3D számítógépes geometria és alakzatrekonstrukció

9. Interpoláció B-spline görbékkel

http://cg.iit.bme.hu/portal/node/312
https://www.vik.bme.hu/kepzes/targyak/VIIIMA01

Dr. Várady Tamás, Dr. Salvi Péter
BME, Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Irányítástechnika és Informatika Tanszék

Tartalom

Görbeinterpoláció - szakaszonként (lokális)

- parametrikus és geometriai folytonosság
- Bézier szegmensek illesztése
- interpoláció tangens vektorok segítségével

B-spline görbeinterpoláció (globális)

- végponti kényszerek, egyenletrendszer
- csomóvektor - különböző parametrizációk

?

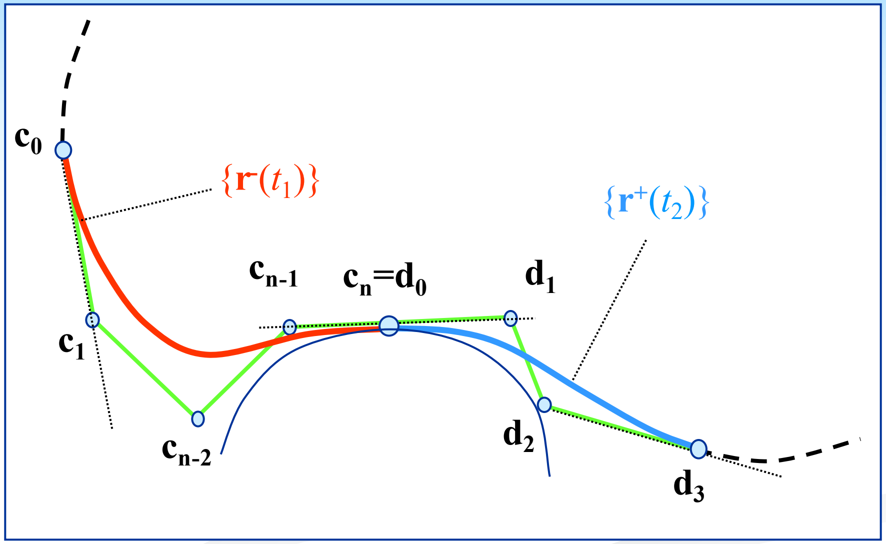
Interpoláló görbék - Cow

Görbeinterpoláció – szakaszonként$_1$

Feladat:

- n pontot interpoláló sima görbe:

$$\{\mathbf{P_i}\},\ i=0,\dots,n-1$$



Szomszédos szegmensek:

$$\mathbf{r}^-(t_1)=\sum_{j=0}^{n}\mathbf{c}_j B_j^n(t_1),\ t_1\in[0,1],$$

$$\mathbf{r}^+(t_2)=\sum_{j=0}^{n}\mathbf{d}_j B_j^n(t_2),\ t_2\in[0,1]$$

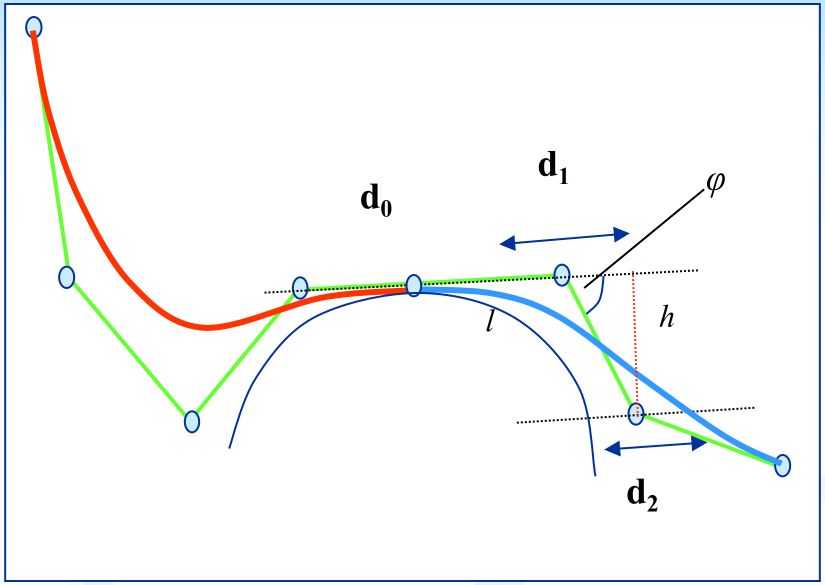
Folytonosság

- parametrikus: $C^0:\mathbf{r}^+(0)=\mathbf{r}^-(1),\quad C^1:\dot{\mathbf{r}}_t^{\,+}(0)=\dot{\mathbf{r}}_t^{\,-}(1),\quad C^2:\ddot{\mathbf{r}}_{tt}^{\,+}(0)=\ddot{\mathbf{r}}_{tt}^{\,-}(1)$
- geometriai: $G^1:\dot{\mathbf{r}}_t^{\,+}(0)=\alpha\,\dot{\mathbf{r}}_t^{\,-}(1),\quad G^2:\ddot{\mathbf{r}}_{tt}^{\,+}(0)=\alpha^2\,\ddot{\mathbf{r}}_{tt}^{\,-}(1)+\beta\,\dot{\mathbf{r}}_t^{\,-}(1)$

G^2:

$$\left(\kappa^+=\frac{|\dot{\mathbf{r}}_t^+\times\ddot{\mathbf{r}}_{tt}^+|}{|\dot{\mathbf{r}}_t^+|^3}=\frac{|\alpha\,\dot{\mathbf{r}}_t^-\times\alpha^2\,\ddot{\mathbf{r}}_{tt}^-|}{|\alpha^3\dot{\mathbf{r}}_t^-|^3}+\frac{|\alpha\,\dot{\mathbf{r}}_t^-\times\beta\,\dot{\mathbf{r}}_t^-|}{|\alpha^3\dot{\mathbf{r}}_t^-|^3}=\kappa^-\right)$$

Görbeinterpoláció – szakaszonként$_2$



Bézier deriváltak:

$$\mathbf{r}^+(0) = \mathbf{d}_0,\ \dot{\mathbf{r}}_t^+(0) = n(\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_0),$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_{tt}^+(0) = n(n-1)(\mathbf{d}_2 - 2\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_0) =$$
$$n(n-1)((\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1) - (\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_0))$$

G^2 feltétel:

$$l = |\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_0|,\ h = |\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1| \sin\varphi,$$

$$\kappa^+ = \frac{|\dot{\mathbf{r}}_t^+ \times \ddot{\mathbf{r}}_{tt}^+|}{|\dot{\mathbf{r}}_t^+|^3} = \frac{(nl)(n(n-1)h)}{(nl)^3} = const.\frac{h}{l^2}$$

(Kontrollpont optimalizálás: marad egy szabad paraméter)

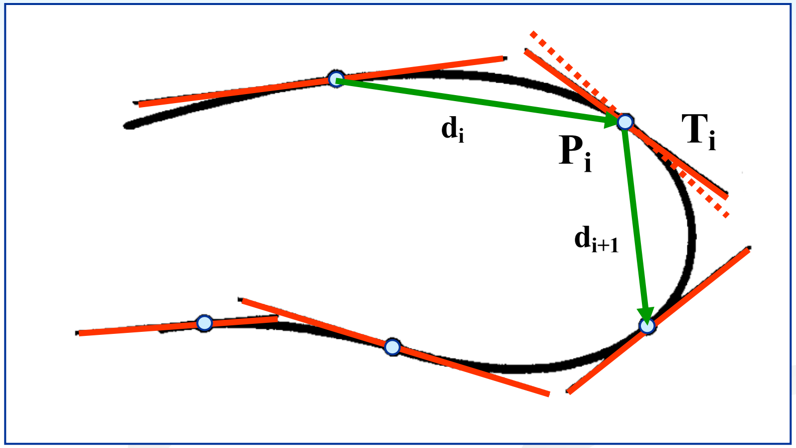
Görbeinterpoláció – szakaszonként$_3$

Módosított feladat (pontok+tangensek+paraméterezés):

