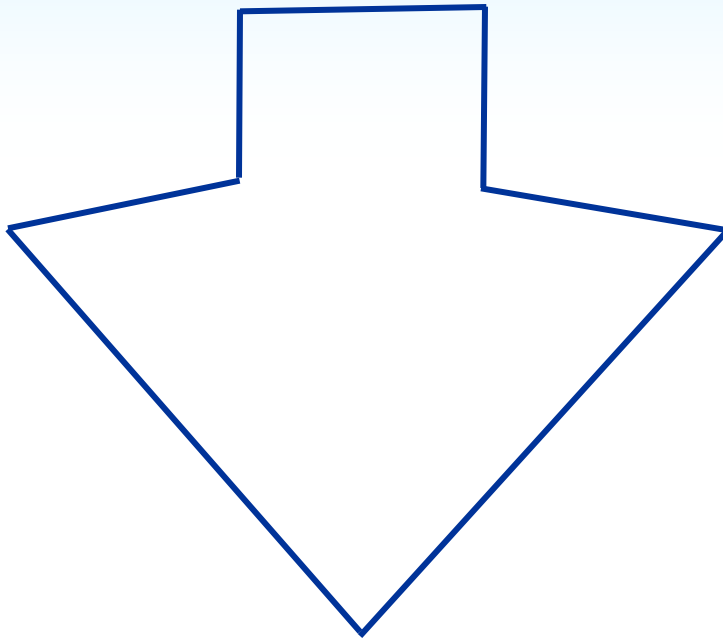


Ujjgyakorlat*- rekurzív poligon osztás



Chaikin-féle osztás

Ujjgyakorlat - rekurzív poligon osztás



Chaikin-féle osztás

Rekurzív poligon-felosztás₂

2. Felosztás alternatív súlyokkal (húrfelezés)

$$\mathbf{p}_{2n}^{i+1} = \frac{1}{8}\mathbf{p}_{n-1}^i + \frac{3}{4}\mathbf{p}_n^i + \frac{1}{8}\mathbf{p}_{n+1}^i; \quad \mathbf{p}_{2n+1}^{i+1} = \frac{1}{2}\mathbf{p}_n^i + \frac{1}{2}\mathbf{p}_{n+1}^i.$$

- \Rightarrow konvergál, harmadfokú B-spline, C^2
- a folytonossági analízis elve (sajátértékek):

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{n-1} \\ \mathbf{p}_n \\ \mathbf{p}_{n+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{n-1}^1 \\ \mathbf{p}_n^1 \\ \mathbf{p}_{n+1}^1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{D} = \mathbf{A}\mathbf{D}$$

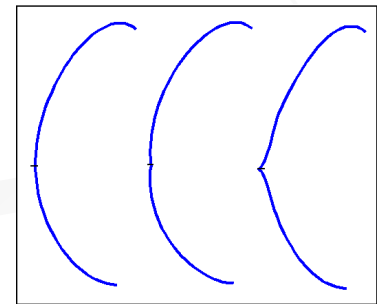
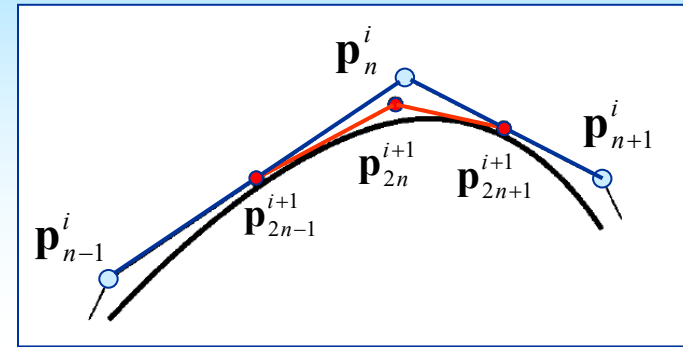
- diagonalizálás (sajátvektorok, sajátértékek):

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}^{-1}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}^\infty = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^2 = \mathbf{A}^1\mathbf{D}^1 = \mathbf{A}^2\mathbf{D}, \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{E}^{-1}$$

$$\mathbf{D}^R = \mathbf{A}^R\mathbf{D} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}^R\mathbf{E}^{-1} \Rightarrow \mathbf{A}^\infty$$



