

3D számítógépes geometria és alakzatrekonstrukció

Racionális görbék és felületek

<http://cg.iit.bme.hu/portal/312>

<https://www.vik.bme.hu/kepzes/targyak/VIIIMA25>

Dr. Várady Tamás, Dr. Salvi Péter
BME, Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Irányítástechnika és Informatika Tanszék

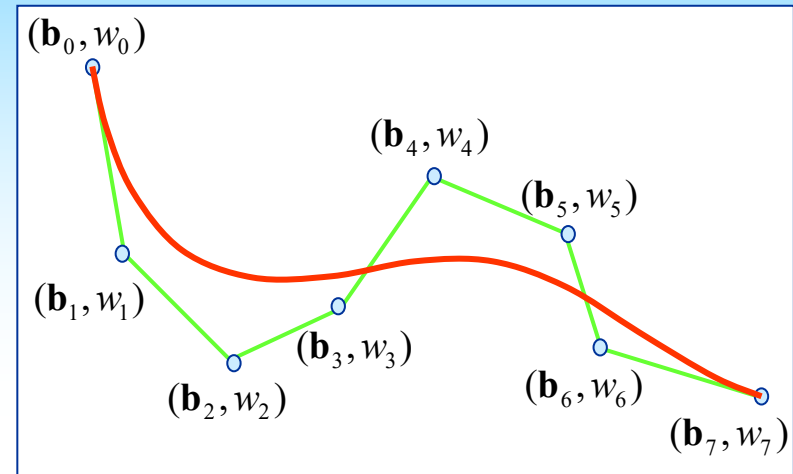


Tartalom

- motiváció
- projektív leképezés, kettősviszony
- kúpszeletek
- körívek
- racionális Bézier görbék
- tulajdonságok, operációk
- racionális B-spline görbék (NURBS)
- racionális felületek

Motiváció

- kontroll poligon \rightarrow kontroll pontok és súlyok
- bázisfüggvények \rightarrow súlyozott racionális polinomok

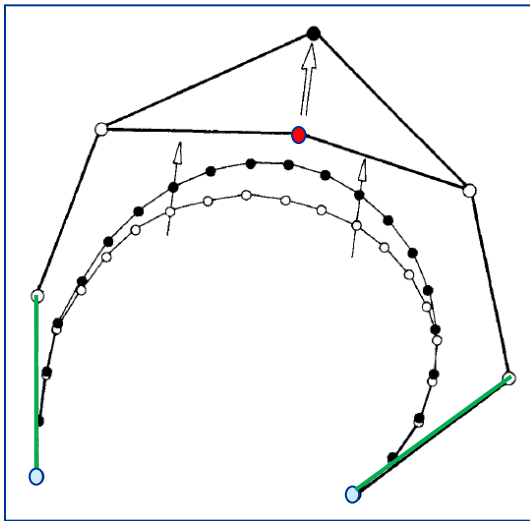


- körök, kúpszeletek pontos reprezentációja
- egyszerű implicit felületek (henger, kúp, gömb, tórusz) parametrikus formában
 - egységes reprezentáció
 - implicit felületeken véges felületdarabok
 - felület-felület metszés – preferencia: implicit x parametrikus
- általános forgásfelületek
- PH-görbék offset görbéinek reprezentálása

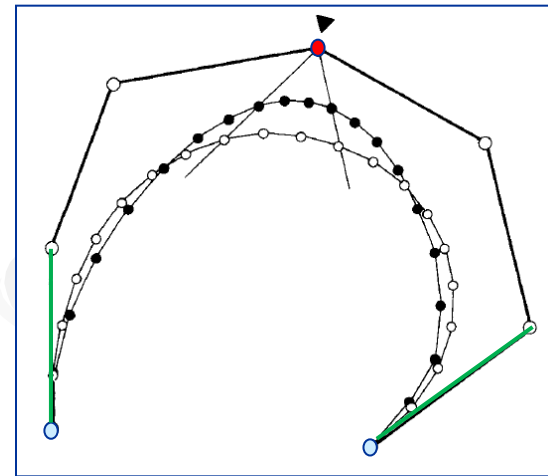
Racionális Bézier görbék....

- racionális Bézier görbe:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i \bar{B}_i^n(t)$$



$$(\mathbf{b}_i, w_i) \Rightarrow (\mathbf{b}_i + \Delta \mathbf{b}, w_i)$$



$$(\mathbf{b}_i, w_i) \Rightarrow (\mathbf{b}_i, w_i + \Delta w)$$

3D → 2D projekció

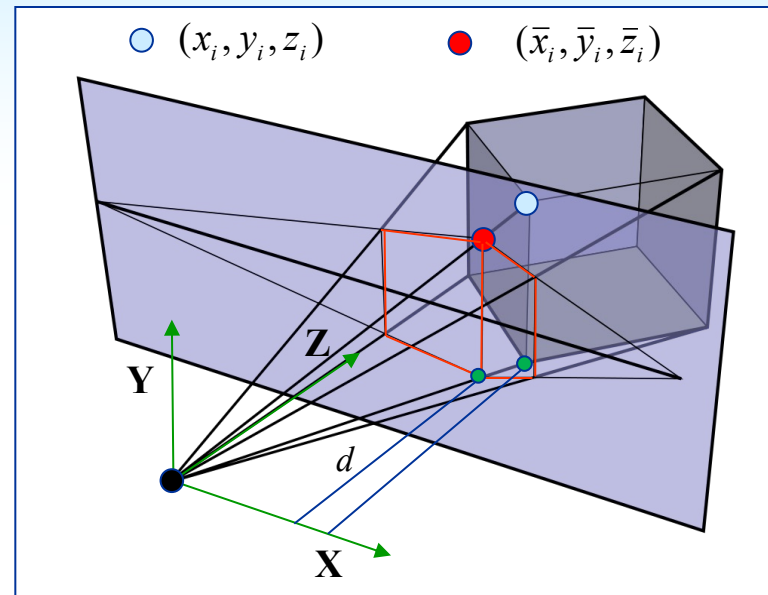
3D: $[x_i, y_i, z_i]$

Képsík: $[\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i]$

$$\frac{x_i}{\bar{x}_i} = \frac{z_i}{d}, \frac{y_i}{\bar{y}_i} = \frac{z_i}{d} \Rightarrow$$

$$\bar{x}_i = d \frac{x_i}{z_i}, \bar{y}_i = d \frac{y_i}{z_i}, \bar{z}_i = d$$

2D: $[x^* = x_i / z_i, y^* = y_i / z_i]$



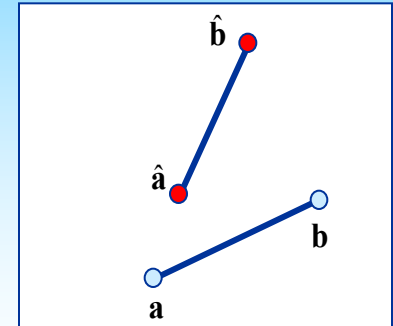
Homogén koordináták: n dimenziós tér, $n+1$ koordináta

$$(a, b, c) \rightarrow (wa, wb, wc, w); \quad (p, q, r, s) \rightarrow \left(\frac{p}{s}, \frac{q}{s}, \frac{r}{s}\right)$$