$$\{\mathbf{P_i}, \mathbf{T_i}, u_i\}, i = 0, \ldots, n-1$$

$$\Delta_i = u_i - u_{i-1},$$

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}, i = 1, \ldots, n$$



(i) különbségvektorok összegzése:

$$\mathbf{T_i} = \frac{\mathbf{d}_i + \mathbf{d}_{i+1}}{2}$$

(ii) parabola szabály (lásd később):

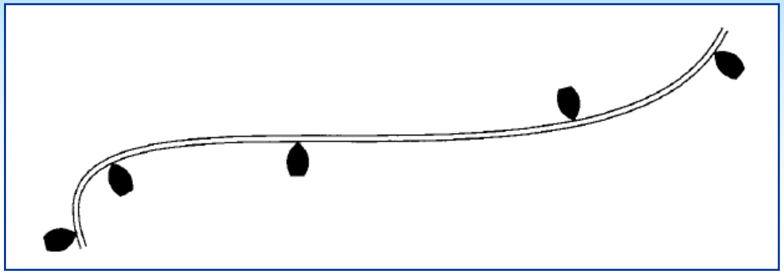
$$\mathbf{T_i} = f(\mathbf{P}_{i-1}, \mathbf{P}_i, \mathbf{P}_{i+1}, \Delta_i, \Delta_{i+1})$$

(iii) Catmull-Rom (G^1): $$\mathbf{T_i} = (1-\tau)\left(\frac{\mathbf{d}_{i+1}}{\Delta_{i+1}} + \frac{\mathbf{d}_i}{\Delta_i}\right)$$

Interpoláció B-spline görbékkel$_1$

Input – n adatpont: $\{\mathbf{P_i}\}, i = 0,\ldots,n-1$

Output - B-spline görbe: $\mathbf{r}(u) = \sum_{j=0}^{L-1} \mathbf{C}_j N_j^3(u)$



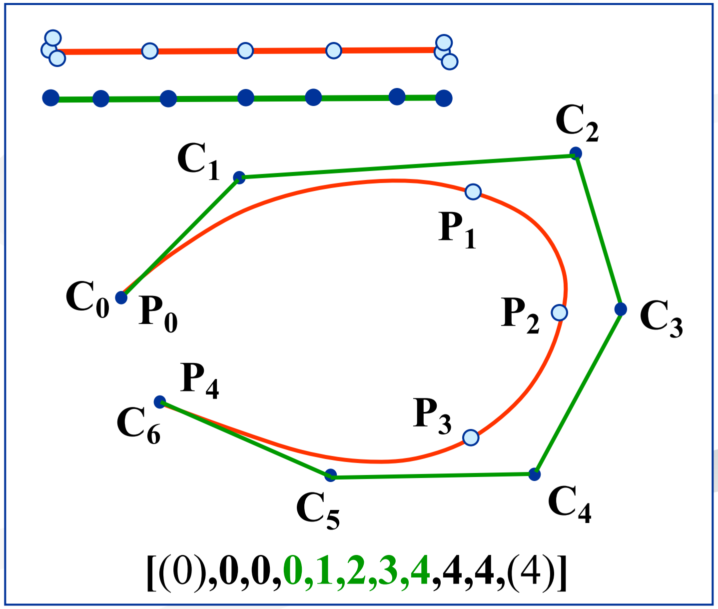
- C^2 folytonos
- belső tangensek kiadódnak
- energia minimalizálás: $E = \int ((\kappa(s))^2 ds$

Definiálandó adatok:

- csomóvektor: $\{u_\mathbf{i}\}, i = 0,\ldots,n-1$
- végponti megkötések

Harmadfokú B-spline görbe:

- adott n $(=5)$ belső csomó és előírt adatpont → n egyenlet: $\mathbf{r}(u_i) = \mathbf{P}_i$
- L $(=7)$ ismeretlen kontrollpont : $\{\mathbf{C}_j\},\ j = 0,\ldots,L-1$
- alulhatározott egyenletrendszer



Interpoláció B-spline görbékkel$_2$

Végpontok: $\mathbf{C}_0 = \mathbf{P}_0, \mathbf{C}_{L-1} = \mathbf{P}_{n-1}$

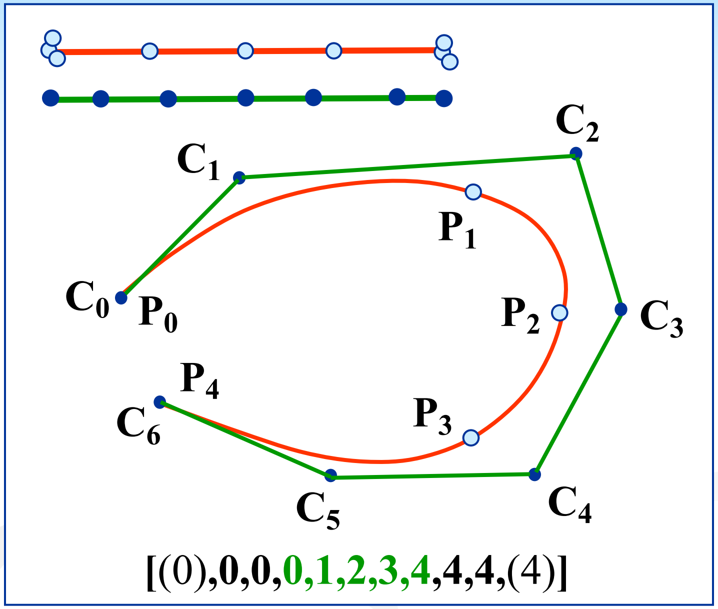
Belső pontok: ($i=1,2,\ldots,n-2$):

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{C}_i N_i^3(u_i) + \mathbf{C}_{i+1} N_{i+1}^3(u_i) + \mathbf{C}_{i+2} N_{i+2}^3(u_i)$$

Végpont melletti ($i=1,\ n-2$) pontok meghatározása előírt első deriváltak alapján:

$$\dot{\mathbf{r}}_u(u_0) = \dot{\mathbf{r}}_{u0} = \frac{3}{u_1 - u_0}(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0), \rightarrow \mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_1(\dot{\mathbf{r}}_{u0})$$

$$\mathbf{P}_1^* = \mathbf{P}_1 - \mathbf{C}_1 N_1^3(u_1) = \mathbf{C}_2 N_2^3(u_1) + \mathbf{C}_3 N_3^3(u_1)$$



Lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{bmatrix} N_2(u_1) & N_3(u_1) & & & \\ N_2(u_2) & N_3(u_2) & N_4(u_2) & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & N_{L-5}(u_{n-3}) & N_{L-4}(u_{n-3}) & N_{L-3}(u_{n-3}) \\ & & & N_{L-4}(u_{n-2}) & N_{L-3}(u_{n-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_3 \\ \cdots \\ \mathbf{C}_{L-4} \\ \mathbf{C}_{L-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^* \\ \mathbf{P}_2 \\ \cdots \\ \mathbf{P}_{n-3} \\ \mathbf{P}_{n-2}^* \end{bmatrix}$$

Interpoláció B-spline görbékkel$_3$

Végponti megkötések:

(i) explicit tangens vektorok

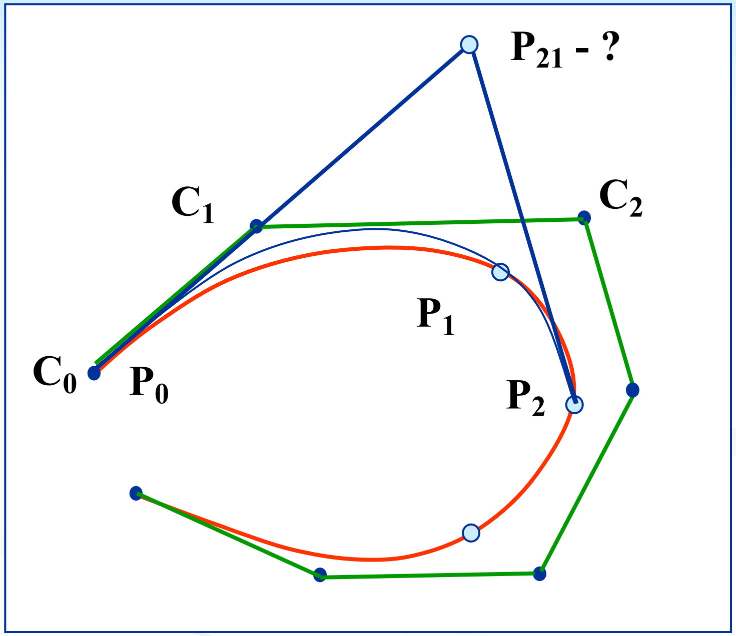
(ii) természetes:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{uu}(u_0) = 0, \quad \ddot{\mathbf{r}}_{uu}(u_{n-1}) = 0$$

(iii) parabolikus (Bessel) - az első három adatpont alapján:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}_0(1-t)^2 + \mathbf{P}_{21}2t(1-t) + \mathbf{P}_2 t^2, \; t \in [0,1]$$

$$t_0 = \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_0}; \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{p}(t_0) \Rightarrow \mathbf{P}_{21} \Rightarrow \mathbf{C}_1$$



Zárt görbék:

- # adatpontok = # kontrollpontok
- nincs további szabadságfok

Ujjgyakorlat*

Parabolikus tangens-becslés három adatpont alapján:

$$\mathbf{r}(u) \rightarrow \mathbf{r}(1) = \mathbf{P}_0 = (0,0); \mathbf{r}(3) = \mathbf{P}_1 = (5,2); \mathbf{r}(4) = \mathbf{P}_2 = (6,0)$$

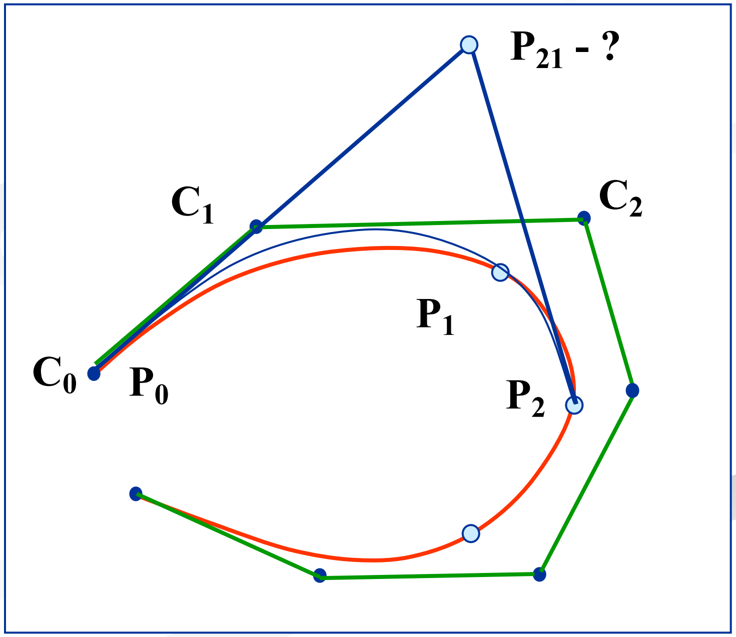
$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}_0(1-t)^2 + \mathbf{P}_{21}2t(1-t) + \mathbf{P}_2 t^2, \, t \in [0,1]$$

