3D számítógépes geometria és alakzatrekonstrukció

6. B-spline görbék és felületek

http://cg.iit.bme.hu/portal/node/312
https://www.vik.bme.hu/kepzes/targyak/VIIIMA01

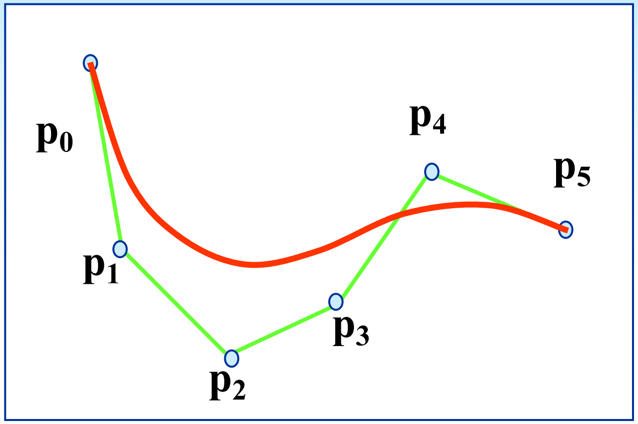
Dr. Várady Tamás, Dr. Salvi Péter
BME, Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Irányítástechnika és Informatika Tanszék

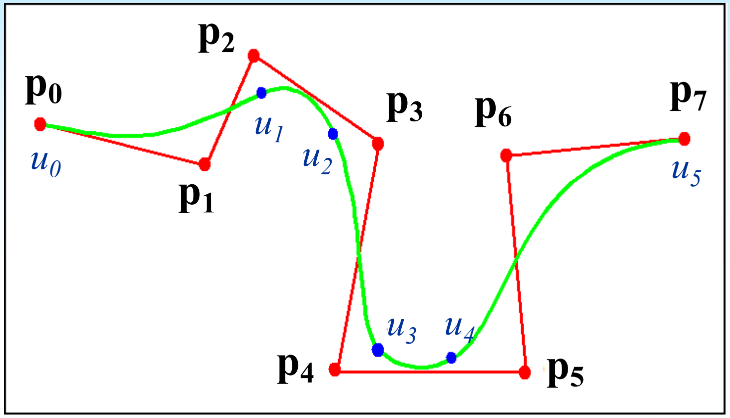
Tartalom

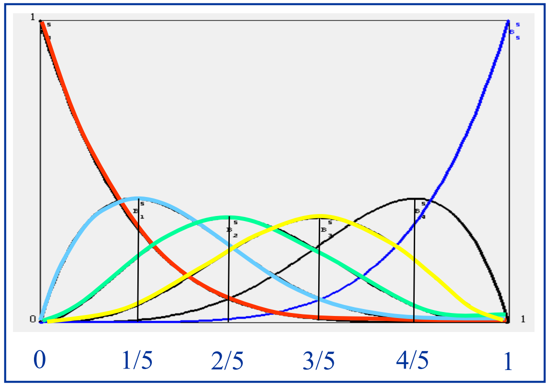
- B-spline görbék
  - bázisfüggvények
  - poláris formulák
  - tulajdonságok
  - egyszerű műveletek
- B-spline felületek