Projektív leképezés₁

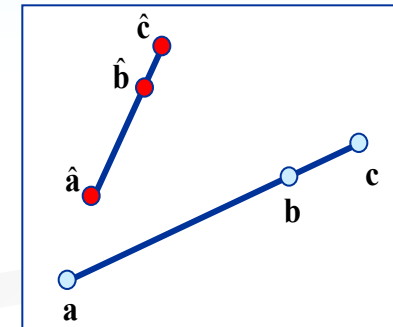
Hasonlósági leképezés

- egyenes \rightarrow egyenes
- szakaszok hossza őrződik: $|\mathbf{ab}| = |\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}|$



Affin leképezés

- egyenes \rightarrow egyenes
- szakaszok aránya őrződik: $|\mathbf{ab}| / |\mathbf{bc}| = |\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}| / |\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{c}}|$

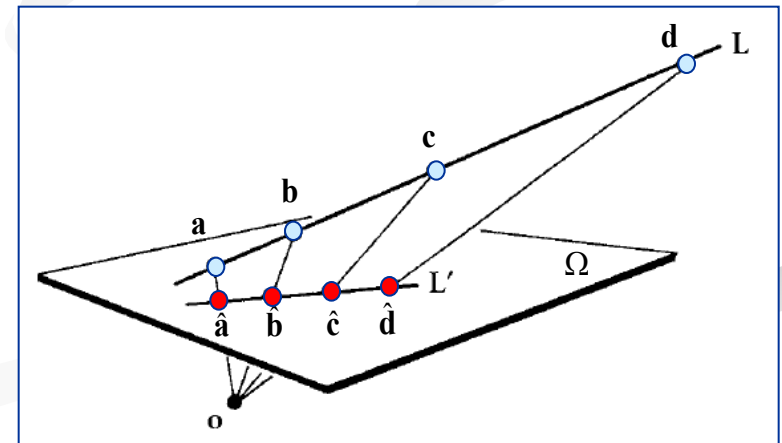


Projektív leképezés

- egyenes \rightarrow egyenes
- négy pont egy egyenesen; kettősviszony (cross ratio) definíció:

$$[\mathbf{abcd}] = \frac{|\mathbf{ab}| / |\mathbf{bd}|}{|\mathbf{ac}| / |\mathbf{cd}|}$$

- o vetítési középpont
- Ω vetítési sík (képsík)
- a kettősviszony őrződik: $[\mathbf{abcd}] = [\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{c}}\hat{\mathbf{d}}]$



Projektív leképezés₂

- Δ területek aránya alapján:

$$|\mathbf{ab}| / |\mathbf{bd}| = \Delta(\mathbf{abo}) / \Delta(\mathbf{bdo}) = (l_1 l_2 \sin \alpha) / (l_2 l_4 \sin (\beta + \gamma))$$

$$|\mathbf{ac}| / |\mathbf{cd}| = \Delta(\mathbf{aco}) / \Delta(\mathbf{cdo}) = (l_1 l_3 \sin (\alpha + \beta)) / (l_3 l_4 \sin \gamma)$$

- \Rightarrow a kettősviszony csak az o-beli szögektől függ

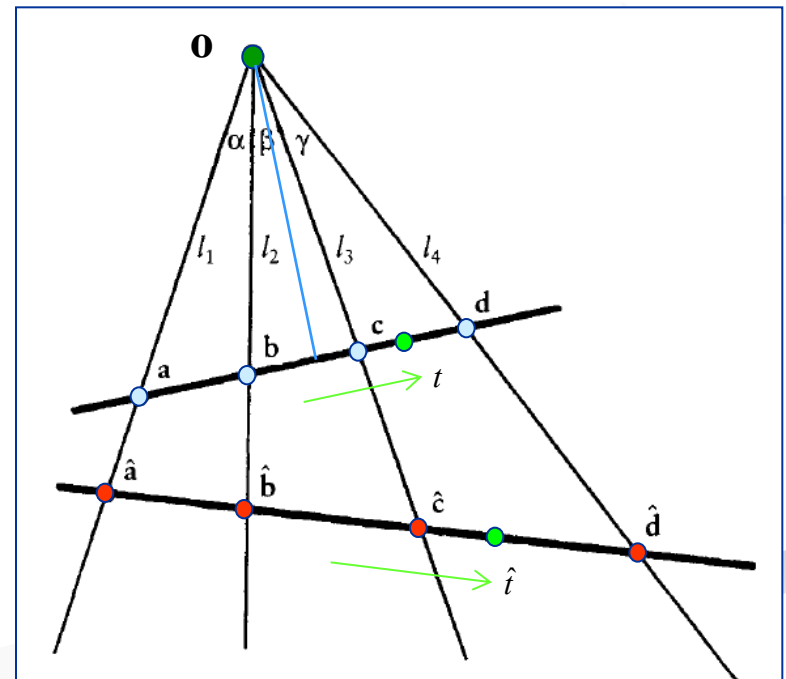
$$[\mathbf{abcd}] = \frac{|\mathbf{ab}| / |\mathbf{bd}|}{|\mathbf{ac}| / |\mathbf{cd}|} = f(\alpha, \beta, \gamma)$$

- legyen

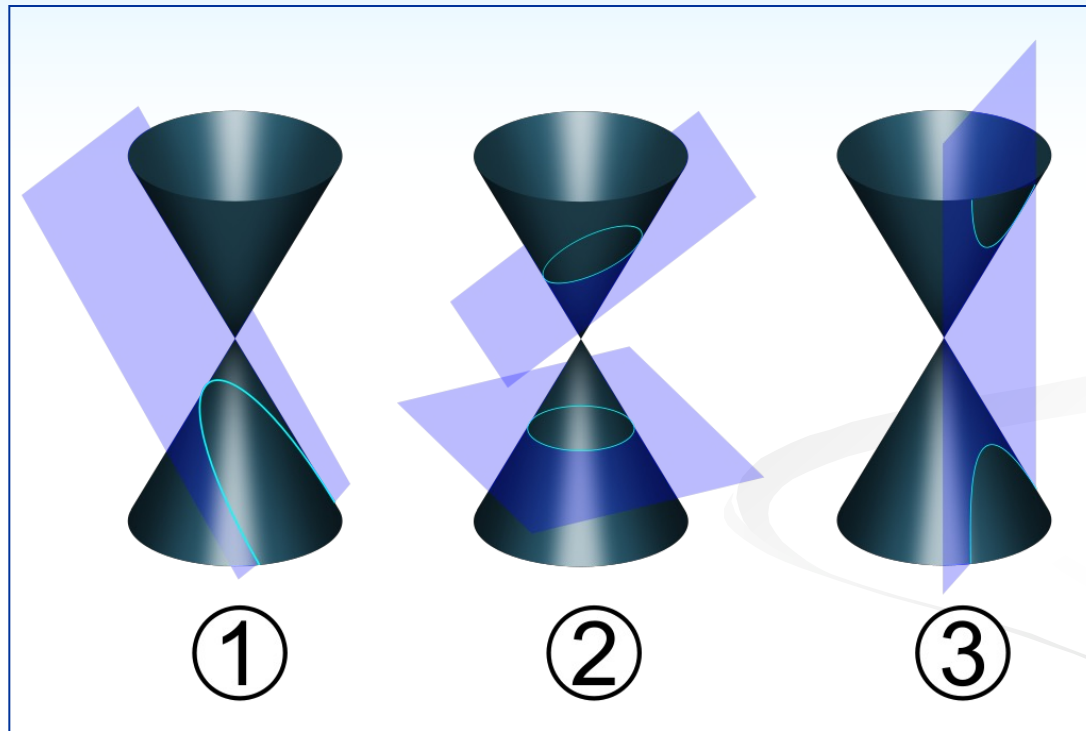
$$[\mathbf{abcd}] \rightarrow [0bt1]; \quad [\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{c}}\hat{\mathbf{d}}] \rightarrow [0\hat{b}\hat{t}1]$$