Rekurzív poligon-felosztás₃

3. Interpoláló felosztás (négy-pont):

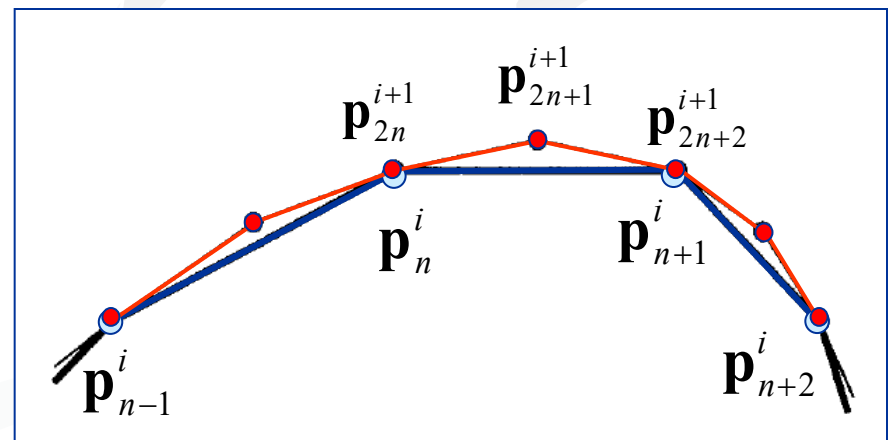


Curves applet

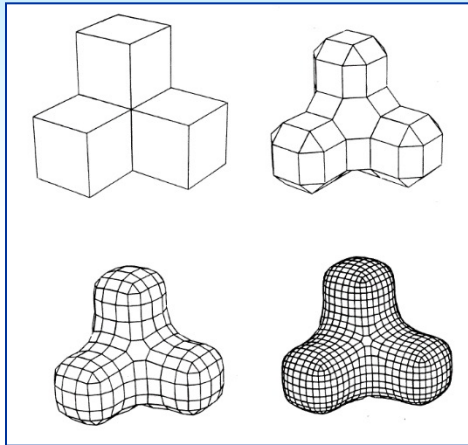
- középső pont meghatározása:
harmadfokú Lagrange interpoláció

$$\mathbf{p}_{2n}^{i+1} = \mathbf{p}_n^i; \quad \mathbf{p}_{2n+1}^{i+1} = \frac{1}{16}(-\mathbf{p}_{n-1}^i + 9\mathbf{p}_n^i + 9\mathbf{p}_{n+1}^i - \mathbf{p}_{n+2}^i)$$

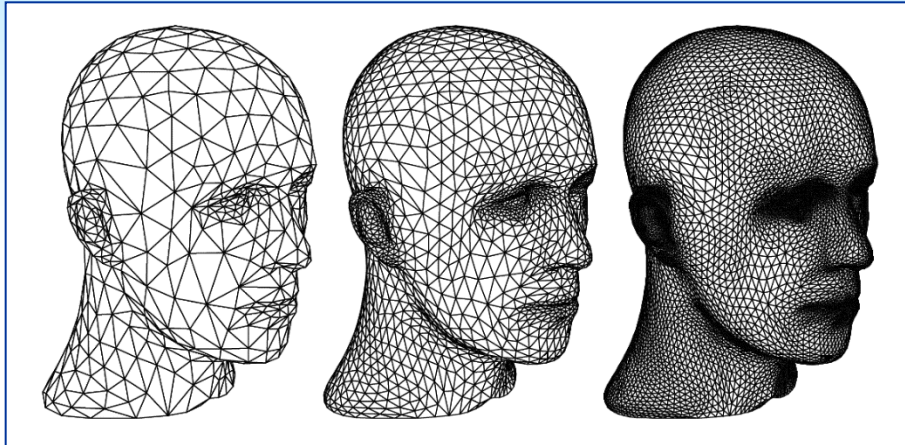
- \Rightarrow konvergál, C^1 határgörbe



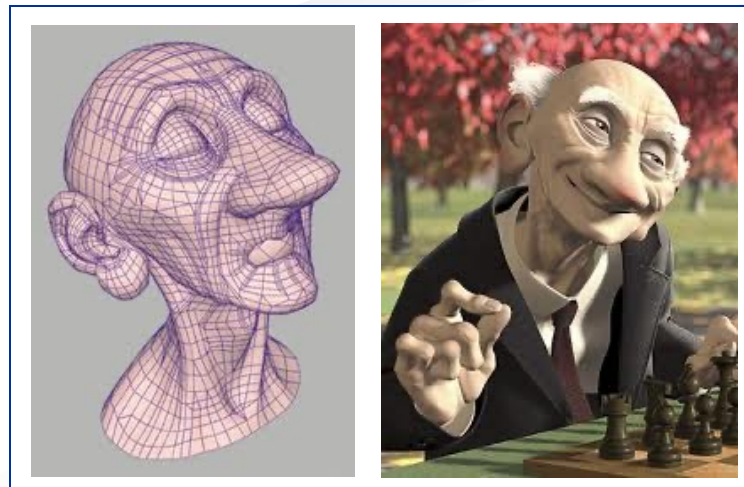
Rekurzív poliéder-felosztás₁



(Doo-Sabin)