Meghatározandó a középső kontroll pont $\mathbf{P}_{21}$, majd a tangens vektor:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{p}(t_0), \, t_0 = \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_0} = \ldots\ldots;$$

$$\mathbf{P}_{21} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = (\ldots\ldots,\ldots\ldots)$$

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = 2(\mathbf{P}_{21} - \mathbf{P}_0) = (\ldots\ldots,\ldots\ldots)$$



Ujjgyakorlat

Parabolikus tangens-becslés három adatpont alapján:

$$\mathbf{r}(u) \to \mathbf{r}(1) = \mathbf{P}_0 = (0,0); \mathbf{r}(3) = \mathbf{P}_1 = (5,2); \mathbf{r}(4) = \mathbf{P}_2 = (6,0)$$

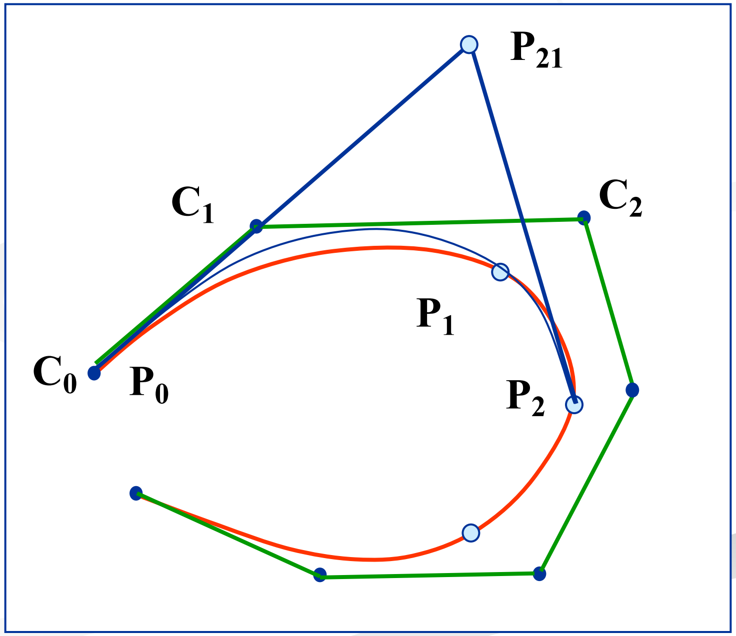
$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}_0(1-t)^2 + \mathbf{P}_{21}2t(1-t) + \mathbf{P}_2 t^2, t \in [0,1]$$

Meghatározandó a középső kontroll pont $\mathbf{P}_{21}$, majd a tangens vektor:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{p}(t_0), t_0 = \frac{2}{3};$$

$$\mathbf{P}_{21} = \frac{\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0(1-t_0)^2 - \mathbf{P}_2 t_0^2}{2t_0(1-t_0)} = (5.25, 4.5)$$

$$\dot{\mathbf{p}}(0) = 2(\mathbf{P}_{21} - \mathbf{P}_0) = (10.5, 9)$$



Interpoláció B-spline görbékkel$_4$

Parametrizáció – csomó értékek (intervallumok) számítása:

$$\Delta_i = u_i - u_{i-1},\ d_i = |\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}|,\ i = 1,\ldots,n$$

(i) egyenletes: $\Delta_i = const.$

(ii) húrhossz szerint: $\dfrac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}} = \dfrac{d_i}{d_{i+1}}$

(iii) centripetális: $\dfrac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}} = \dfrac{\sqrt{d_i}}{\sqrt{d_{i+1}}}$

(iv) Foley-féle (csak 2D-ben):

$$\Delta_i = f(d_{i-1}, d_i, d_{i+1}, \Theta_i, \Theta_{i+1})$$