- a két egyenes közötti parametrizáció racionális, felírható az alábbi alakban:

$$\frac{b}{1-b} = \frac{\hat{b}}{1-\hat{b}} \Rightarrow \frac{t}{1-t} = \rho \quad \hat{t} = \frac{t}{\rho(1-t) + t}$$



Kúpszeletek



[wikimedia/Pbroks]

1. Parabola, 2. Kör és ellipszis, 3. Hiperbola

Kúpszeletek₁

- kúpszelet létrehozása projekcióval

- térbeli parabola síkba vetítése

- a projekció középpontja az origó

- a projekció síkja a $z=1$ sík

$$2D : \mathbf{b} = [b_x, b_y]; \quad 3D : \mathbf{b}^* = [b_x, b_y, 1]$$

- vetítés:

$$3D : \mathbf{p} = [p_x, p_y, p_z] \rightarrow 2D : \mathbf{p}^* = [p_x / p_z, p_y / p_z, 1]$$

- tetszőleges w -re (projektív egyenes)

$$[b_x, b_y] \rightarrow [wb_x, wb_y, w]; \quad [\mathbf{b}] \rightarrow [w\mathbf{b}, w] = \mathbf{p}$$

- parabola (3D):

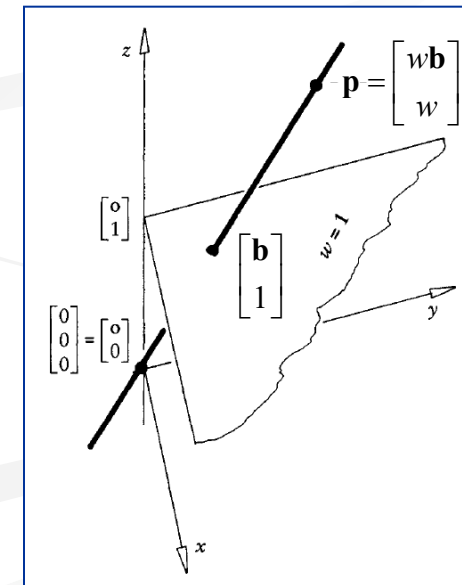
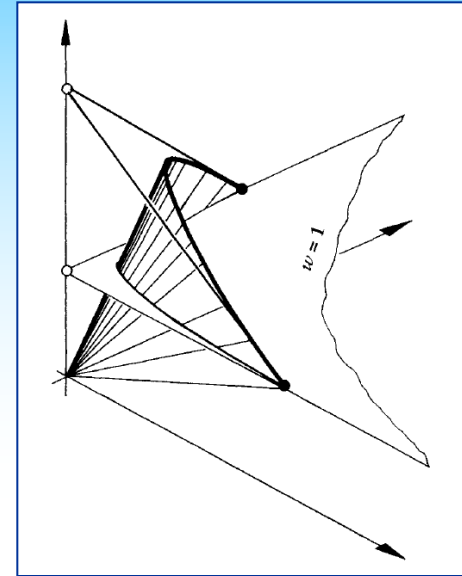
$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 B_0^2(t) + \mathbf{p}_1 B_1^2(t) + \mathbf{p}_2 B_2^2(t)$$

- kúpszelet (2D):

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{b}_0 \bar{B}_0^2(t) + \mathbf{b}_1 \bar{B}_1^2(t) + \mathbf{b}_2 \bar{B}_2^2(t),$$

$$\mathbf{p}_i = [w_i \mathbf{b}_i, w_i], \quad i = 0, 1, 2$$

($\bar{B}_i^2(t)$ – következő slide)



Ismétlés

- Pont

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{x_0}{z_0} \\ \frac{y_0}{z_0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Görbe

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\mathbf{p}(t)}{w(t)} = \begin{bmatrix} \frac{x(t)}{w(t)} \\ \frac{y(t)}{w(t)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 3D parabola

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= \mathbf{p}_0 B_0^2(t) + \mathbf{p}_1 B_1^2(t) + \mathbf{p}_2 B_2^2(t) = \frac{\mathbf{p}_0}{w_0} w_0 B_0^2(t) + \frac{\mathbf{p}_1}{w_1} w_1 B_1^2(t) + \frac{\mathbf{p}_2}{w_2} w_2 B_2^2(t) = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ 1 \end{bmatrix} w_0 B_0^2(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ 1 \end{bmatrix} w_1 B_1^2(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2 \\ 1 \end{bmatrix} w_2 B_2^2(t) \end{aligned}$$

Kúpszeletek₂

- parabola (3D):

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 B_0^2(t) + \mathbf{p}_1 B_1^2(t) + \mathbf{p}_2 B_2^2(t) = \begin{bmatrix} p_{x0} \\ p_{y0} \\ p_{z0} \end{bmatrix} B_0^2(t) + \begin{bmatrix} p_{x1} \\ p_{y1} \\ p_{z1} \end{bmatrix} B_1^2(t) + \begin{bmatrix} p_{x2} \\ p_{y2} \\ p_{z2} \end{bmatrix} B_2^2(t)$$

- parabola kontroll pontok homogén koordinátákkal:

$$\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} p_{xi} \\ p_{yi} \\ p_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_i \frac{p_{xi}}{w_i} \\ w_i \frac{p_{yi}}{w_i} \\ w_i \frac{p_{zi}}{w_i} \end{bmatrix} = w_i \begin{bmatrix} b_{xi} \\ b_{yi} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}^*(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ 1 \end{bmatrix} w_0 B_0^2(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ 1 \end{bmatrix} w_1 B_1^2(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2 \\ 1 \end{bmatrix} w_2 B_2^2(t),$$

- 3D parabola projektálva → 2D kúpszelet:

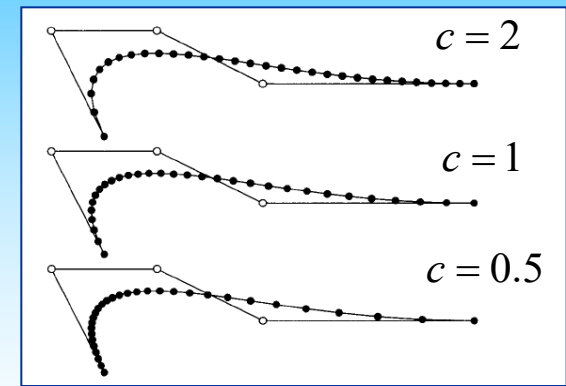
$$\mathbf{c}(t) = \frac{\mathbf{p}^*(t)}{w(t)} = \frac{\mathbf{b}_0 w_0 B_0^2(t) + \mathbf{b}_1 w_1 B_1^2(t) + \mathbf{b}_2 w_2 B_2^2(t)}{w_0 B_0^2(t) + w_1 B_1^2(t) + w_2 B_2^2(t)} = \mathbf{b}_0 \bar{B}_0^2(t) + \mathbf{b}_1 \bar{B}_1^2(t) + \mathbf{b}_2 \bar{B}_2^2(t)$$

- racionális bázisfüggvények: $\bar{B}_i^2(t) = \frac{w_i B_i^2(t)}{w_0 B_0^2(t) + w_1 B_1^2(t) + w_2 B_2^2(t)}$

Kúpszeletek₃

- racionális vektor polinom:

$$\mathbf{c}(t) = \frac{w_0 \mathbf{b}_0 B_0^2(t) + w_1 \mathbf{b}_1 B_1^2(t) + w_2 \mathbf{b}_2 B_2^2(t)}{w_0 B_0^2(t) + w_1 B_1^2(t) + w_2 B_2^2(t)}$$



- a racionális görbét mindig át lehet paraméterezni:

$$t \rightarrow t^* \quad , \quad t = \frac{t^*}{\rho(1-t^*) + t^*}, \quad [w_0, w_1, w_2] \rightarrow [1, w_1^*, 1]$$

$$T = \rho(1-t^*) + t^*; \quad t = \frac{1}{T} t^*; \quad (1-t) = \frac{1}{T} \rho(1-t^*)$$

$$\underline{w_0(1-t)^2 + w_1 2t(1-t)^2 + w_2 t^2} = \frac{w_2}{T^2} \left(\rho^2 \frac{w_0}{w_2} (1-t^*)^2 + \rho \frac{w_1}{w_2} 2(1-t^*)t^* + t^{*2} \right)$$

$$\Rightarrow w_0^* (1-t^*)^2 + w_1^* 2(1-t^*)t^* + w_2^* t^{*2}$$

$$w_2^* := 1; \quad w_0^* = \rho^2 \frac{w_0}{w_2} := 1 \rightarrow \rho = \sqrt{\frac{w_2}{w_0}}; \quad w_1^* = \rho \frac{w_1}{w_2} = \frac{w_1}{\sqrt{w_0 w_2}}$$

$$\mathbf{c}(t^*) = \frac{\mathbf{b}_0 B_0^2(t^*) + w_1^* \mathbf{b}_1 B_1^2(t^*) + \mathbf{b}_2 B_2^2(t^*)}{B_0^2(t^*) + w_1^* B_1^2(t^*) + B_2^2(t^*)}$$

Kúpszeletek₄

- racionális vektor-polinom:

$$\mathbf{c}(t) = \frac{\mathbf{b}_0 B_0^2(t) + w_1^* \mathbf{b}_1 B_1^2(t) + \mathbf{b}_2 B_2^2(t)}{B_0^2(t) + w_1^* B_1^2(t) + B_2^2(t)}$$

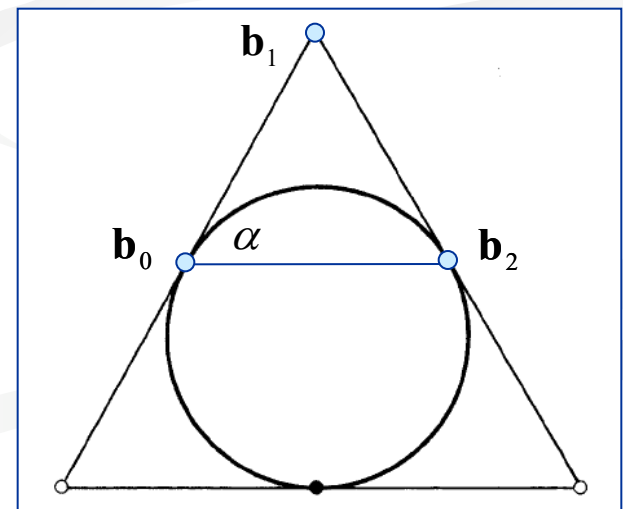
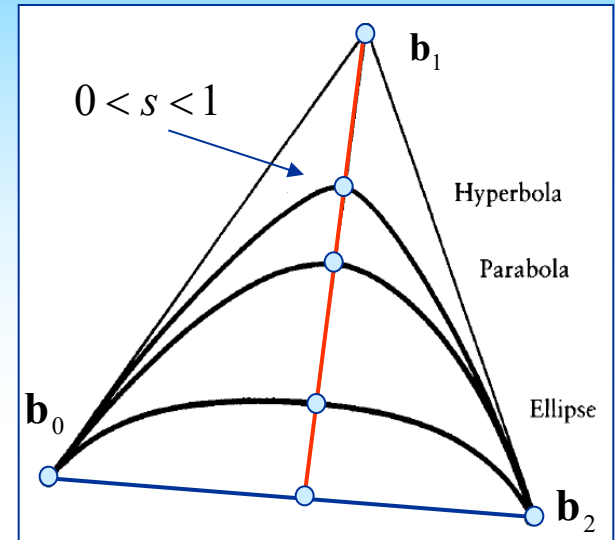
- kúpszeletek osztályozása:

$$s = \frac{w_1^*}{1 + w_1^*}$$

- parabola $w_1^* = 1, s = 0.5$
- hiperbola $w_1^* > 1, s > 0.5$
- ellipszis $w_1^* < 1, s < 0.5$

- kör: $w_1^* = \cos \alpha$

$$\mathbf{c}(t) = \frac{\mathbf{b}_0 B_0^2(t) + \cos \alpha \mathbf{b}_1 B_1^2(t) + \mathbf{b}_2 B_2^2(t)}{B_0^2(t) + \cos \alpha B_1^2(t) + B_2^2(t)}$$



Ujjgyakorlat*

$$\mathbf{c}(t) = \frac{\mathbf{b}_0(1-t)^2 + w_1 \mathbf{b}_1 2(1-t)t + \mathbf{b}_2 t^2}{(1-t)^2 + w_1 2(1-t)t + t^2}$$