(Loop)

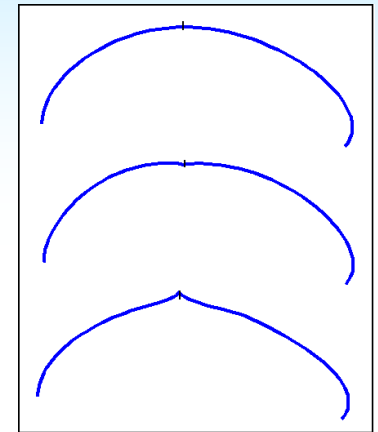


(Pixar)

Rekurzív poliéder-felosztás₂

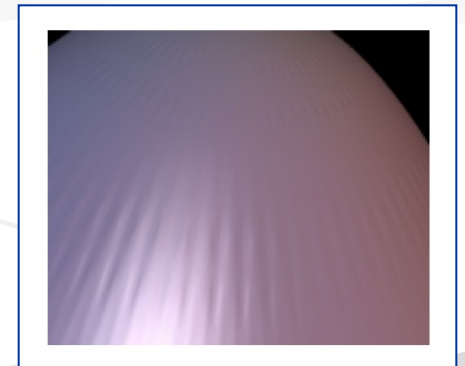
Követelmények:

- általános topológia
- lokális módosíthatóság
- egyszerű szabályok (maszk)
- hatékony algoritmus (konverzió sebessége)
- affin leképzésre invariáns
- sima felület
- hierarchikus reprezentáció
- konvex burok



Alapkérdések:

- finomítási szabály: sarok-levágás vagy csúcs-beszúrás
- a polidérsorozat „háromszög” vagy „négyzög” alapú
- approximáció vagy interpoláció
- simaság (G^1 vagy G^2)
- szabályos csúcsok vs. különleges (extraordinary) csúcsok



Felosztás problémák

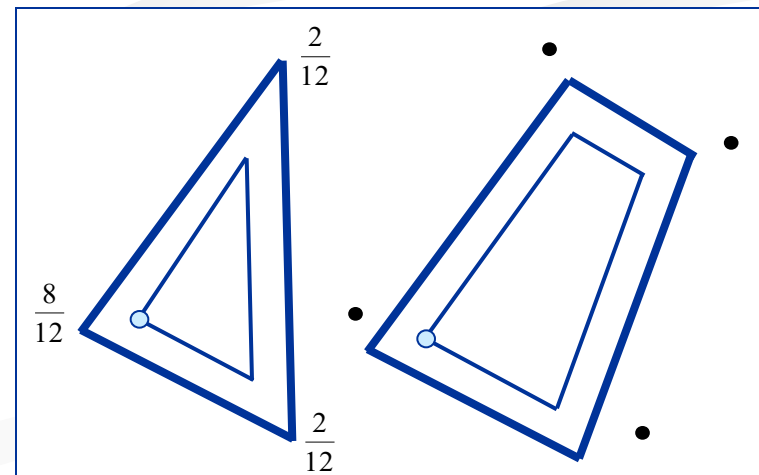
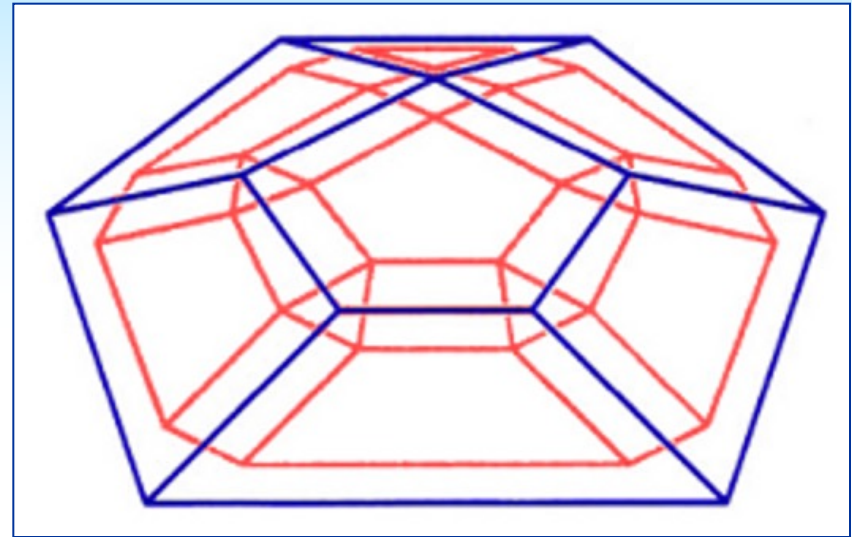
Rekurzív poliéder-felosztás₃

