3D számítógépes geometria és alakzatrekonstrukció

7. Interpoláló felületek

http://cg.iit.bme.hu/portal/node/312
https://www.vik.bme.hu/kepzes/targyak/VIIIMA01

Dr. Várady Tamás, Dr. Salvi Péter
BME, Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Irányítástechnika és Informatika Tanszék

Tartalom

- Bevezetés: nem tenzor alapú felületek
- Coons felületek
  - lineáris
  - harmadfokú
- *n*-oldalú felületek
  - alapkoncepció
  - *n*-oldalú poligonális tartományok
  - oldal- és sarokinterpolánsok
  - súlyfüggvények
  - parametrizálás
- Görbeháló alapú tervezés - Demó

Bevezetés$_1$

Szabadformájú felületreprezentációk

1. Tenzor szorzat alapú felületek
   - Bézier- és B-spline felületek
   - négyoldalú paramétertartomány
   - *n x m-es* kontroll háló

$$\mathbf{s}(u,v) = [\boldsymbol{\alpha}(u)][\mathbf{C}][\boldsymbol{\beta}(v)]^T$$

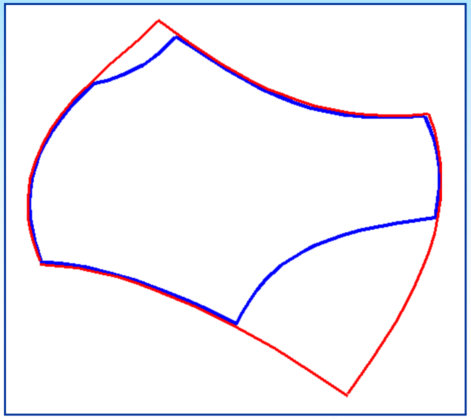
2. Bézier és B-spline kiterjesztése *n*-oldalra ($n \neq 4$)

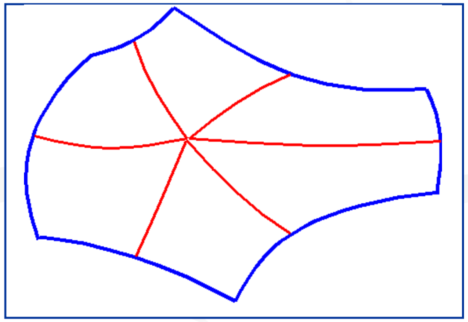
3. Transzfinit interpoláció
   - határgörbék és keresztderivált függvények
   - négyoldalú → Coons patch
   - általános *n*-oldalú felületek

4. Poliéder-alapú általános topológiájú felületek
   - felosztásos felületek (rekurzív szubdivizió)
   - összeillesztett spline felületek

Bevezetés$_2$

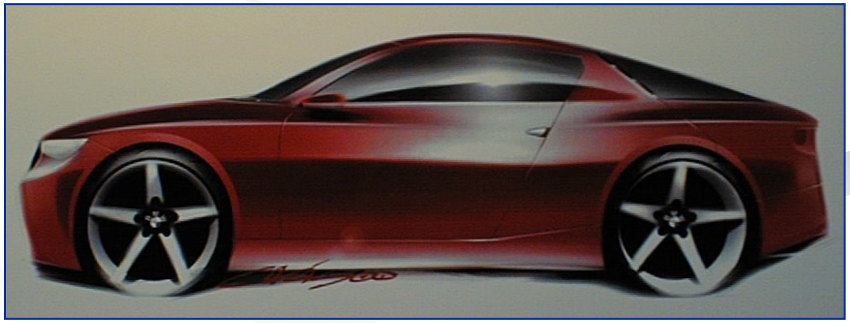
A szabadformájú tárgyak felületei nem kizárólag 4-oldalú darabokból tevődnek össze!





Megoldások:

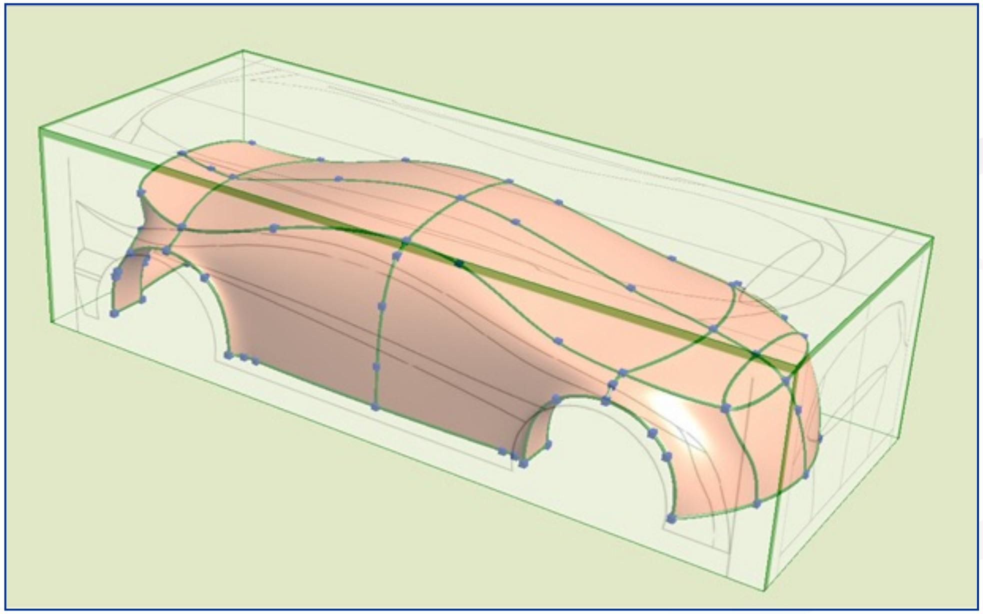
- 4-oldalú felületek körbevágása
- n-oldalú tartományok 4-oldalúakra való bontása
- általános topológiájú poliéder alapú felületek
- *n*-oldalú felületek

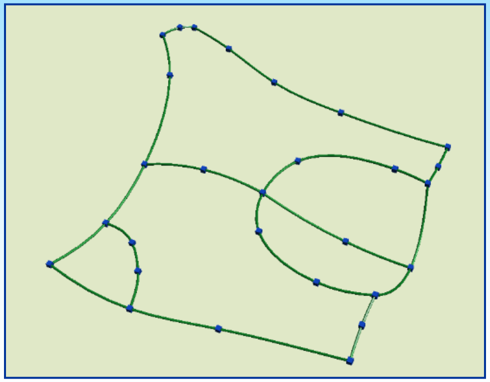


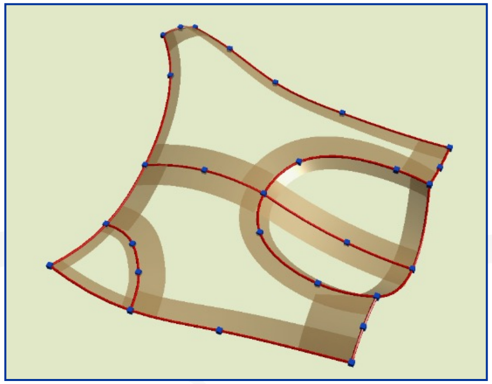
Bevezetés$_3$

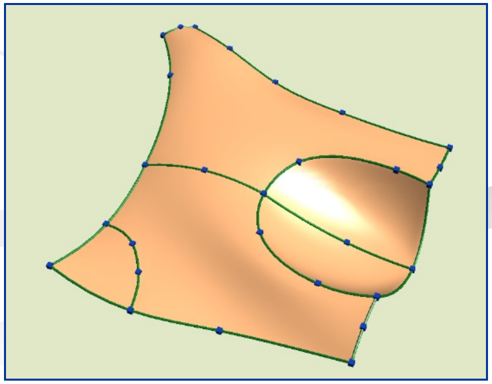
Görbeháló alapú tervezés

- általános topológiájú görbeháló
- keresztirányú deriváltak kiszámítása
- *n*-oldalú felületek interpolációja









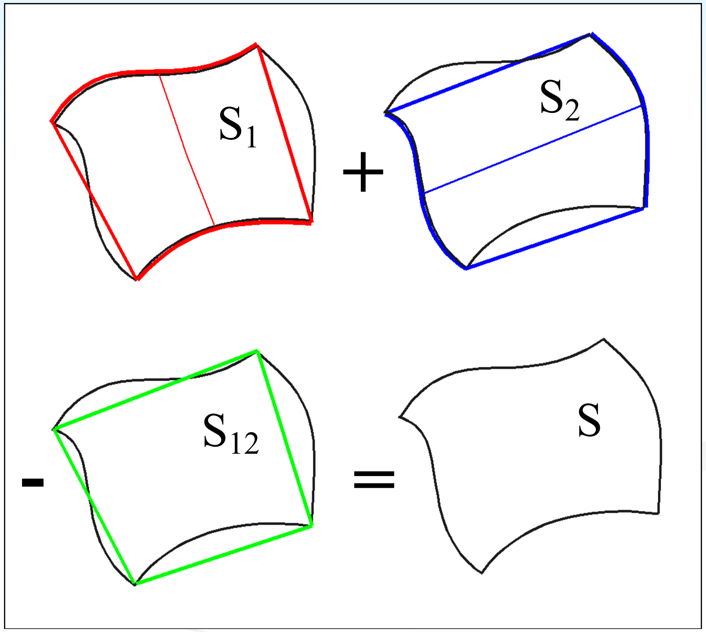
Lineáris Coons felületek$_1$

- adott négy tetszőleges parametrikus határgörbe:

$$\mathbf{c}_1(u),\ \mathbf{c}_2(u),\ \mathbf{d}_1(v),\ \mathbf{d}_2(v)$$

- keressük $\mathbf{S}(u,v)$-t, amely interpolál:

$$\mathbf{S}(u,0)=\mathbf{c}_1(u),\quad \mathbf{S}(u,1)=\mathbf{c}_2(u),$$
$$\mathbf{S}(0,v)=\mathbf{d}_1(v),\quad \mathbf{S}(1,v)=\mathbf{d}_2(v)$$