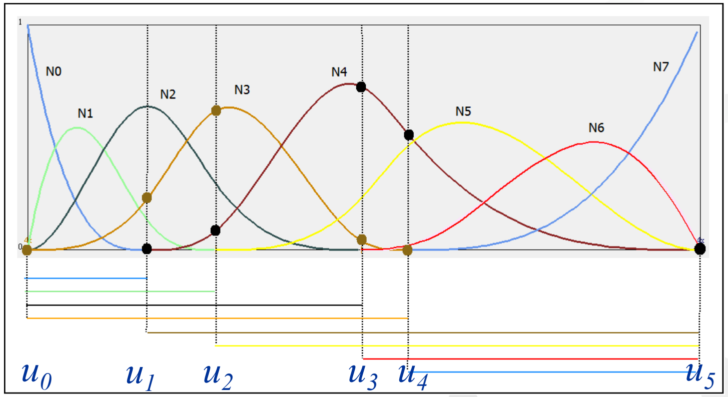
Bézier vs. B-spline

B-spline görbe









$$\mathbf{r}(u)=\sum_{i=0}^{5}\mathbf{p}_i B_i^5(u)$$

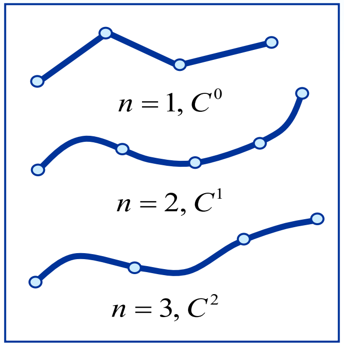
$n=5,\ [0,1],$
$[p_0,\dots,p_5]$

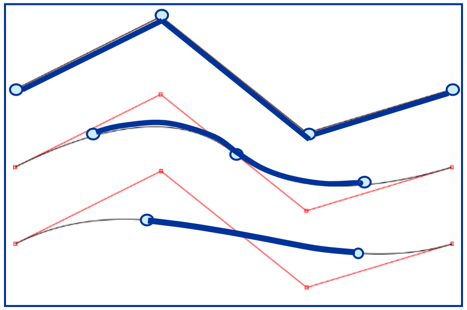
$$\mathbf{r}(u)=\sum_{i=0}^{7}\mathbf{p}_i N_i^n(u)$$

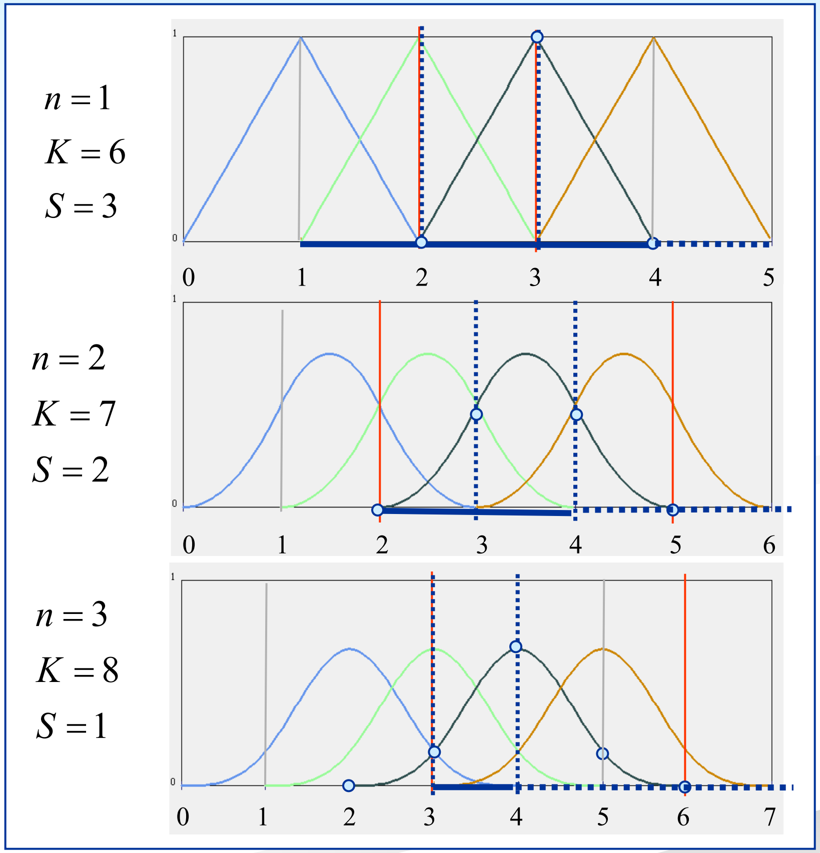
$n=3, [u_0^*,u_1,\dots,u_5^*],$
$[p_0,\dots,p_7]$

B-spline bázisfüggvények$_1$

Cél: szakaszokból álló (piecewise),
simán kapcsolódó vektorpolinomok
létrehozása







fokszám: n

parametrizálás – csomóvektor (knots) (K)

$$[u_0, u_1, \ldots, u_{K-1}].$$

\# bázisfüggvények = \# kontroll pontok

$$N_i^n(u) \geq 0; \quad u \in [u_i, u_{i+n+1}] \leftrightarrow \quad \mathbf{P}_i$$

\# "valódi" domén intervallumok = \# görbe-szegmensek (S)

B-spline bázisfüggvények$_2$

egyenletes (uniform) csomóvektor:

$$[0, 1, \ldots, K-1]$$

nem egyenletes (non-uniform) csomóvektor: $[u_0, u_1, \ldots, u_{K-1}]$

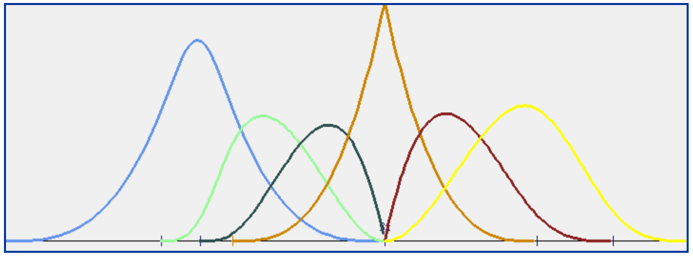
bázisfüggvények

$$\sum_{i=0}^{n} N_i^n(u) = 1, \quad u \in [u_n, u_{K-1-n}]$$

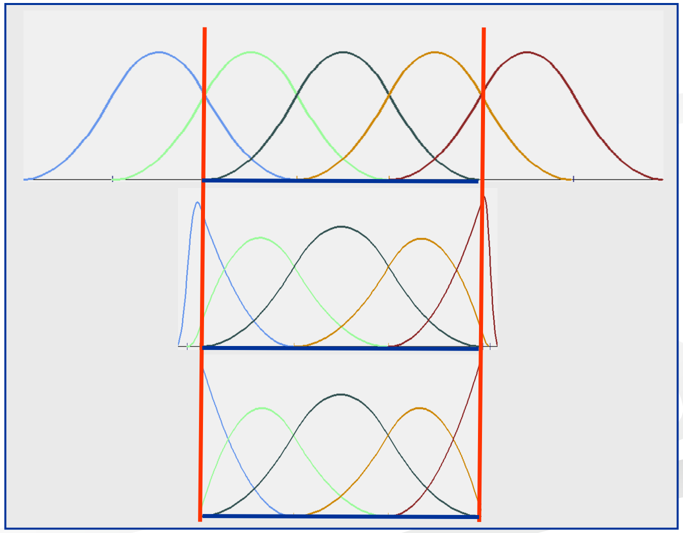
folytonosság a csomókban: $\boxed{C^{n-1}}$

multiplicitás: $r, \quad C^{n-1} \to C^{n-r}$

$$[u_0, u_1, \ldots, u_j = u_{j+1} = \ldots = u_{j+r-1}, \ldots, u_{K-1}]$$



belső csomónál: $S \to S-(r-1)$



Clamped B-splines - végpontban megkötött

B-spline bázisfüggvények$_3$

interpoláció a végeken (lásd előző ábra):

$$[u_0 = u_1 = \ldots = u_n, \ldots u_j, \ldots, u_{K-n-1} = \ldots = u_{K-1}]$$

tartóintervallum (support): $u \in [u_i, u_{i+n+1}]$

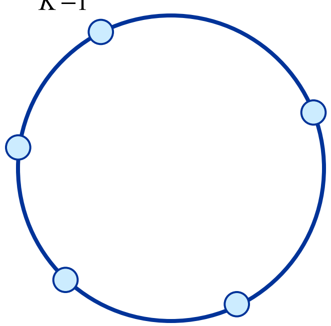
rekurzív formula:

$$N_i^0(u) = \begin{cases} 1 & u \in [u_i, u_{i+1}) \\ 0 & \end{cases}, \quad i = 0, \ldots, K-2$$

$$N_i^n(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+n} - u_i} N_i^{n-1}(u) + \frac{u_{i+n+1} - u}{u_{i+n+1} - u_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(u)$$

periodikus bázisfüggvények:

u_{K-1}



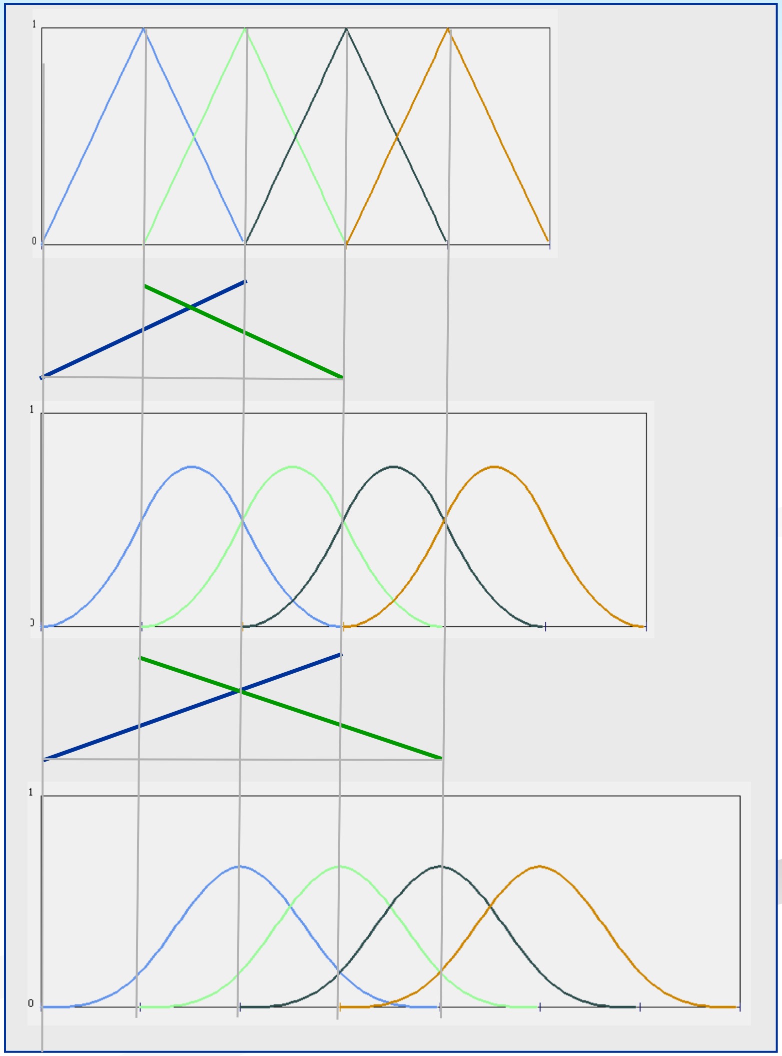
$u_0 = u_K$

u_1

$$K = L = S$$

?

Bázisfüggvények

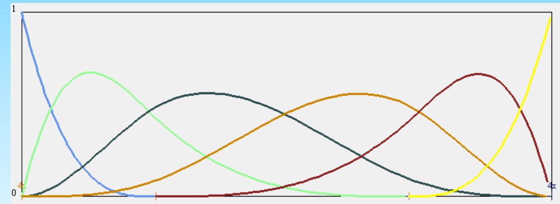


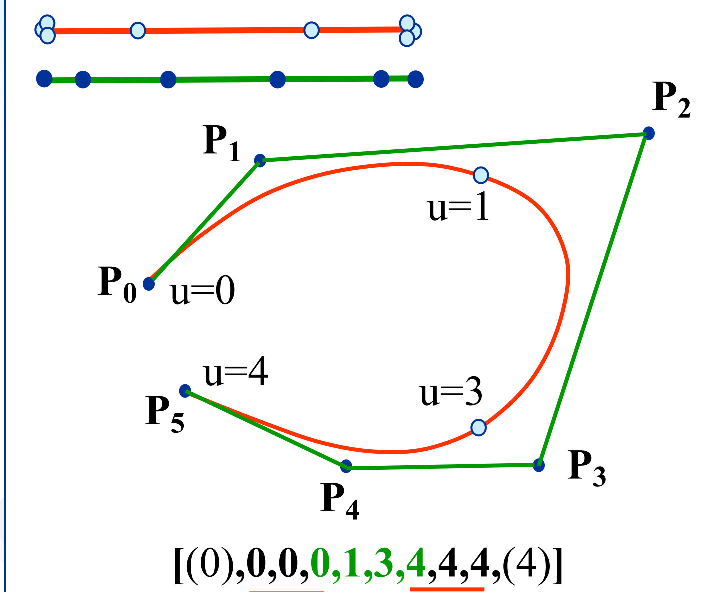
B-spline görbék

$$\mathbf{r}(u) = \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{P}_i N_i^n(u)$$

Tulajdonságok:

- affin invariancia
- konvex burok
- C^{n-1} folytonos a csomókban
- folytonosság csökkenthető (csomó multiplicitás)
- szigorúan lokálisan módosítás
- egyenes reprodukció
- változást csökkentő tulajdonság





Harmadfokú B-spline görbe

- végponti (pozició, tangens) interpoláció
- harmadfokú görbedarabok
- a súlyfüggvények a csomóvektortól függnek
- minden csomóhármas a megfelelő kontroll-ponthoz egy paraméterértéket rendel; ez az i-edik kontroll pont Greville abszcisszája:

$$\xi_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} u_{i+j}$$

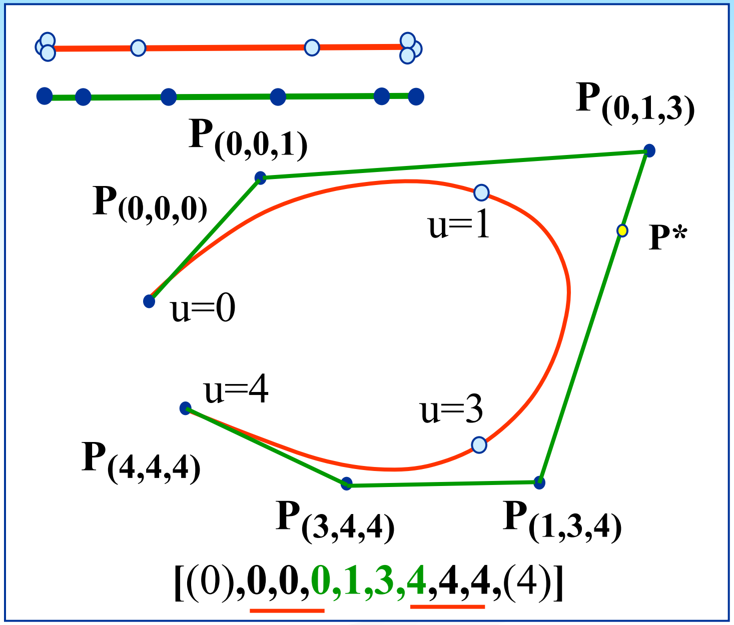
Példa: $n=3,\ L=6,\ S=3$

(0,0,0) (0,0,1) (0,1,3) (1,3,4) (3,4,4) (4,4,4)

$$\xi_0 = 0;\ \xi_1 = \frac{1}{3};\ \xi_2 = \frac{4}{3};\ \xi_3 = \frac{8}{3};\ \xi_4 = \frac{11}{3};\ \xi_5 = 4;$$

B-spline görbe

Poláris forma$_1$



kontroll pontok

(i) Descartes koordináták (pozíció):

$$\mathbf{P}_i = (P_x, P_y), \quad \mathbf{P}_i = (P_x, P_y, P_z)$$

(ii) polár címkék (koordináták)
(paraméterezés)
harmadfokú: $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{(a,b,c)}$

a poláris forma tulajdonságai:

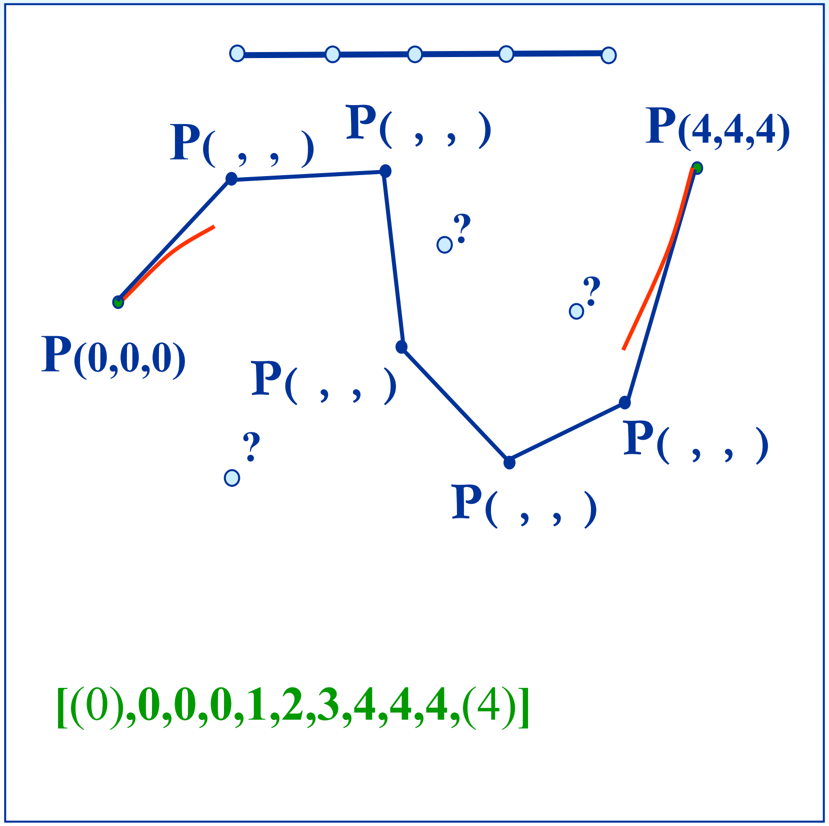
- görbepont: $\mathbf{r}(u) = \mathbf{P}_{(u,u,u)}$;
- permutáció invariáns: $\mathbf{P}_{(u_1,u_2,u_3)} = \mathbf{P}_{(u_2,u_3,u_1)}, \ldots, \mathbf{P}_{(u_3,u_1,u_2)}$
- egyenes két ponton át: n-1 címke (koordináta) egyezik
- affin kombináció: $\boxed{\alpha\,\mathbf{P}_{(u_1,u_2,v)} + \beta\,\mathbf{P}_{(u_1,u_2,w)} = \mathbf{P}_{(u_1,u_2,\alpha v+\beta w)}}$