1. Doo-Sabin felületek

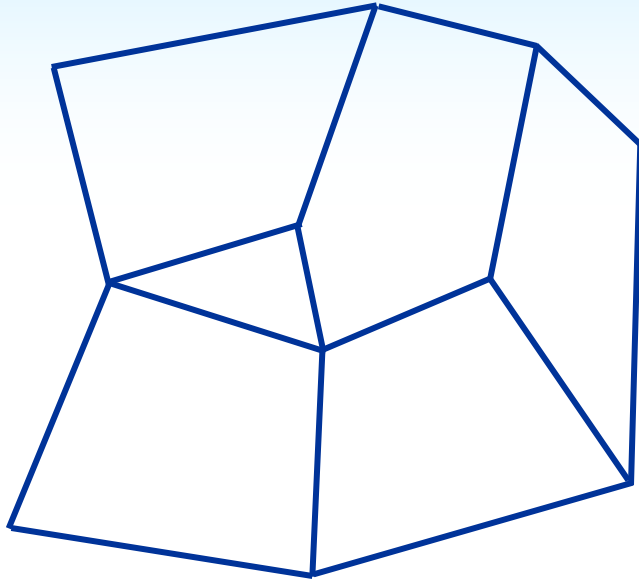
- a Chaikin algoritmus általánosítása
- minden n -oldalú lap **összezsugorodik**, és n új csúcs keletkezik rajta:

$$\mathbf{v}_i^{(1)} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \mathbf{v}_j$$
$$\alpha_{ii} = \frac{n+5}{4n}, \quad \alpha_{ij} = \frac{3 + 2 \cos \frac{2\pi(i-j)}{n}}{4n}$$

- LAP-lap – az eredeti lap belsejében
- ÉL-lap – mindig négyoldalú, az élek mentén
- CSÚCS-lap – csúcs körül
- a négyoldalú lapok száma nő \Rightarrow másodfokú B-spline felület darabok $\Rightarrow G^1$
- szabályos csúcsok ($n=4$)
- különleges csúcsok is keletkeznek:
 - $n \neq 4$ oldalú lapok, $n \neq 4$ fokú csúcsok



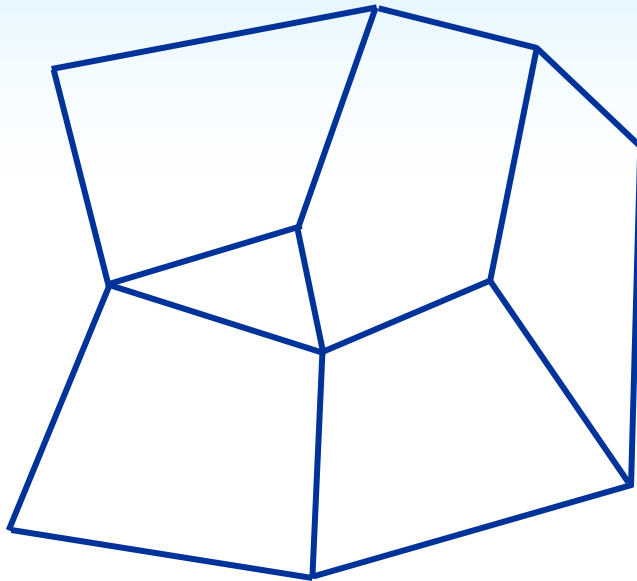
Ujjgyakorlat* - Doo-Sabin-féle rekurzív felosztás



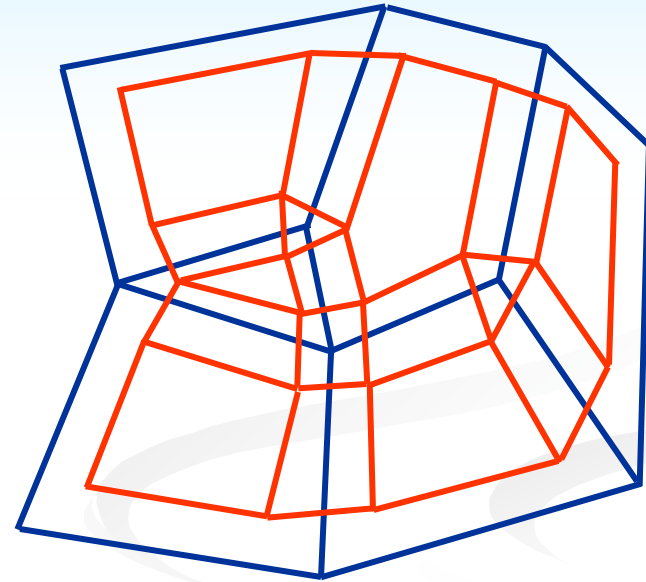
3-oldalú: 1 db
4-oldalú: 4 db
5-oldalú: 1 db