- két lineáris tag:

$$\mathbf{S}_1(u,v)=(1-v)\,\mathbf{S}(u,0)+v\,\mathbf{S}(u,1),$$
$$\mathbf{S}_2(u,v)=(1-u)\,\mathbf{S}(0,v)+u\,\mathbf{S}(1,v)$$

- korrekciós tag:

$$\mathbf{S}_{12}(u,v)=\begin{bmatrix}1-u & u\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{S}(0,0) & \mathbf{S}(0,1)\\ \mathbf{S}(1,0) & \mathbf{S}(1,1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-v\\ v\end{bmatrix}$$

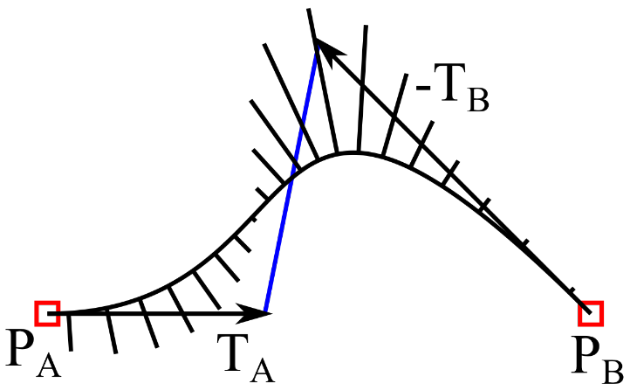
- felületegyenlet (Boolean sum):

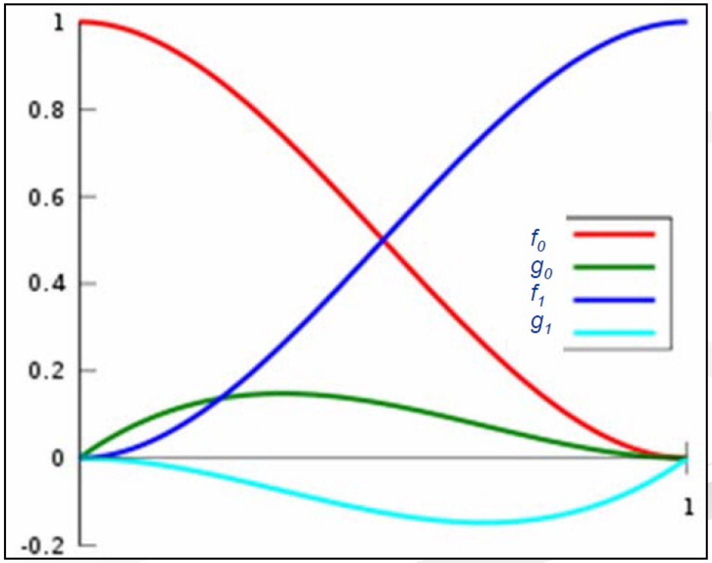
$$\mathbf{S}(u,v)=\mathbf{S}_1(u,v)+\mathbf{S}_2(u,v)-\mathbf{S}_{12}(u,v)$$

Hermite-interpoláció (emlékeztető)

- Hermite-interpoláció:

$$r(u) = \mathbf{P}_A F_0(u) + \mathbf{T}_A G_0(u) + \mathbf{P}_B F_1(u) + \mathbf{T}_B G_1(u)$$

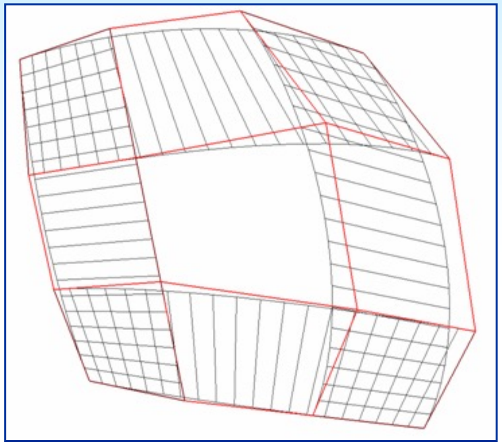


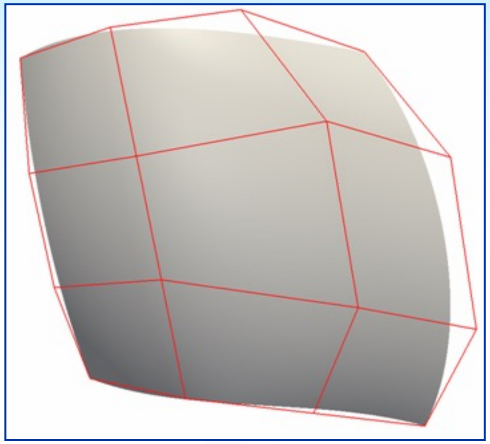


G^1 Coons felületek$_2$

- adott négy határgörbe és hozzátartozó keresztderivált:

$$\mathbf{S}(u,0), \mathbf{S}(u,1), \mathbf{S}(0,v), \mathbf{S}(1,v);$$
$$\mathbf{S}_v(u,0), \mathbf{S}_v(u,1), \mathbf{S}_u(0,v), \mathbf{S}_u(1,v)$$





- két harmadfokú simítás (Hermite függvények):

$$\mathbf{S}_1(u,v) = F_0(v)\,\mathbf{S}(u,0) + G_0(v)\,\mathbf{S}_v(u,0) + F_1(v)\,\mathbf{S}(u,1) + G_1(v)\,\mathbf{S}_v(u,1),$$
$$\mathbf{S}_2(u,v) = F_0(u)\,\mathbf{S}(0,v) + G_0(u)\,\mathbf{S}_u(0,v) + F_1(u)\,\mathbf{S}(1,v) + G_1(u)\,\mathbf{S}_u(1,v)$$

- korrekciós tag:

$$\mathbf{S}_{12}(u,v) = \begin{bmatrix} F_0(u) & G_0(u) & F_1(u) & G_1(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}(0,0) & \mathbf{S}_v(0,0) & \mathbf{S}(0,1) & \mathbf{S}_v(0,1) \\ \mathbf{S}_u(0,0) & \mathbf{S}_{uv}(0,0) & \mathbf{S}_u(0,1) & \mathbf{S}_{uv}(0,1) \\ \mathbf{S}(1,0) & \mathbf{S}_v(1,0) & \mathbf{S}(1,1) & \mathbf{S}_v(1,1) \\ \mathbf{S}_u(1,0) & \mathbf{S}_{uv}(1,0) & \mathbf{S}_u(1,1) & \mathbf{S}_{uv}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0(v) \\ G_0(v) \\ F_1(v) \\ G_1(v) \end{bmatrix}$$

- felületegyenlet (Boolean sum): $\mathbf{S}(u,v) = \mathbf{S}_1(u,v) + \mathbf{S}_2(u,v) - \mathbf{S}_{12}(u,v)$

Parametrikus konstrukciók

- Pontok – $0D$, Görbék – $1D$, Felületek – $2D$
- Kontroll pontokból származtatott elemek:

$$\mathbf{Q} = \sum \mathbf{P}_i \alpha_i, \quad 0D \to 0D$$

$$\mathbf{r}(u) = \sum \mathbf{P}_i \beta_i(u), \quad 0D \to 1D$$

$$\mathbf{S}(u,v) = \sum\sum \mathbf{P}_{ij} \beta_{ij}(u,v), \quad 0D \to 2D$$

- Görbékből görbe:

$$\mathbf{r}(u) = \sum \mathbf{p}_i(u)\alpha_i, 1D \to 1D$$

$$\mathbf{r}(u) = \sum \mathbf{p}_i(t_i(u))\gamma_i(u), 1D \to 1D$$

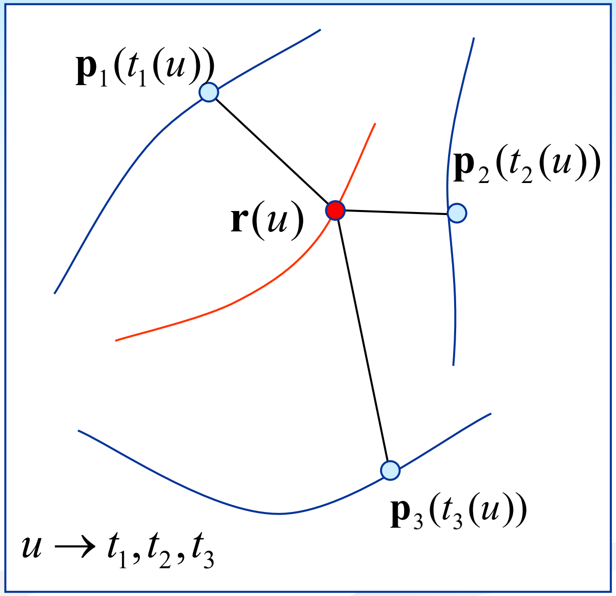
- Görbékből felület:

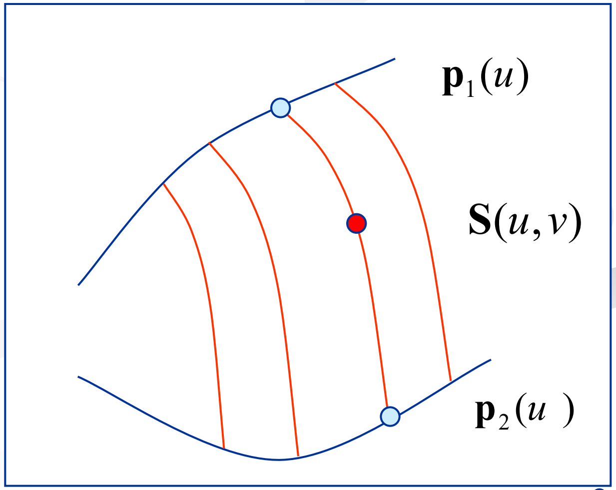
$$\mathbf{S}(u,v) = \sum \mathbf{p}_i(u)\gamma_i(v), 1D \to 2D$$

- Felületekből felület:

$$\mathbf{S}(u,v) = \sum \mathbf{R}_i(u,v)\, \alpha_i, 2D \to 2D$$

$$\mathbf{S}(u,v) = \sum \mathbf{R}_i(s_i(u,v), t_i(u,v))\, \gamma_i(u,v), 2D \to 2D$$

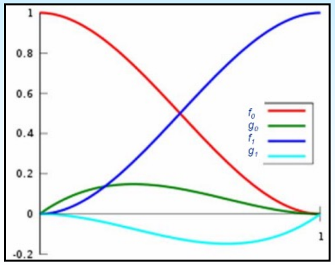




Ribbon-alapú görbeinterpoláció

- Hermite görbe - pozició és tangens interpoláció:

$$\mathbf{r}(u) = \mathbf{P}_A F_0(u) + \mathbf{T}_A G_0(u) + \mathbf{P}_B F_1(u) + \mathbf{T}_B G_1(u)$$

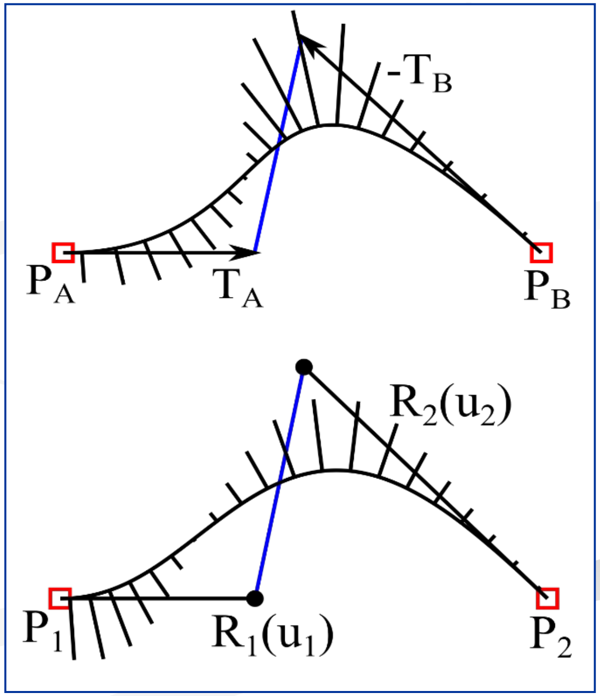


- Formális átírás:

$$\mathbf{r}(u) = \sum_{i\in\{1,2\}} \mathbf{P}_i\, F_0(u_i) + \mathbf{T}_i\, G_0(u_i),$$

ahol

$$u_1 = u,\, u_2 = 1-u,\, \mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_B$$



- Módosított görbe egyenlet:

$$\mathbf{R}_i(u_i) = \mathbf{P}_i + u_i\mathbf{T}_i, \quad \hat{\mathbf{r}}(u) = \sum_{i\in\{1,2\}} \mathbf{R}_i(u_i)\, F_0(u_i)$$

$$\hat{\mathbf{r}}(u_1 = 0) = \mathbf{P}_1, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial u_1}(u_1 = 0) = \mathbf{T}_1$$

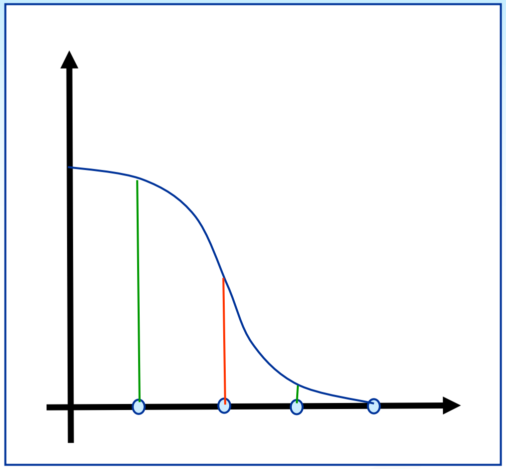
  - csak egy súlyfüggvény
  - ribbon: pozició + tangens egyben
  - a Hermite görbéhez hasonló tulajdonságok

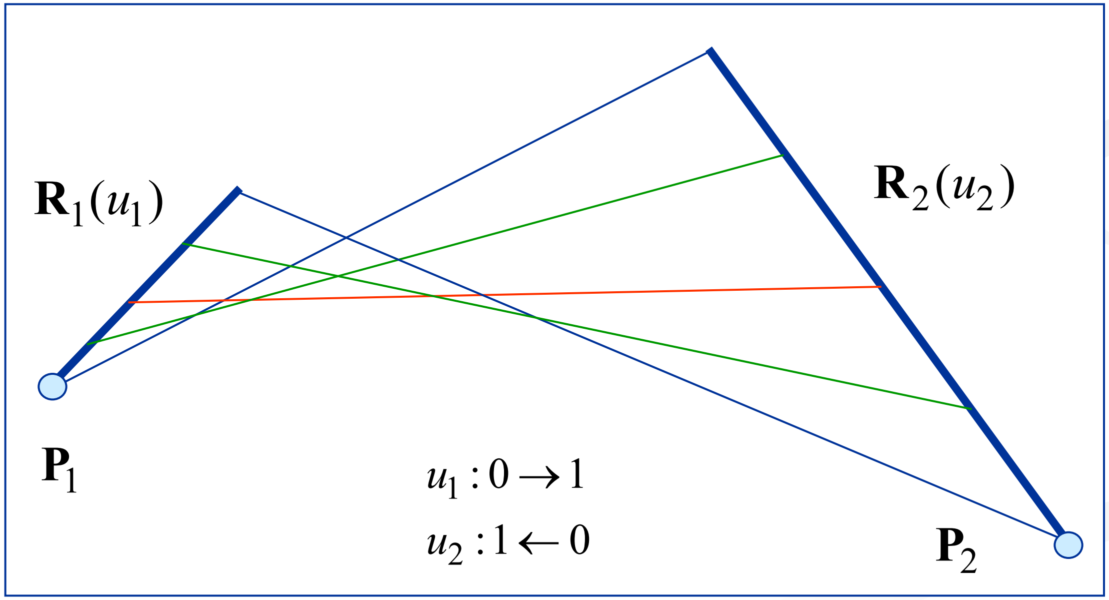
Ujjgyakorlat* - ribbonok

$$\hat{\mathbf{r}}(u) = \sum_{i\in\{1,2\}} \mathbf{R}_i(u_i)\, H_i(u_1, u_2), \quad u_1 = u,\, u_2 = 1-u$$

$$\mathbf{R}_i(u_i) = \mathbf{P}_i + u_i \mathbf{T}_i, \quad i \in \{1,2\}$$

$$H_1(u_1, u_2) = \frac{u_2^2}{u_1^2 + u_2^2},\; H_2(u_1, u_2) = \frac{u_1^2}{u_1^2 + u_2^2},$$





u_1	0	0.25	0.5	0.75	1
H_1	.	.	.	.	.
H_2	.	.	.	.	.