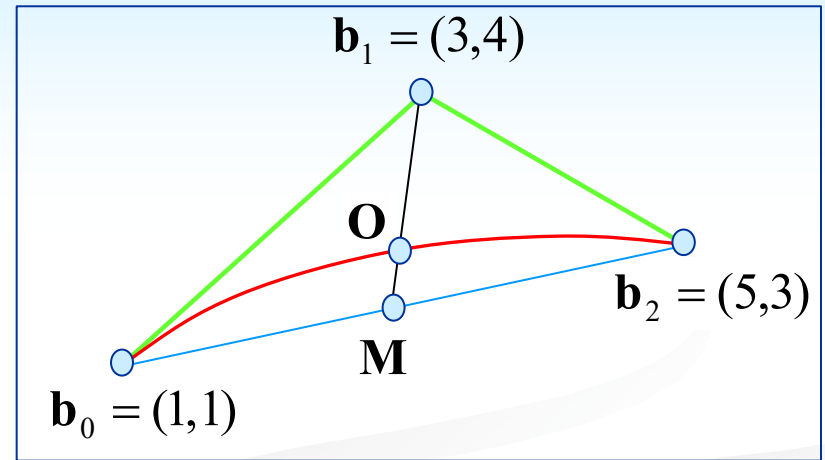
- hozzunk létre egy ellipszisívet, amelyre $s = 0.25$

$$s = \frac{w_1}{1 + w_1} \rightarrow w_1(s) = \frac{\dots}{\dots}$$

$$w_1 = \dots; \quad \mathbf{c}(0.5) = \frac{\dots}{\dots} = (\dots, \dots)$$

- ellenőrzésként határozzuk meg az **M** felezőpont, majd az **O** negyedelő pont ($s = 0.25$) koordinátáit

$$\mathbf{M} = (\dots, \dots), \quad \mathbf{O} = (\dots, \dots)$$



Ujjgyakorlat

$$\mathbf{c}(t) = \frac{\mathbf{b}_0(1-t)^2 + w_1 \mathbf{b}_1 2(1-t)t + \mathbf{b}_2 t^2}{(1-t)^2 + w_1 2(1-t)t + t^2}$$

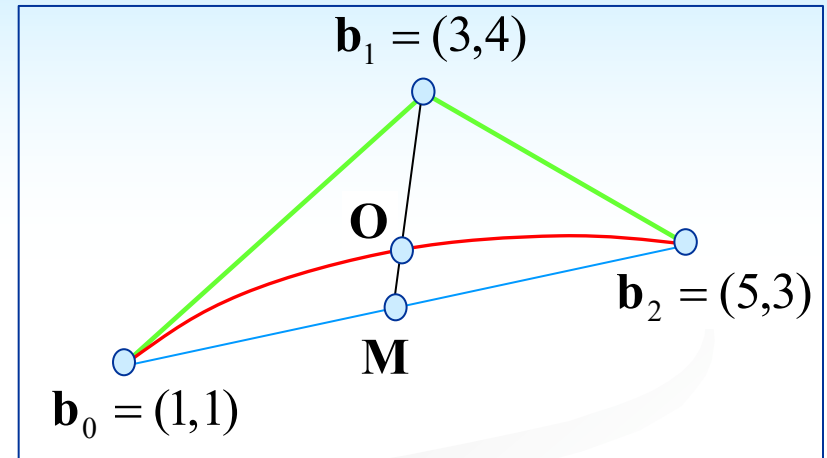
- hozzunk létre egy ellipszisívet, amelyre $s = 0.25$

$$s = \frac{w_1}{1 + w_1} \rightarrow w_1(s) = \frac{s}{1 - s}$$

$$w_1 = \frac{1}{3}; \quad \mathbf{c}(0.5) = \frac{\frac{1}{4}[(1,1) + 2w_1(3,4) + (5,3)]}{\frac{1}{4}[1 + 2w_1 + 1]} = (3, 2.5)$$

- ellenőrzésként határozzuk meg az **M** felezőpont, majd az **O** negyedelő pont ($s = 0.25$) koordinátáit

$$\mathbf{M} = (3, 2), \quad \mathbf{O} = (3, 2.5)$$



Körív egyenlete

- egyenlet:

$$\mathbf{c}(t) = \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} (1-t)^2 + \cos \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ \operatorname{tg} \alpha \end{bmatrix} 2(1-t)t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t^2}{(1-t)^2 + \cos \alpha 2(1-t)t + t^2}$$

- egyenletek (\mathbf{o} középpont, R sugár):

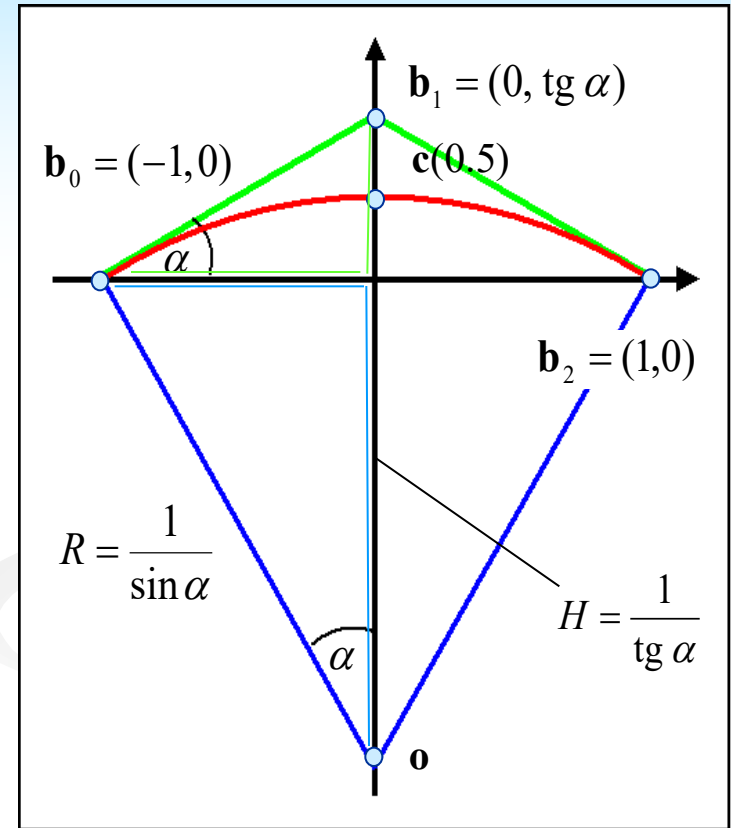
$$R \sin \alpha = 1, H \operatorname{tg} \alpha = 1$$

- határozzuk meg a görbe felezőpontját; a fenti súllyal kört kapunk, ha az alábbi egyenlet teljesül:

$$H + c_y(0.5) = R$$

- félkörív: $\alpha \rightarrow 90^\circ$

$$\mathbf{c}(t) = \left(\frac{-(1-t)^2 + t^2}{(1-t)^2 + t^2}, \frac{2t(1-t)}{(1-t)^2 + t^2} \right); \quad u = \frac{1-t}{t} \Rightarrow \mathbf{c}(u) = \left(\frac{1-u^2}{u^2+1}, \frac{2u}{u^2+1} \right)$$



Ujjgyakorlat*

- egyenlet:

$$\mathbf{c}(t) = \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} (1-t)^2 + \cos \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ \operatorname{tg} \alpha \end{bmatrix} 2(1-t)t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t^2}{(1-t)^2 + \cos \alpha 2(1-t)t + t^2}$$

- egyenletek (\mathbf{o} középpont, R sugár):