3-oldalú: Cs: ?, É: , L:?, Össz. = ?
4-oldalú: Cs: ?, É: , L:?, Össz. = ?
5-oldalú: Cs: ?, É: , L:?, Össz. = ?

Ujjgyakorlat - Doo-Sabin-féle rekurzív felosztás



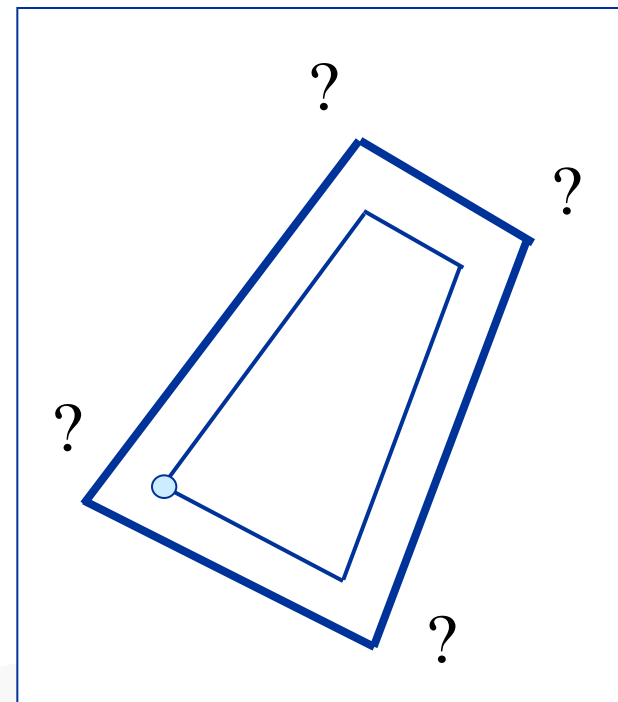
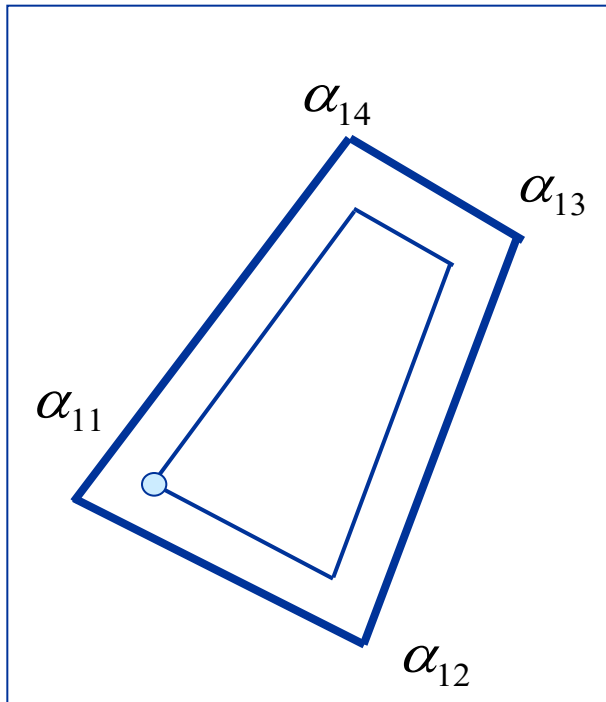
3-oldalú: 1 db
4-oldalú: 4 db
5-oldalú: 1 db



3-oldalú: Cs: 2, É: 0, L:1, Össz. = 3
4-oldalú: Cs: 1, É: 8, L:4, Össz. = 13
5-oldalú: Cs: 0, É: 0, L:1, Össz. = 1