Feladat:

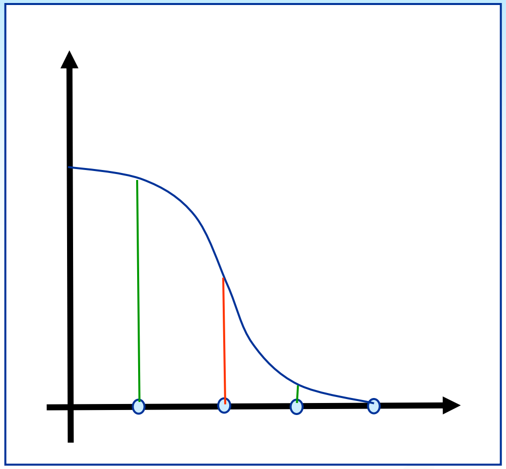
- a súlyfüggvény értékeinek meghatározása
- a görbe 3 belső pontjának kiszerkesztése

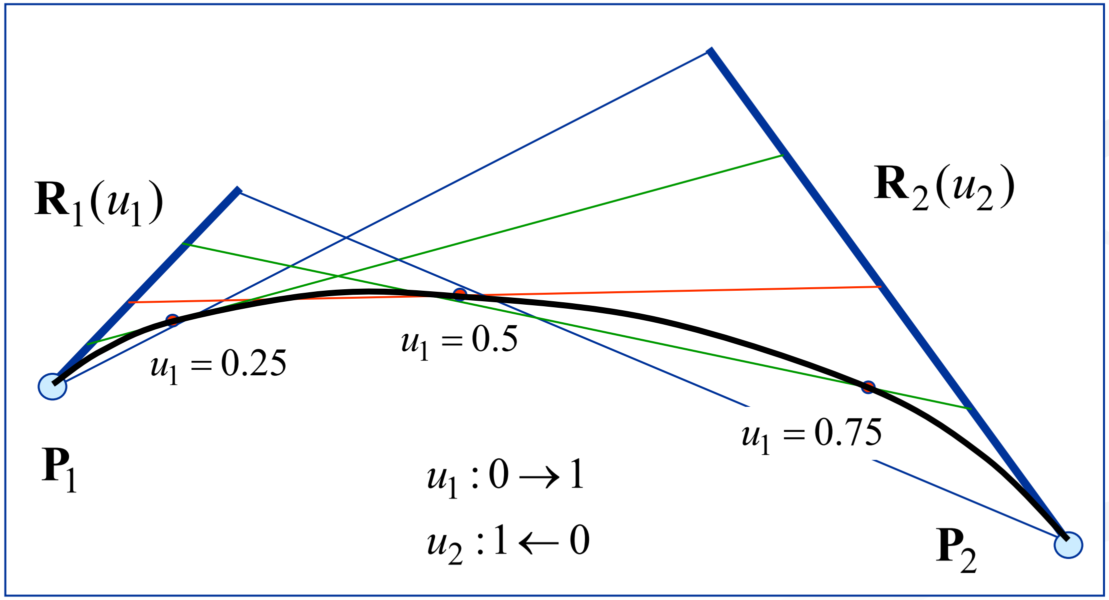
Ujjgyakorlat - ribbonok

$$\hat{\mathbf{r}}(u) = \sum_{i\in\{1,2\}} \mathbf{R}_i(u_i)\,H_i(u_1,u_2), \quad u_1 = u, u_2 = 1-u$$

$$\mathbf{R}_i(u_i) = \mathbf{P}_i + u_i\mathbf{T}_i, \quad i \in \{1,2\}$$

$$H_1(u_1,u_2) = \frac{u_2^2}{u_1^2+u_2^2}, H_2(u_1,u_2) = \frac{u_1^2}{u_1^2+u_2^2},$$





u_1	0	0.25	0.5	0.75	1
H_1	1	0.9	0.5	0.1	0
H_2	0	0.1	0.5	0.9	1

Feladat:

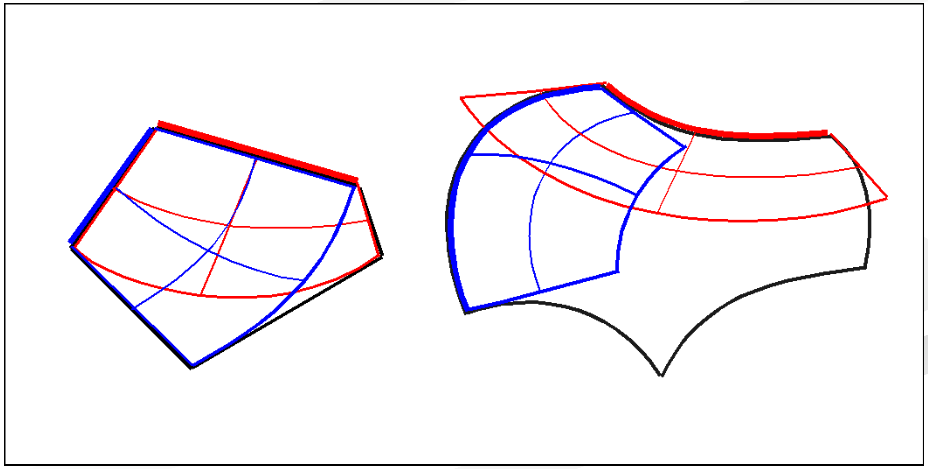
- a súlyfüggvény értékeinek meghatározása
- a görbe 3 belső pontjának kiszerkesztése

n-oldalú felületek$_1$

- adott n határgörbe és a hozzájuk tartozó keresztderivált függvények
- cél: interpoláló felület, természetes belső összesimítás
- n oldal-interpoláns (ribbon) konvex kombinációja:

$$\mathbf{S}(u,v) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{R}_i(s_i(u,v), t_i(u,v))\ \mathrm{Blend}_{oldal}(u,v)$$

- parametrikus domén:
  - n-oldalú konvex poligon



n-oldalú felületek$_2$

- mindegyik ribbon egy négyoldalú parametrikus felület:

$$\mathbf{R}_i(s_i,t_i), \quad (s_i,t_i) \in [0,S_i]\times[0,T_i]$$

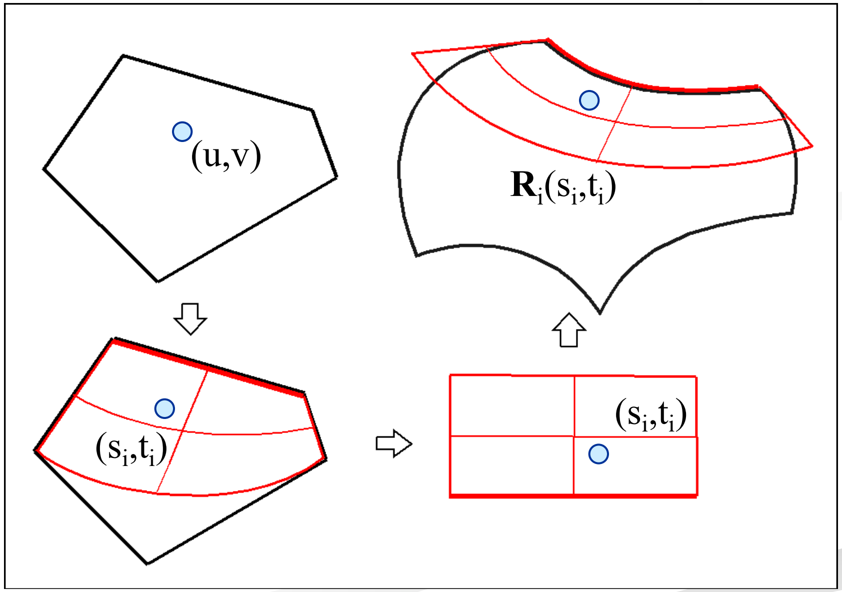
- a domén tartalmazza minden $[s_i,t_i]$ parametrikus tartomány leképzését
- domén leképzés (nehéz):

$$(u,v) \Rightarrow (s_i,t_i), i=1,\ldots,n$$

- 3D leképzés (behelyettesítés):

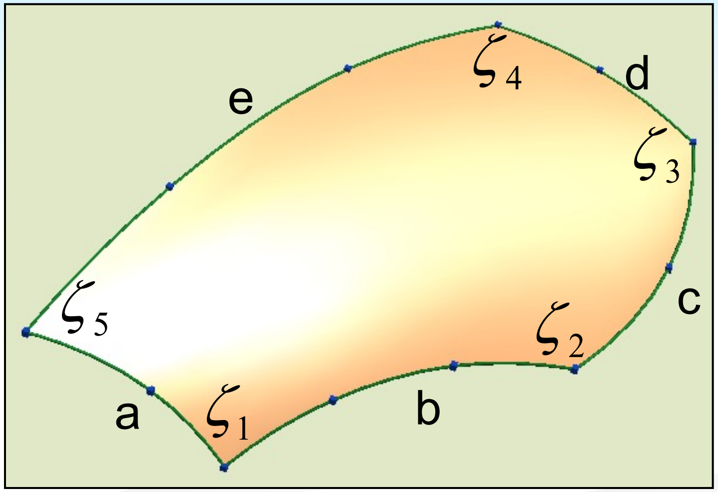
$$\mathbf{R}_i(s_i,t_i) = \mathbf{R}_i(s_i(u,v),t_i(u,v))$$

- meghatározandó elemek
  - konvex domén
  - domén leképző függvények
  - interpolánsok
  - súlyfüggvények



Konvex poligonális domén$_1$

Adott - 3D határgörbék, hosszuk: $a, b, c, d, e\ldots$
- sarokszögek: $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5\ldots$