Példa:

$$\mathbf{P}^* = (1-0.2)\times\mathbf{P}_{(\underline{0},1,3)} + 0.2\times\mathbf{P}_{(1,3,\underline{4})} = \mathbf{P}_{(1,3,\underline{0.8})}$$

$$\mathbf{P}_{(0,1,3)} = (10,8);\ \mathbf{P}_{(1,3,4)} = (8,0);\ \mathbf{P}_{(1,3,0.8)} = (9.6,6.4)$$

Ujjgyakorlat*- B-spline görbék



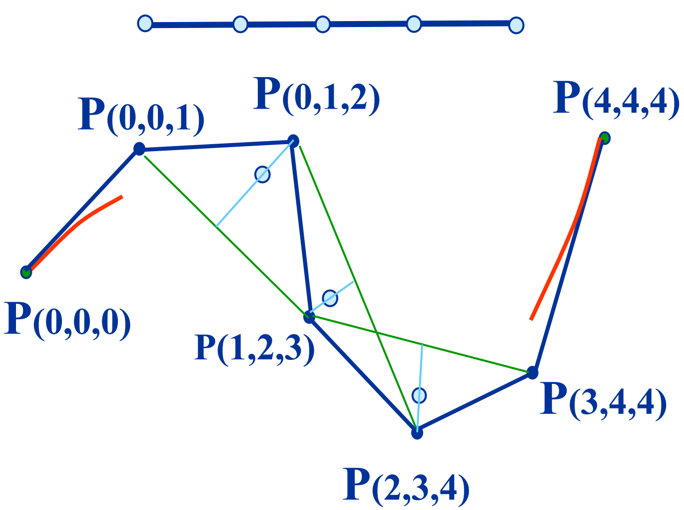
Harmadfokú interpoláló B-spline, egyenletes csomóvektor [0,4]

Feladat:

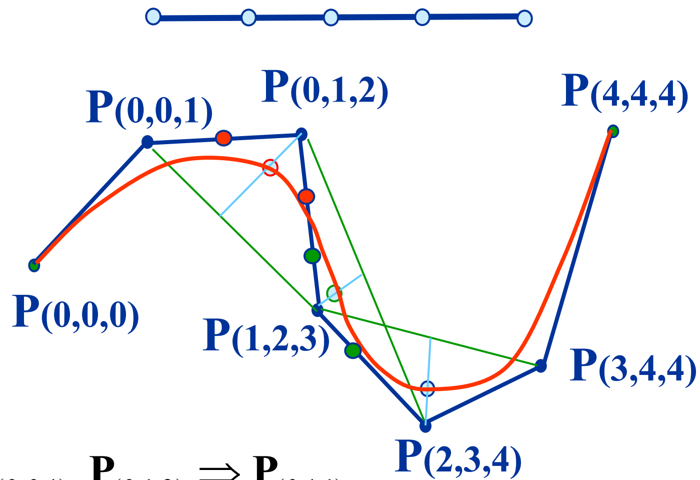
1. poláris címkék (koordináták) megadása

2. belső szegmens végpontok meghatározása

Ujjgyakorlat - B-spline görbék



[(0),0,0,0,1,2,3,4,4,4,(4)]



$$\mathbf{P}_{(\underline{0},0,1)}, \mathbf{P}_{(0,1,\underline{2})} \Rightarrow \mathbf{P}_{(0,1,1)}$$

$$\mathbf{P}_{(\underline{0},1,2)}, \mathbf{P}_{(1,2,\underline{3})} \Rightarrow \mathbf{P}_{(1,1,2)}$$

$$\mathbf{P}_{(\underline{0},1,1)}, \mathbf{P}_{(1,1,\underline{2})} \Rightarrow \mathbf{P}_{(1,1,1)}$$

$$\mathbf{P}_{(\underline{0},1,2)}, \mathbf{P}_{(1,2,\underline{3})} \Rightarrow \mathbf{P}_{(1,2,2)}$$

$$\mathbf{P}_{(\underline{1},2,3)}, \mathbf{P}_{(2,3,\underline{4})} \Rightarrow \mathbf{P}_{(2,2,3)}$$

$$\mathbf{P}_{(\underline{1},2,2)}, \mathbf{P}_{(2,2,\underline{3})} \Rightarrow \mathbf{P}_{(2,2,2)}$$

[(0),0,0,0,1,2,3,4,4,4,(4)]