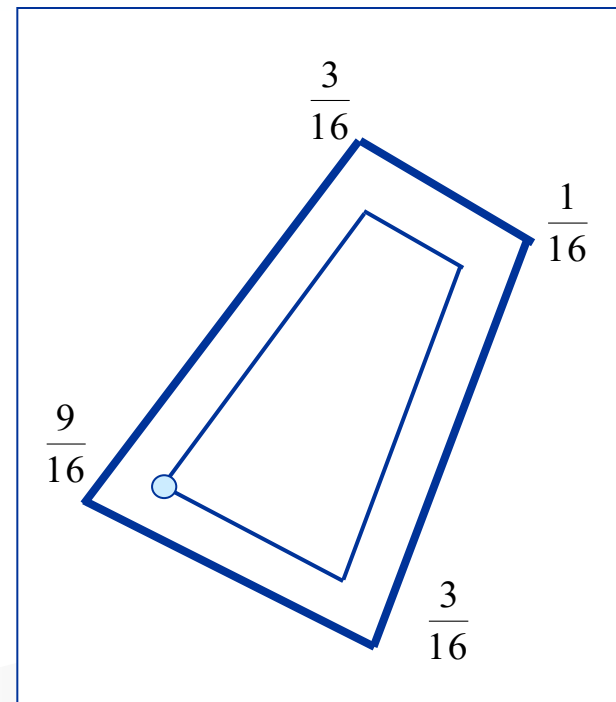
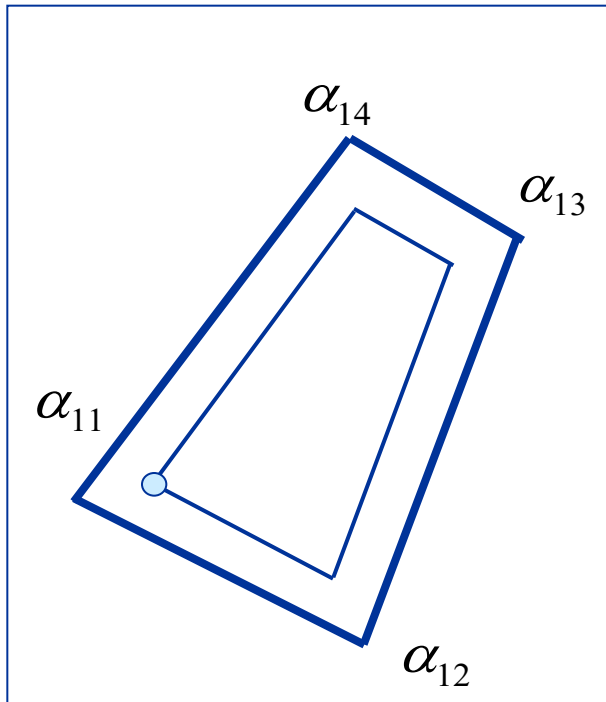
Ujjgyakorlat* - Doo-Sabin súlyok

$$n = 4, i = 1, \alpha_{11} = \frac{n+5}{4n}, \quad \alpha_{1j} = \frac{3 + 2 \cos \frac{2\pi(i-j)}{n}}{4n}, \quad j = 2, 3, 4$$



Ujjgyakorlat - Doo-Sabin súlyok

$$n=4, i=1, \alpha_{11} = \frac{n+5}{4n}, \quad \alpha_{1j} = \frac{3+2\cos\frac{2\pi(i-j)}{n}}{4n}, \quad j=2,3,4$$



Rekurzív poliéder-felosztás₄

2. Catmull-Clark felületek

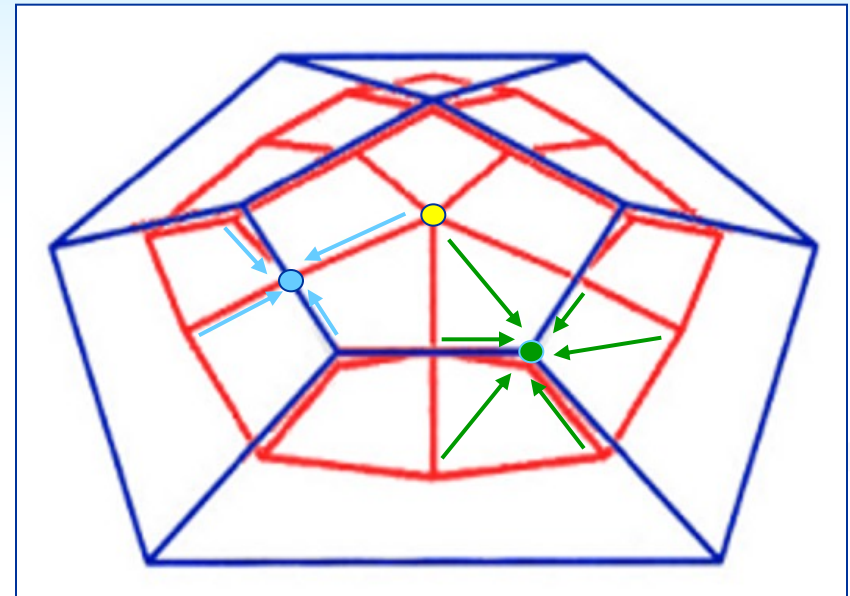
- harmadfokú B-spline felületek általánosítása (középponti osztás - central split)
- (i) új LAP-csúcs – középpont, \mathbf{f}_j^{i+1}
- (ii) új ÉL-csúcs – az él végpontjainak és a szomszédos LAP-csúcsok átlaga, \mathbf{e}_j^{i+1}
- (iii) új CSÚCS-csúcs – n lap által körülvéve: \mathbf{v}^{i+1}