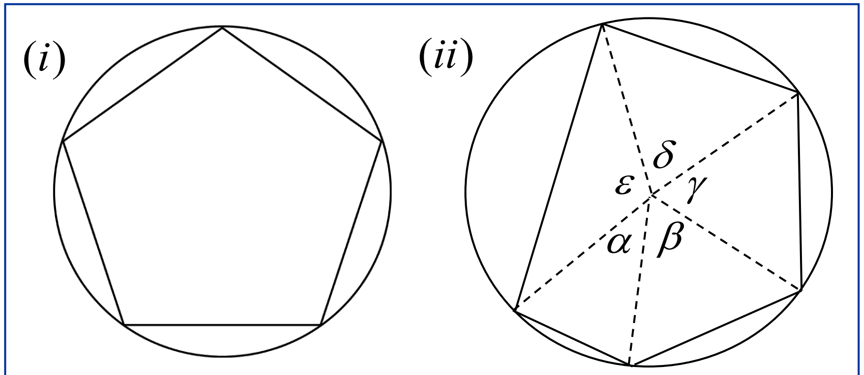
Cél: domén poligon előállítása

(i) szabályos sokszög

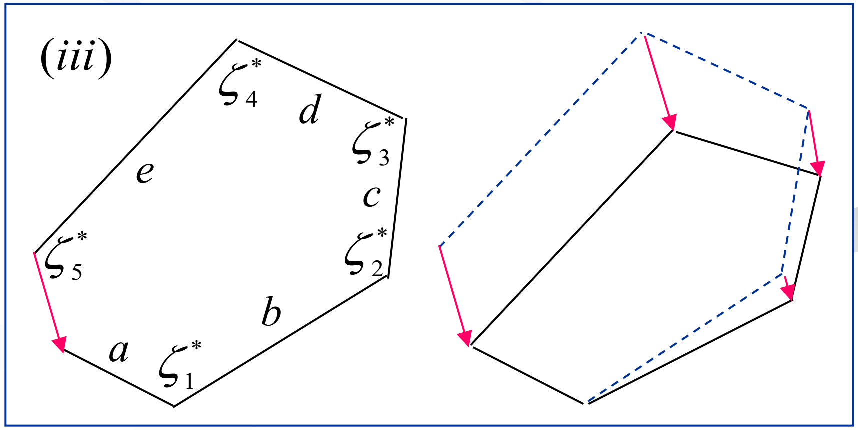
(ii) szögek aránya → oldalak aránya (körpoligon)

(iii) oldalak és szögek optimalizálása

- szögek normalizálása $\zeta_i \to \zeta_i^*$
- nyitott → zárt poligon: különbségvektor eltüntetése



$$\alpha : \beta : \gamma : \delta : \varepsilon = a : b : c : d : e$$

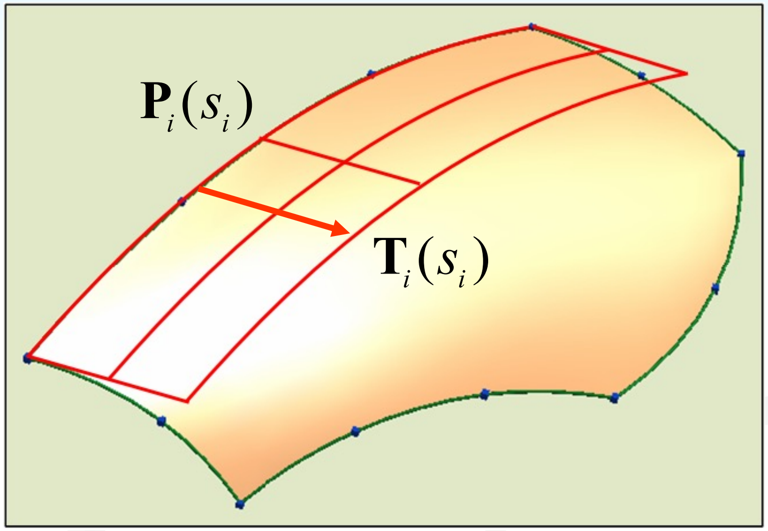


Ribbon-alapú felületek

<u>Ribbon (oldal-interpoláns):</u>

- egy határgörbét és egy kereszt-irányú tangens függvényt interpolál

$$\mathbf{R}_i(s_i, t_i) = \mathbf{P}_i(s_i) + t_i \mathbf{T}_i(s_i),$$
$$i = 1,\ldots,n,\ s_i = s_i(u,v),\ t_i = t_i(u,v)$$



<u>*n*-oldalú felület egyenlete:</u>

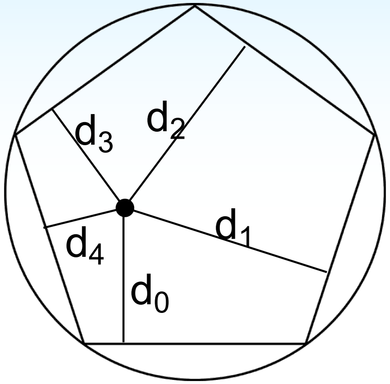
- ribbonok súlyozott kombinációja

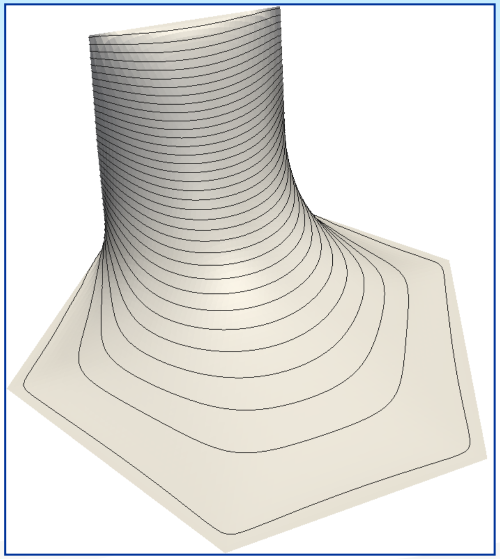
$$\mathbf{S}(u,v) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{R}_i(s_i(u,v), t_i(u,v))\ \mathrm{Blend}^i_{\mathrm{oldal}}(u,v)$$

Oldal - súlyfüggvények

Általános távolságfogalom

- az i-edik oldalon $d_i = 0$
- monoton nő, ahogy "távolodunk"
- pl. merőleges távolság





Oldal-alapú súlyfüggvény:

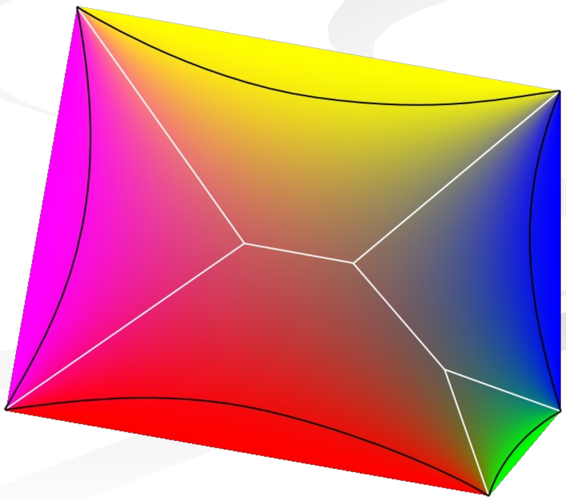
- i-edik oldalon: $\mathrm{Blend}^i_{oldal} = 1$
- $j \neq i$ oldalakon: $\mathrm{Blend}^i_{oldal} = 0$

$$\mathrm{Blend}^i_{\mathrm{oldal}}(u,v) = \frac{\prod_{j \neq i} d_j(u,v)^2}{\sum_k \prod_{j \neq k} d_j(u,v)^2}$$

- a sima kapcsolódás érdekében a kitevő 2
- a sarkokban szingularitás

Példa: $n=3$, az 1-es ribbon súlyozása

$$\mathrm{Blend}^1_{\mathrm{oldal}} = \frac{d_2^2 d_3^2}{d_1^2 d_2^2 + d_2^2 d_3^2 + d_3^2 d_1^2}$$

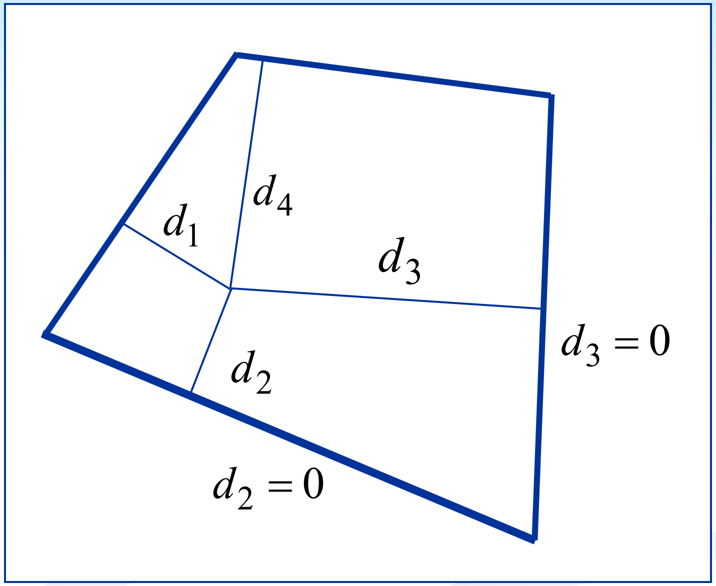


Ujjgyakorlat* - súlyfüggvények

Oldal-alapú súlyfüggvény:

- i-edik oldalon: $\mathrm{Blend}^{i}_{oldal} = 1$
- j≠i oldalakon: $\mathrm{Blend}^{i}_{oldal} = 0$

$$\mathrm{Blend}^{i}_{oldal}(d_1, d_2, \ldots d_n) = \frac{\prod_{j \neq i} d_j^{\,2}}{\sum_k \prod_{j \neq k} d_j^{\,2}}$$



Feladat:

- $n=4$, a 2-es blend függvény meghatározása
- ellenőrzés a 2. és 3. oldalakon

$$\mathrm{Blend}^{2}_{oldal} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots + \ldots. + \ldots. + \ldots.}$$

$$\mathrm{Blend}^{2}_{oldal}(d_2 = 0) = ?$$

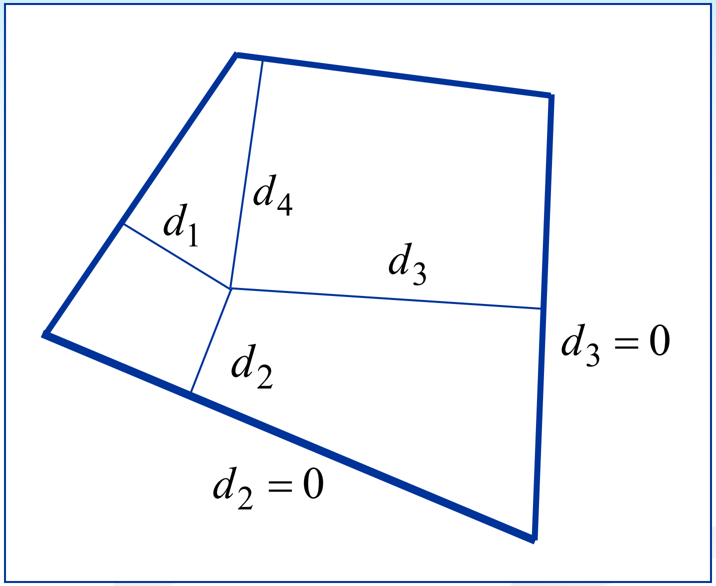
$$\mathrm{Blend}^{2}_{oldal}(d_3 = 0) = ?$$

Ujjgyakorlat - súlyfüggvények

Oldal-alapú súlyfüggvény:

- i-edik oldalon: $\mathrm{Blend}^{i}_{oldal} = 1$
- j≠i oldalakon: $\mathrm{Blend}^{i}_{oldal} = 0$

$$\mathrm{Blend}^{i}_{oldal}(d_1, d_2, \ldots d_n) = \frac{\prod_{j \neq i} d_j^{\,2}}{\sum_k \prod_{j \neq k} d_j^{\,2}}$$



<u>Feladat:</u>

- $n=4$, a 2-es blend függvény meghatározása
- ellenőrzés a 2. és 3. oldalakon

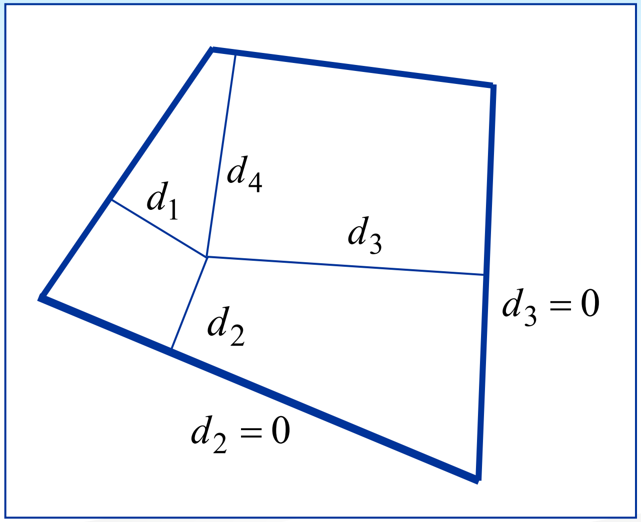
$$\mathrm{Blend}^{2}_{oldal} = \frac{d_1^2 d_3^2 d_4^2}{d_1^2 d_2^2 d_3^2 + d_2^2 d_3^2 d_4^2 \ldots + d_3^2 d_4^2 d_1^2 + d_4^2 d_1^2 d_2^2}$$

$$\mathrm{Blend}^{2}_{oldal}(d_2 = 0) = 1$$

$$\mathrm{Blend}^{2}_{oldal}(d_3 = 0) = 0$$

Súlyfüggvények számítása

$$\text{Blend}^i_{oldal}(d_1, d_2, \ldots d_n) = \frac{\prod_{j \neq i} d_j^{\,2}}{\sum_k \prod_{j \neq k} d_j^{\,2}}$$



$$\text{Blend}^2_{oldal} = \frac{d_1^2 d_3^2 d_4^2}{d_1^2 d_2^2 d_3^2 + d_2^2 d_3^2 d_4^2 \ldots . + d_3^2 d_4^2 d_1^2 + d_4^2 d_1^2 d_2^2}$$

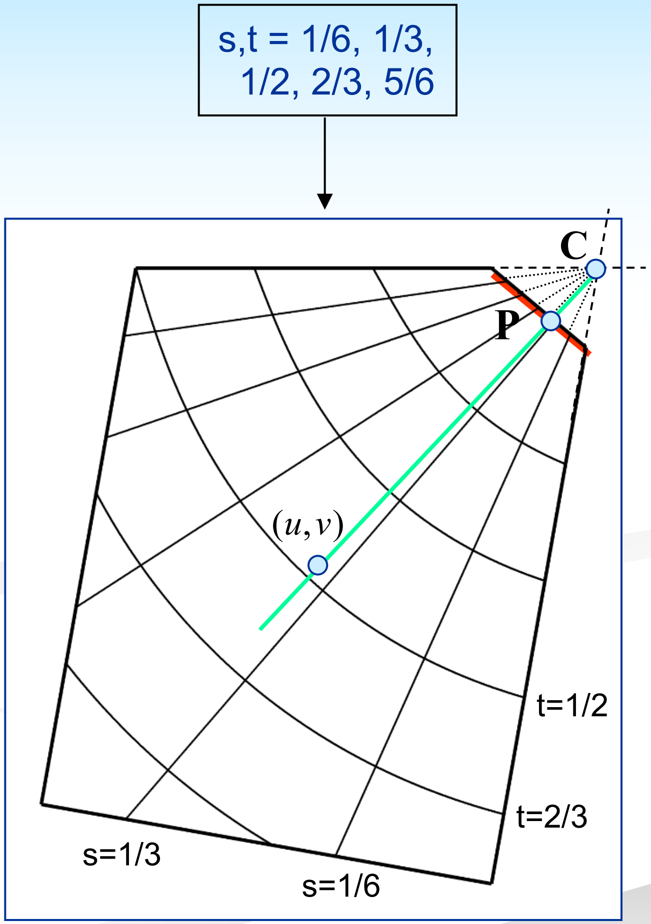
$$\text{Blend}^2_{oldal} = \frac{\frac{1}{d_2^2}}{\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2} + \frac{1}{d_4^2} +}$$