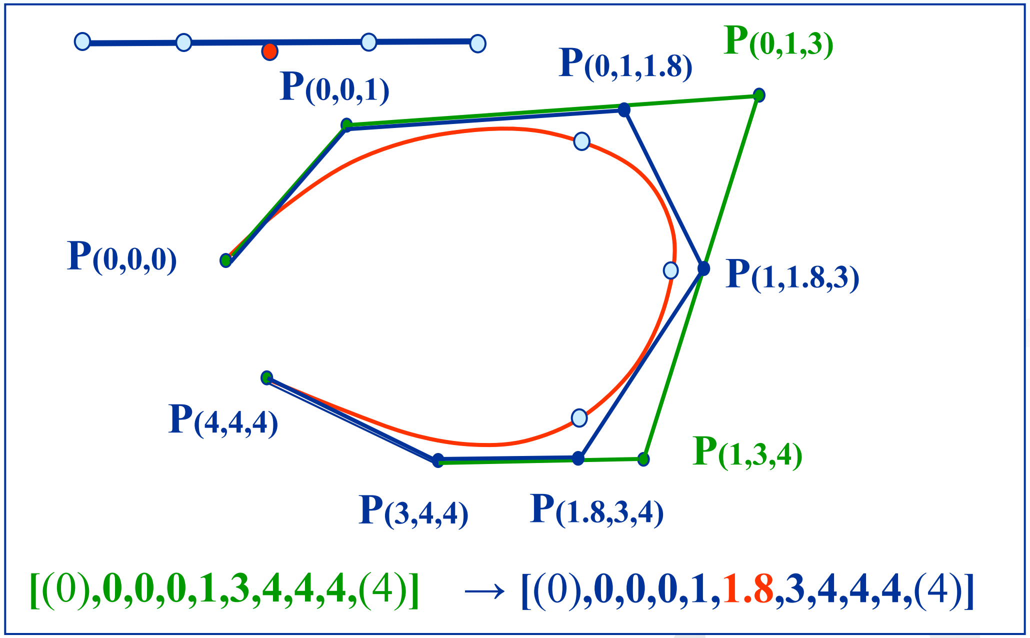
B-spline - Algoritmusok$_1$

B-spline – csomó beszúrás

- a görbe alakja nem változik
- +1 szabadságfok
- osztás n szakaszon
- $n=3$ esetén:

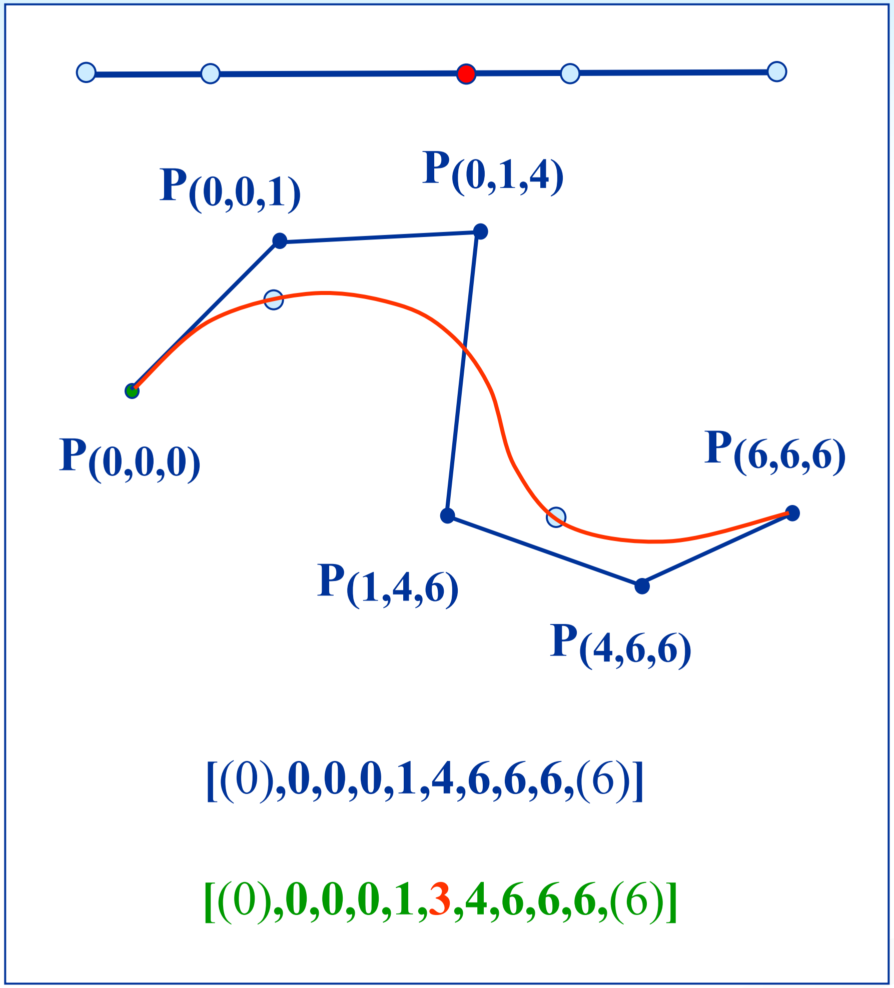
$$\mathbf{P}_k^* = (1-\alpha_k)\mathbf{P}_k + \alpha_k \mathbf{P}_{k+1},$$
$$k = i-1, i, i+1$$
$$\alpha_k = \frac{u-u_k}{u_{k+n}-u_k}$$