$$\mathbf{v}^{i+1} = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_j^{i+1} + \frac{2}{n^2} \sum_{j=1}^n \mathbf{e}_j^{i+1} + \frac{n-3}{n} \mathbf{v}^i$$

- új lapok, az első osztás után négyoldalú hurkok:

$$\mathbf{f}^{i+1} - \mathbf{e}^{i+1} - \mathbf{v}^{i+1} - \mathbf{e}^{i+1} - \mathbf{f}^{i+1}$$

- konvergál, szabályos csúcs ($n=4$) – G^2 határfelület ,
különleges csúcsok ($n \neq 4$) – G^1



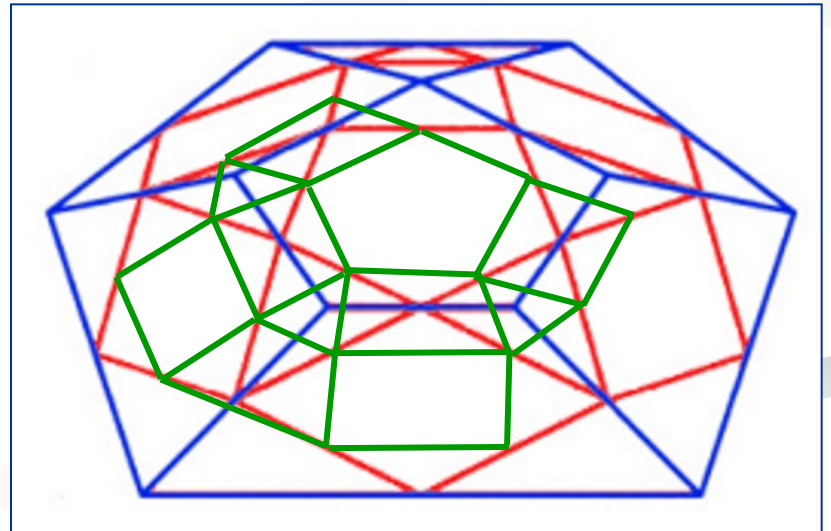
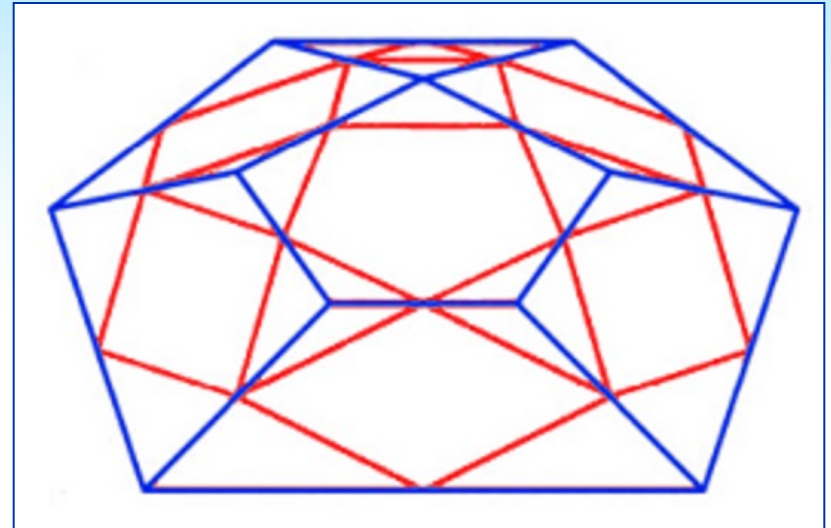
Human Face-Subdivision

Rekurzív poliéder-felosztás₅

3. Középosztásos felületek

(Peters & Reif)

- a „legegyszerűbb” séma
- minden élre – új felező pont
- új lapok
 - befoglalt LAP-lapok
 - csúcskörüli CSÚCS-lapok
- négyoldalú lapok dominálnak
- szabályos csúcsok ($n=4$)
- különleges csúcsok – az eredeti csúcsok körül
- \Rightarrow konvergál, G^1 határfelület