Kiértékelés: óvatosan !
a határok közelében

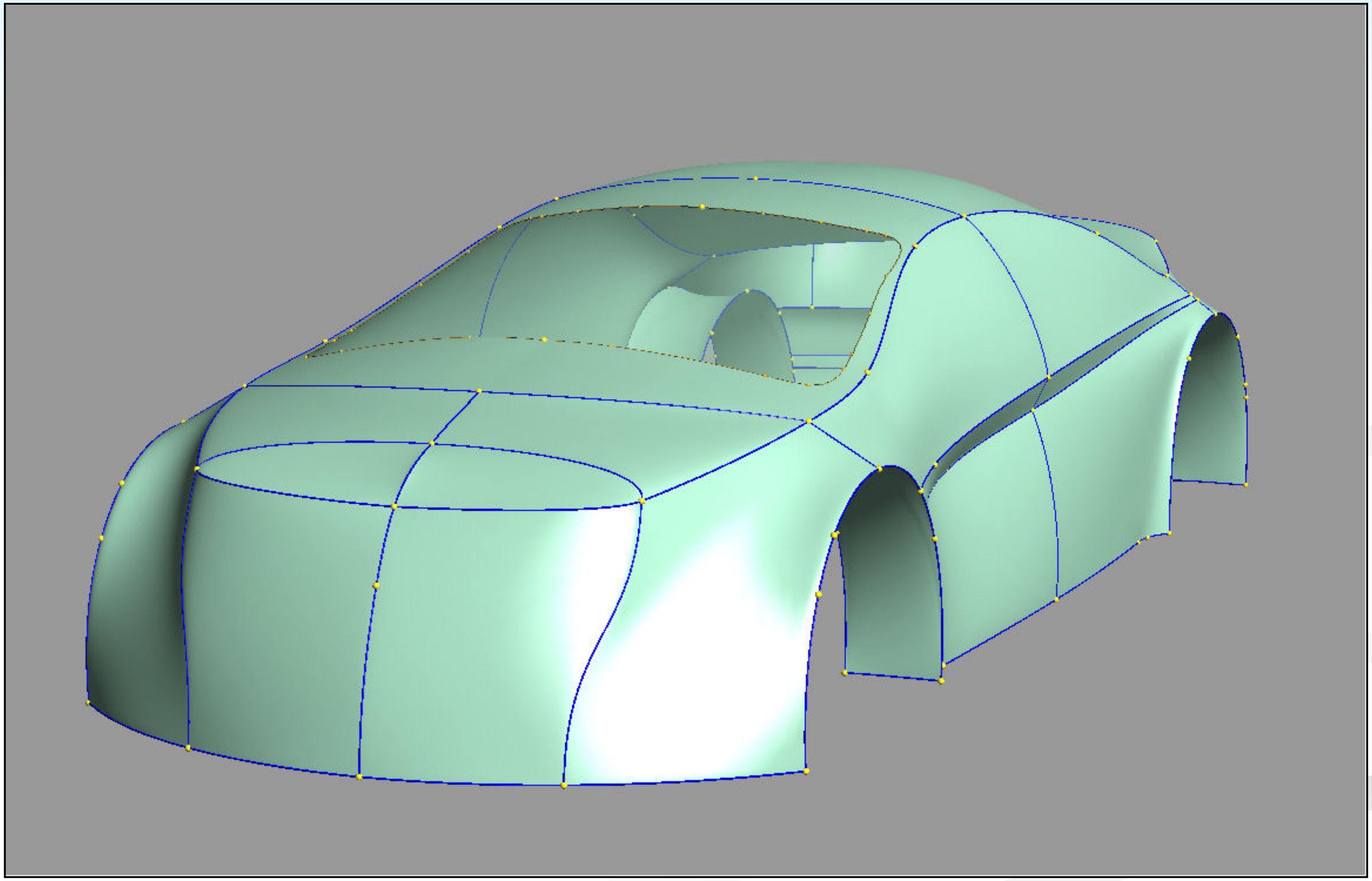
Ribbonok leképzése

Adott egy *(u,v)* domén pont

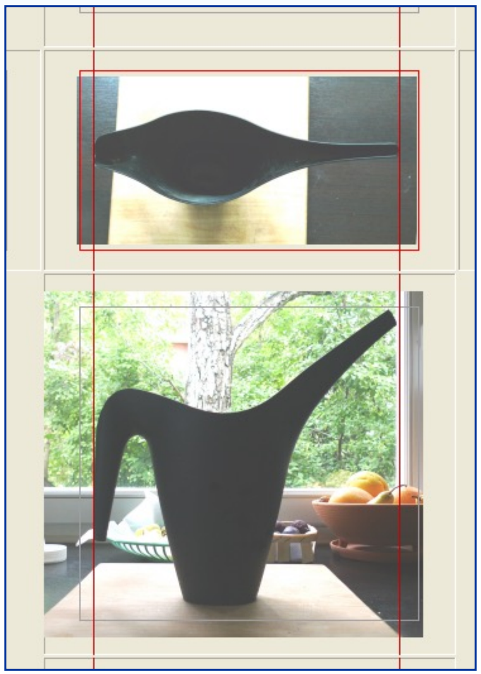
- Meghatározandó: az *i*-edik oldalhoz tartozó ribbon *(s,t)* koordinátái
- s: $0 \leq s \leq 1$
  t: az aktuális élen *0*, máshol pozitív
- Sugárirányú söprő egyenesek algoritmusa:
  - **C**: a szomszédos élek metszéspontja
  - **P**: sugár (**C**-n és az *(u,v)*-n átmenő egyenes) és az él metszéspontja
  - t: **P** és az *(u,v)* távolsága
  - s: **P** aránya az adott élen

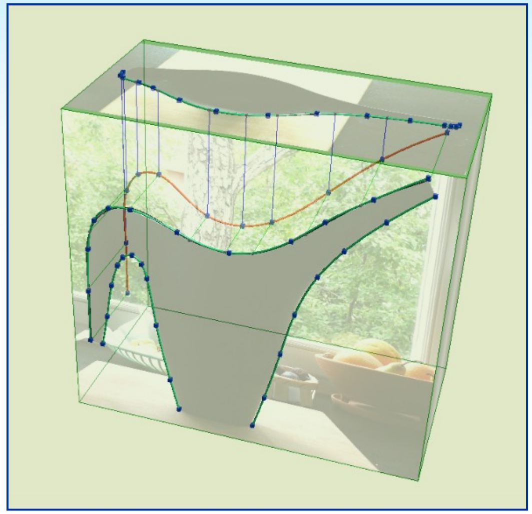


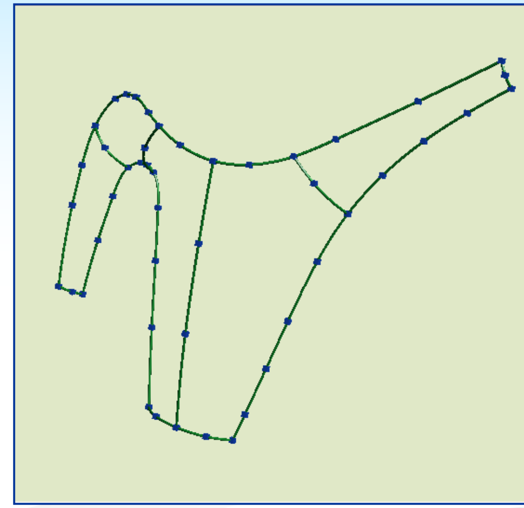
3D görbehálón alapuló tervezés
Demó - Sketches