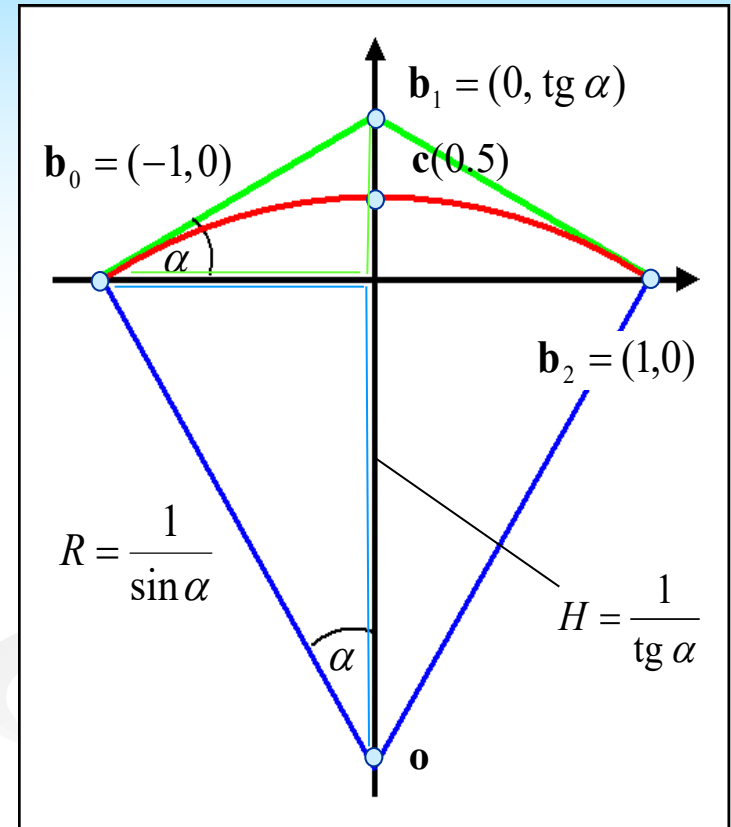
$$R \sin \alpha = 1, H \operatorname{tg} \alpha = 1$$

- a felezőpont y koordinátája:

$$c_y(0.5) = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

- fejezzük ki R -t és H -t és bizonyítsuk be, hogy az egyenlet teljesül

$$H + c_y(0.5) = R \rightarrow \frac{\dots\dots}{\dots\dots} + \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{1}{\dots\dots} \rightarrow \dots\dots\dots$$



Ujjgyakorlat

- egyenlet:

$$\mathbf{c}(t) = \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} (1-t)^2 + \cos \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ \operatorname{tg} \alpha \end{bmatrix} 2(1-t)t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t^2}{(1-t)^2 + \cos \alpha 2(1-t)t + t^2}$$

- egyenletek (o középpont, R sugár):

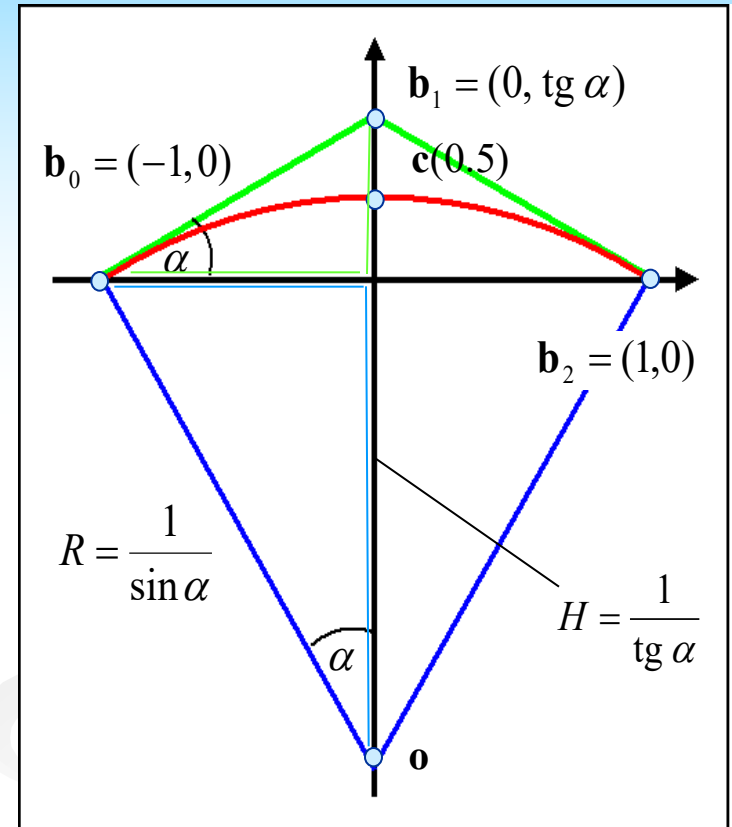
$$R \sin \alpha = 1, H \operatorname{tg} \alpha = 1$$

- a felezőpont y koordinátája:

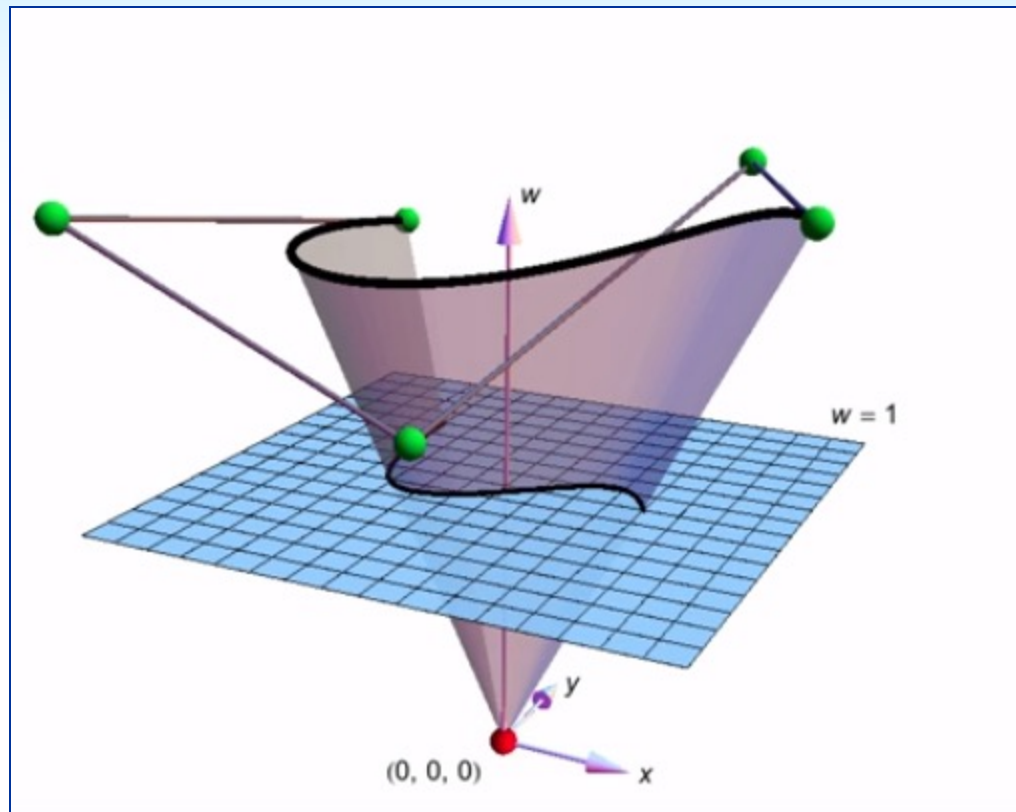
$$c_y(0.5) = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