Rekurzív poliéder-felosztás₆

4. Loop-féle felosztás

- háromszöghálók finomítása
- (i) az adott él csúcsai: $\mathbf{v}_1^i, \mathbf{v}_2^i$
- (ii) a csatlakozó csúcsok: $\mathbf{v}_3^i, \mathbf{v}_4^i$
- új **ÉL**- csúcs:

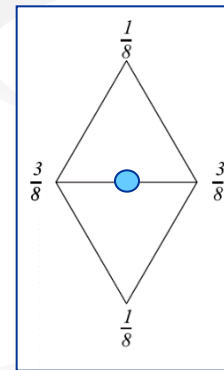
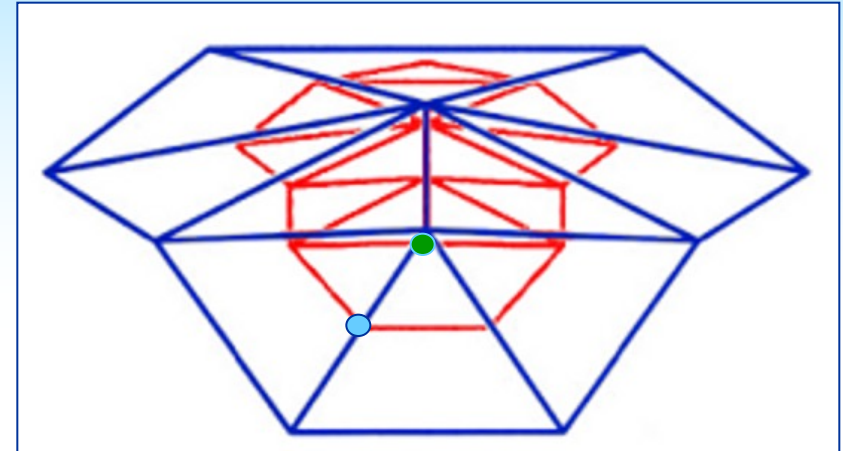
$$\mathbf{e}_j^{i+1} = \frac{3}{8}(\mathbf{v}_1^i + \mathbf{v}_2^i) + \frac{1}{8}(\mathbf{v}_3^i + \mathbf{v}_4^i)$$

- új **CSÚCS** - csúcs n szomszéd alapján:

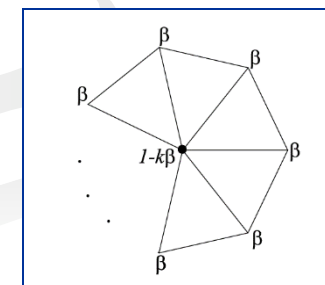
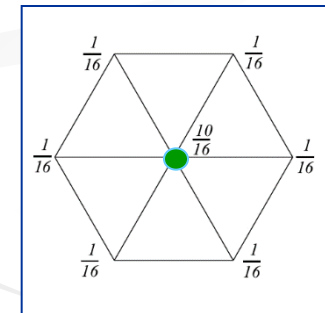
$$\mathbf{v}^{i+1} = (1 - n\alpha) \mathbf{v}^i + \alpha \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j^i,$$

$$\alpha = \frac{3}{16}, n = 3; \quad \alpha = \frac{1}{n} \left(\frac{5}{8} - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{n} \right)^2 \right), n > 3$$

- \Rightarrow sima határfelület
- szabályos csúcsok ($n=6$) – G^2 ,
(negyedfokú Bézier háromszögek);
különleges csúcsok ($n \neq 6$) – csak G^1



(Maszkok)



Rekurzív poliéder-felosztás₇

5. $\sqrt{3}$ felosztás

- háromszögháló \Rightarrow finomított háromszögháló
- (i) minden háromszöget három részre hasítunk
- (ii) a keletkező négyszögátlókat megcseréljük (flip) \rightarrow középponti csúcsok összekötése
- az eredeti csúcsokat újraszámoljuk n szomszédos csúcs alapján:

$$\mathbf{v}^{i+1} = (1 - \alpha_n) \mathbf{v}^i + \frac{\alpha_n}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j^i, \quad \alpha_n = \frac{1}{9} \left(4 - 2 \cos \frac{2\pi}{n} \right)$$

- minden iteráció cseréli a struktúra irányítását, két iteráció egy háromszögből 9-et készít
- \Rightarrow sima határfelület
- szabályos csúcsok ($n=6$) – G^2 , különleges csúcsok ($n \neq 6$) – csak G^1