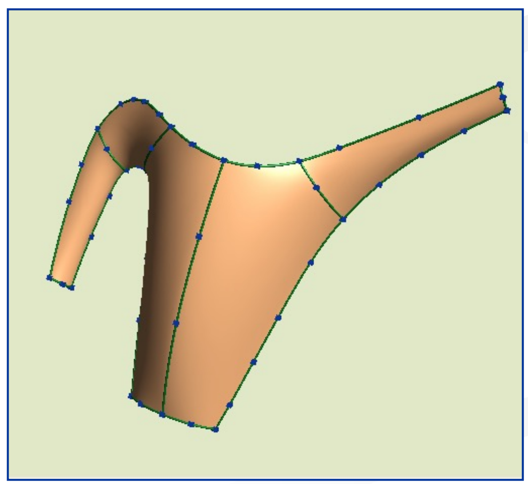


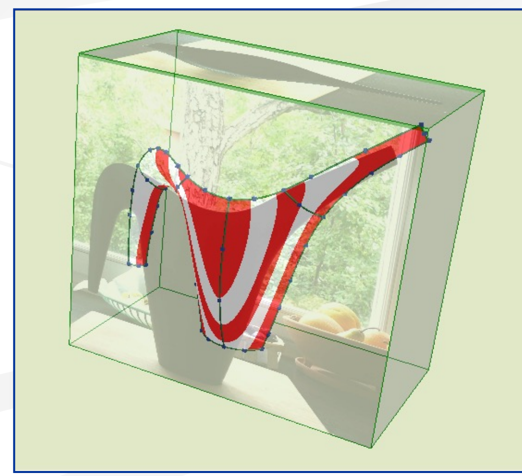
Sketches$_1$





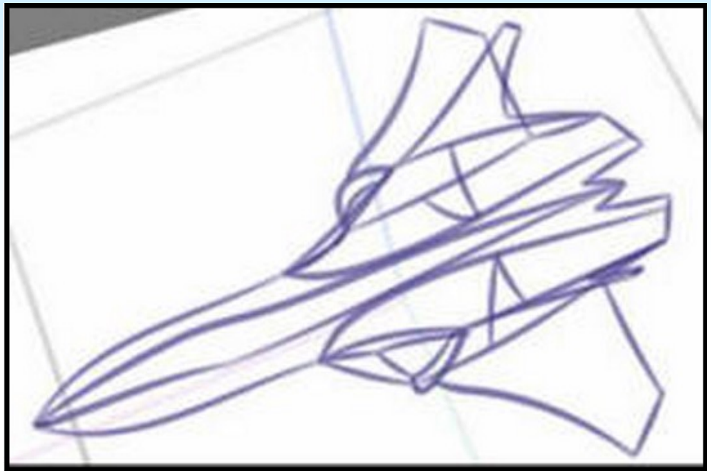


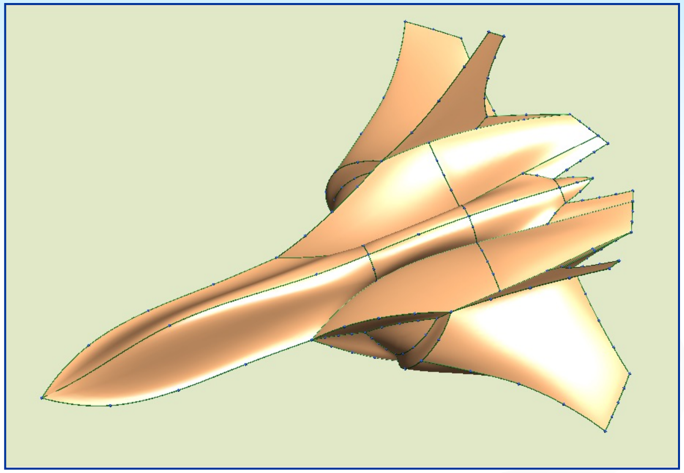


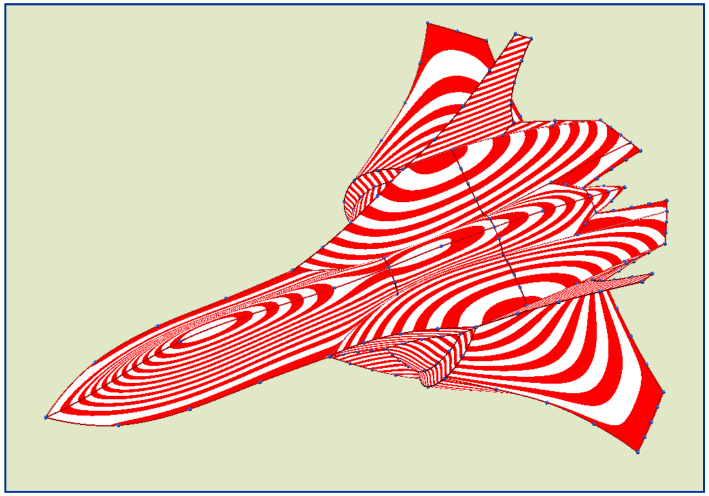


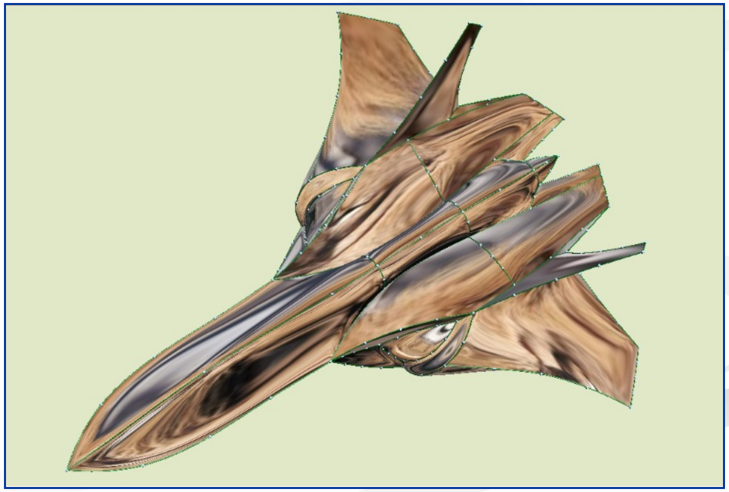
Courtesy of ShapEx, Ltd., Budapest

Sketches$_2$



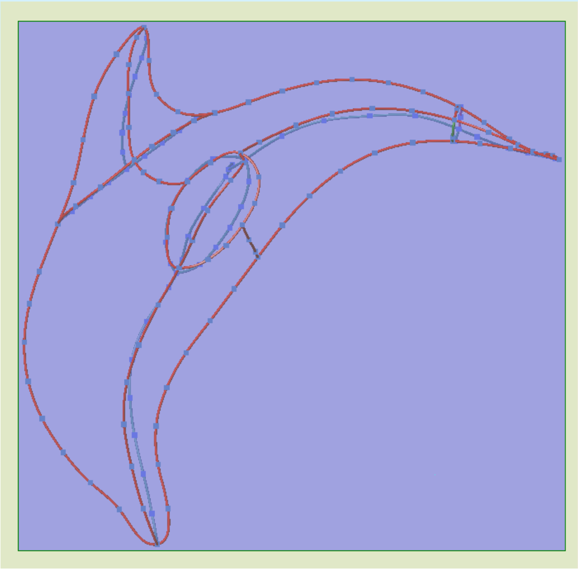


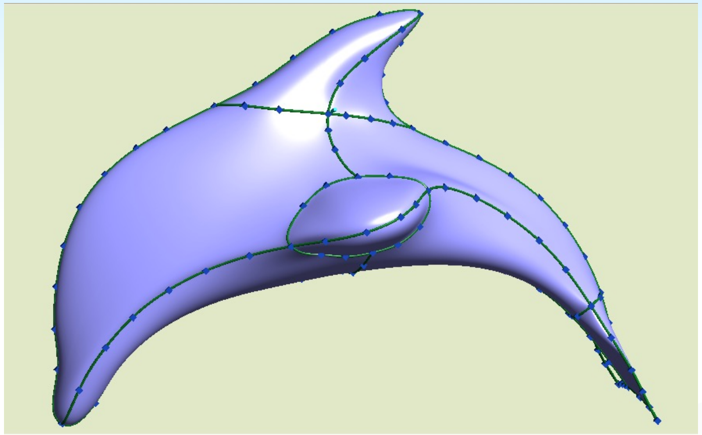


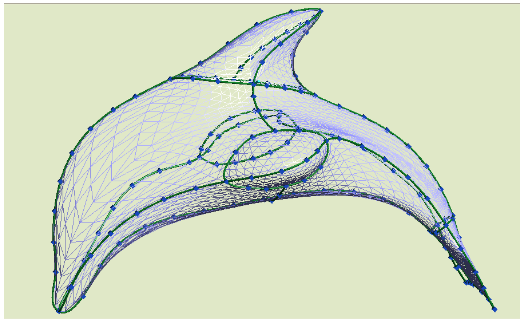


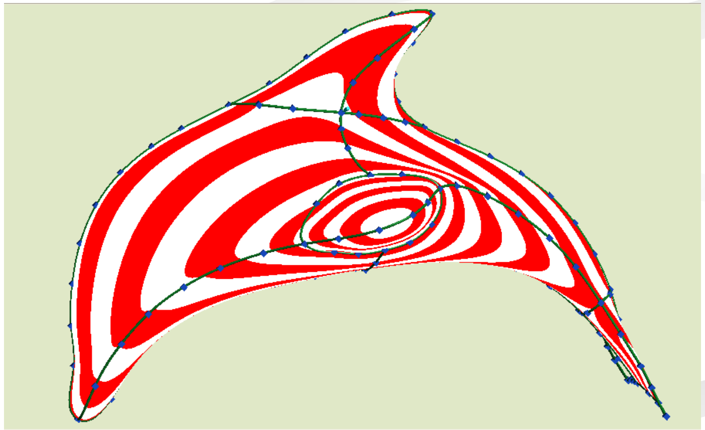
Courtesy of EveryBodyLovesSketces
and ShapEx, Ltd., Budapest

Sketches$_3$









Courtesy of Comp.Sci.Eng.,
Wash.Univ., St. Louis & ShapEx, Ltd.

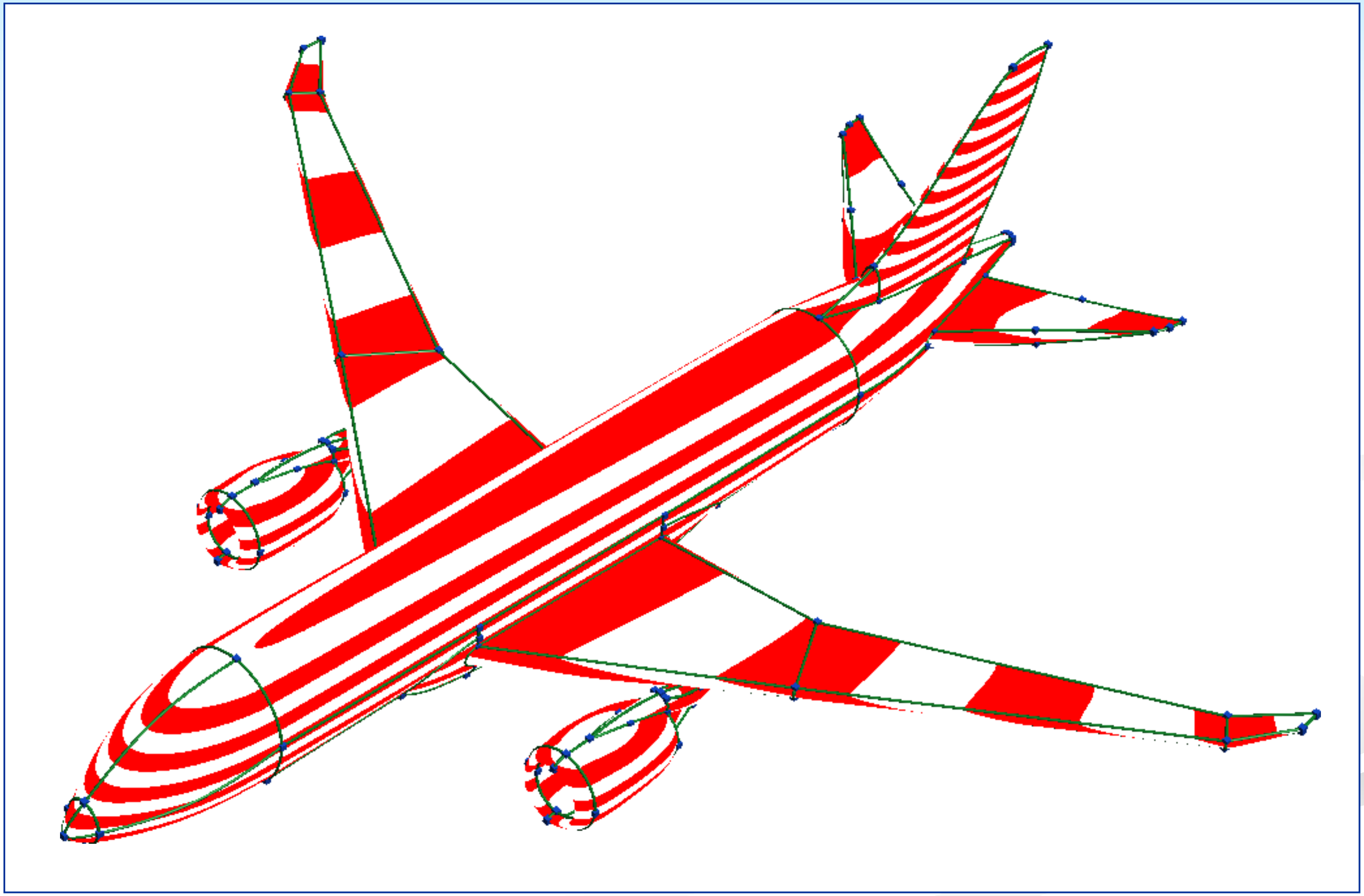
Önálló projekt

N-oldalú felület generálás (N=5,6)

szemináriumi előadás és prototípus implementáció

- határgörbék - Bézier görbék
- keresztderiváltak - Bézier-szerű kontrollpontok
- 3D-s háromszögháló előállítása
- kontrollpontok módosítása

Sketches



Sketches