- fejezzük ki R -t és H -t és bizonyítsuk be, hogy az egyenlet teljesül

$$H + c_y(0.5) = R \rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} \rightarrow \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$



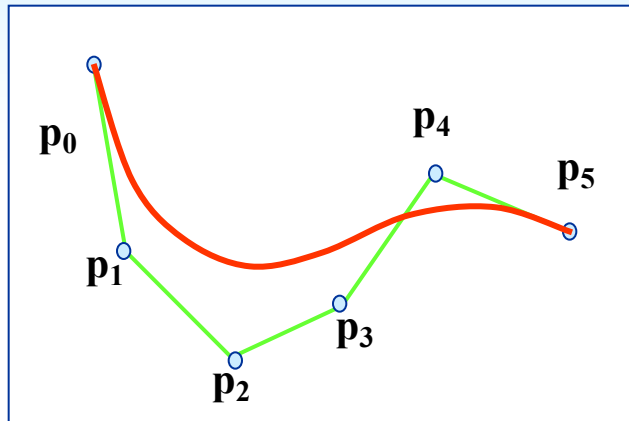
Racionális Bézier görbék



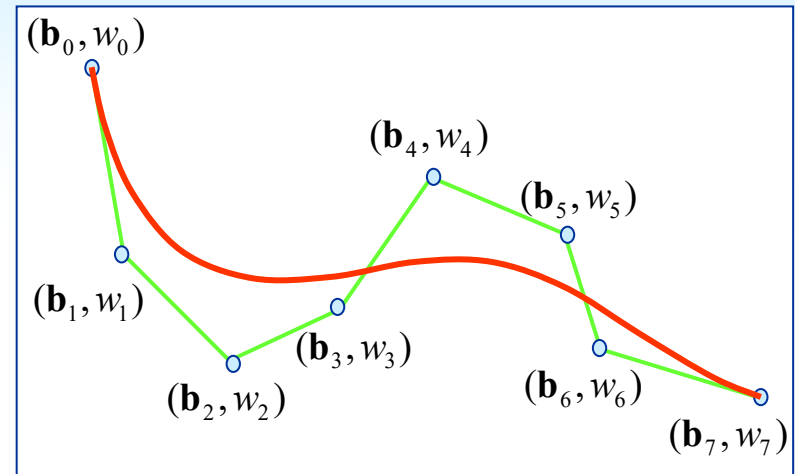
[codicodemonkey]

A projekció szemléltetése (3D→2D)

Polinomiális és racionális Bézier görbék



$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^5 \mathbf{p}_i B_i^5(t)$$



$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i \bar{B}_i^n(t), \bar{B}_i^n(t) \geq 0, \sum_{i=0}^n \bar{B}_i^n(t) = 1$$

$$(x, y, w) \rightarrow \left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w} \right)$$

$$\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t), w(t)) \rightarrow \mathbf{b}(t) = \left(\frac{x(t)}{w(t)}, \frac{y(t)}{w(t)} \right)$$

Racionális Bézier görbék₁

- 4D **polinomiális** Bézier görbe, kontroll pontok: \mathbf{p}_i

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 B_0^n(t) + \mathbf{p}_1 B_1^n(t) + \dots + \mathbf{p}_n B_n^n(t) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ w_0 \end{bmatrix} B_0^n(t) + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{bmatrix} B_1^n(t) + \dots + \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ w_n \end{bmatrix} B_n^n(t)$$

- homogén koordináták, 3D kontroll pontok: $[x_i, y_i, z_i, w_i,] \rightarrow [w_i \mathbf{b}_i, w_i]$

$$\mathbf{p}^*(t) = (x(t), y(t), z(t), w(t)) = \begin{bmatrix} w_0 \mathbf{b}_0 \\ w_0 \end{bmatrix} B_0^n(t) + \begin{bmatrix} w_1 \mathbf{b}_1 \\ w_1 \end{bmatrix} B_1^n(t) + \dots + \begin{bmatrix} w_n \mathbf{b}_n \\ w_n \end{bmatrix} B_n^n(t)$$

- 3D **racionális** Bézier görbe, projekció után:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{p}^*(t)}{w(t)} = \frac{w_0 \mathbf{b}_0 B_0^n(t) + w_1 \mathbf{b}_1 B_1^n(t) + \dots + w_n \mathbf{b}_n B_n^n(t)}{w_0 B_0^n(t) + w_1 B_1^n(t) + \dots + w_n B_n^n(t)} = \mathbf{b}_0 \bar{B}_0^n(t) + \mathbf{b}_1 \bar{B}_1^n(t) + \dots + \mathbf{b}_n \bar{B}_n^n(t)$$

- racionális bázisfüggvények: $\bar{B}_i^n(t) = \frac{w_i B_i^n(t)}{w_0 B_0^n(t) + w_1 B_1^n(t) + \dots + w_n B_n^n(t)}$

Racionális Bézier görbék₂

- racionális Bézier görbe:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i \bar{B}_i^n(t)$$

- tulajdonságok

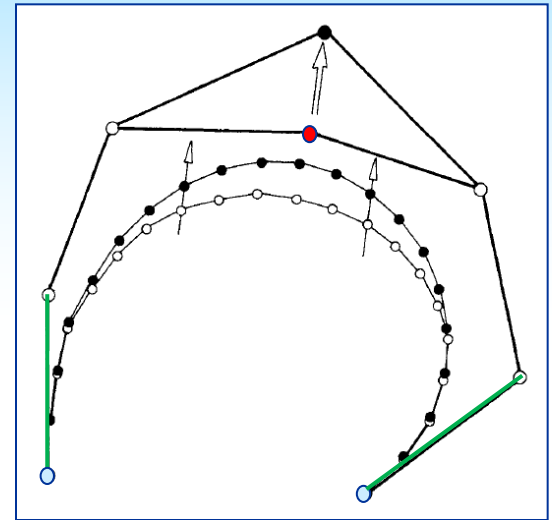
- a kontroll poligon approximálja a görbét
- a görbe első és utolsó pontja, valamint a végtangensek származtathatók a poligonból
- a súly módosítása a kontrollpont felé húzza a görbét

- racionális súlyfüggvények

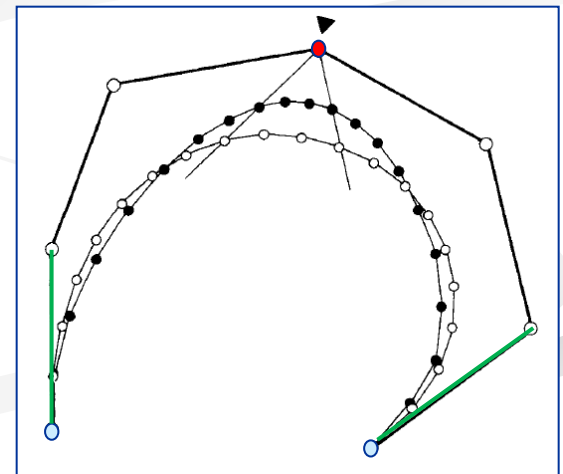
- függnek a súlyoktól!

$$\sum_{i=0}^n \bar{B}_i^n(t) = 1$$

- ha az összes $w_i > 0$, a konvex burkoló és a változást csökkenő tulajdonságok érvényben maradnak



$$(\mathbf{b}_i, w_i) \Rightarrow (\mathbf{b}_i + \Delta \mathbf{b}, w_i)$$



$$(\mathbf{b}_i, w_i) \Rightarrow (\mathbf{b}_i, w_i + \Delta w)$$

Racionális Bézier görbék₃

- átparaméterezés $w_i^* = c^i w_i$
- de Casteljau algoritmus (ismételt lineáris interpoláció)

(a) ismételt osztás a 4D homogén koordinátarendszerben, utána vetítés 3D-be

$$\mathbf{p}_i^r := (1-t)\mathbf{p}_i^{r-1} + t\mathbf{p}_{i+1}^{r-1}$$

(b) osztás 3D-ben

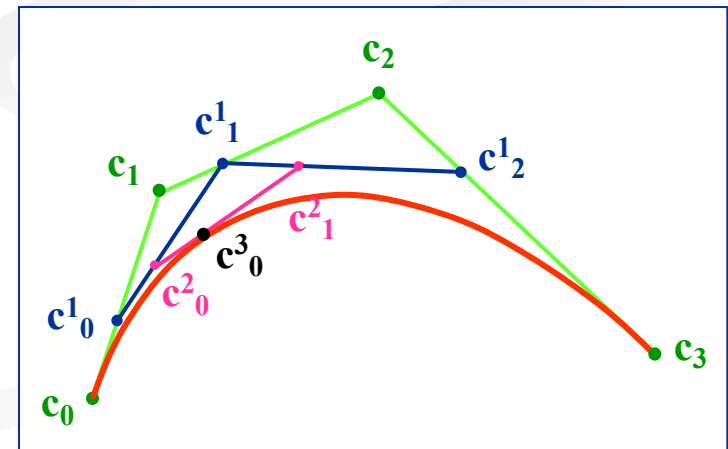
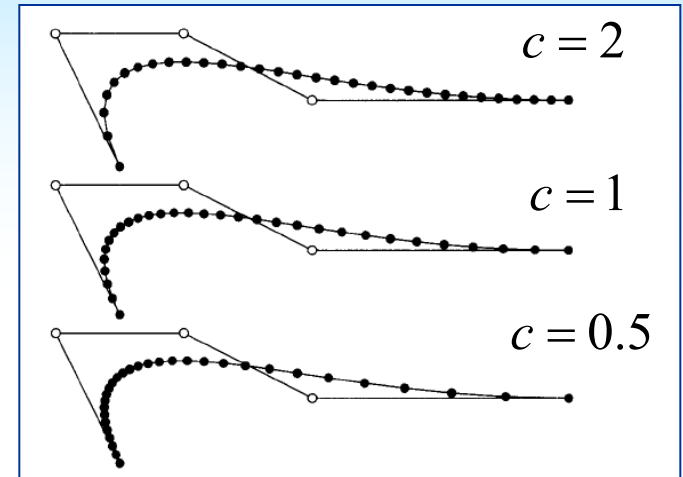
$$w_i^r := (1-t)w_i^{r-1} + t w_{i+1}^{r-1}$$

$$w_i^r \mathbf{b}_i^r := (1-t)w_i^{r-1} \mathbf{b}_i^{r-1} + t w_{i+1}^{r-1} \mathbf{b}_{i+1}^{r-1}$$

- derivált számítás (bonyolult)

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{p}(t)}{w(t)}; \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{1}{w(t)} [\dot{\mathbf{p}}(t) - \dot{w}(t)\mathbf{r}(t)]$$

$$\dot{\mathbf{r}}(0) = \frac{n w_1}{w_0} [\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0]; \quad \dot{\mathbf{r}}(1) = \frac{n w_{n-1}}{w_n} [\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}]$$



Racionális Bézier felületek

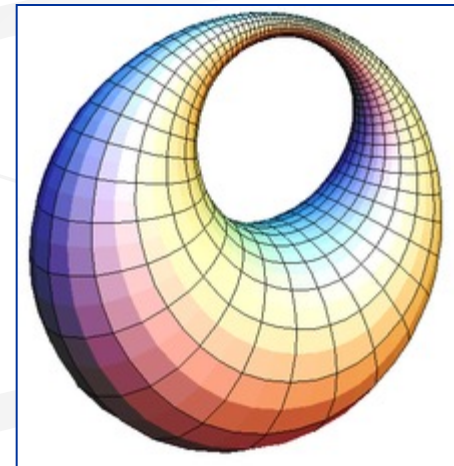
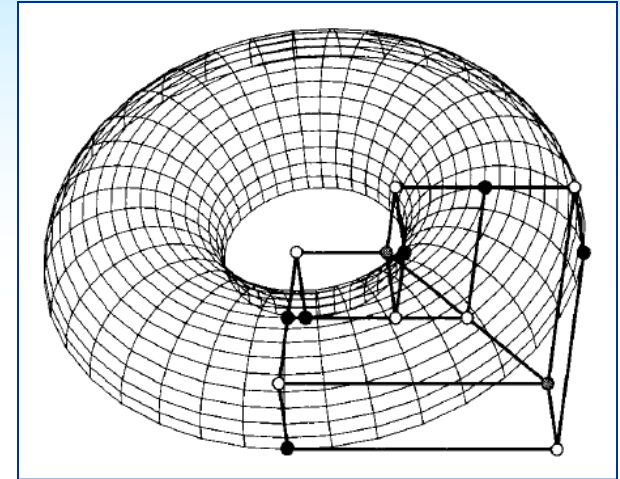
- racionális Bézier görbe:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \mathbf{c}_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_j^n(t)}$$

- racionális Bézier felület:

$$\mathbf{s}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} \mathbf{c}_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)}$$

- elsődleges alkalmazás
 - szabályos másodrendű felületek
 - forgásfelületek
- speciális felületek: létezik implicit és parametrikus reprezentáció



[wiki]

Dupin cyclides

Racionális B-spline (NURBS) görbék és felületek

- NURBS = Non-uniform Rational B-spline; egységes reprezentáció (!?)
- racionális B-spline görbe - ez is projektív alapon keletkezik

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^L w_i \mathbf{d}_i N_i^n(t)}{\sum_{j=0}^L w_j N_j^n(t)}$$

- adott csomóvektor és súlyok esetén a racionális súlyfüggvényeket meg lehet határozni
- racionális B-spline felület:

$$\mathbf{s}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} \mathbf{d}_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v)}$$

- elsődleges alkalmazás - forgásfelületek