- folytonosság: C^∞



Csomóbeszúrás

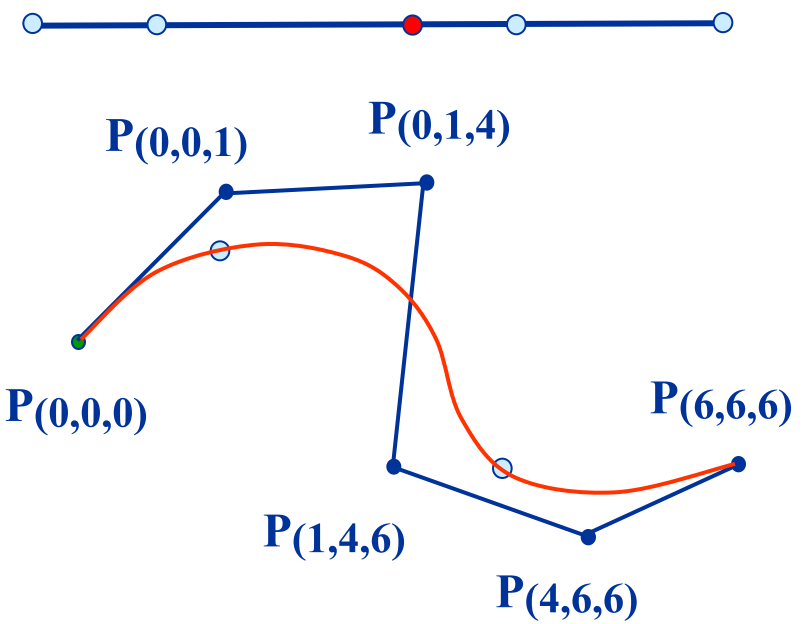
Ujjgyakorlat* - csomó beszúrás



Feladat:

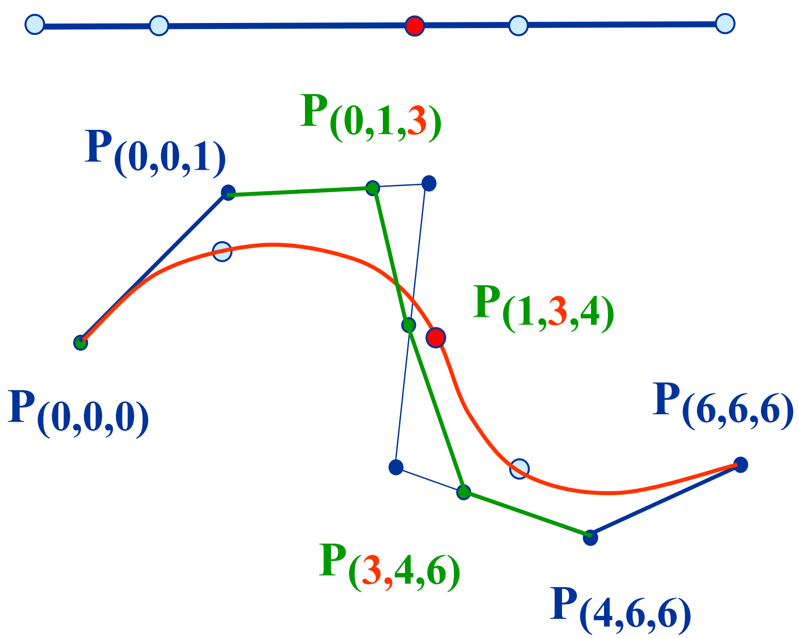
1. új csomó beszúrása $u=3$-nál
2. a kontroll poligon újraszerkesztése

Ujjgyakorlat - csomó beszúrás



[(0),0,0,0,1,4,6,6,6,(6)]

[(0),0,0,0,1,3,4,6,6,6,(6)]



[(0),0,0,0,1,4,6,6,6,(6)]

[(0),0,0,0,1,3,4,6,6,6,(6)]

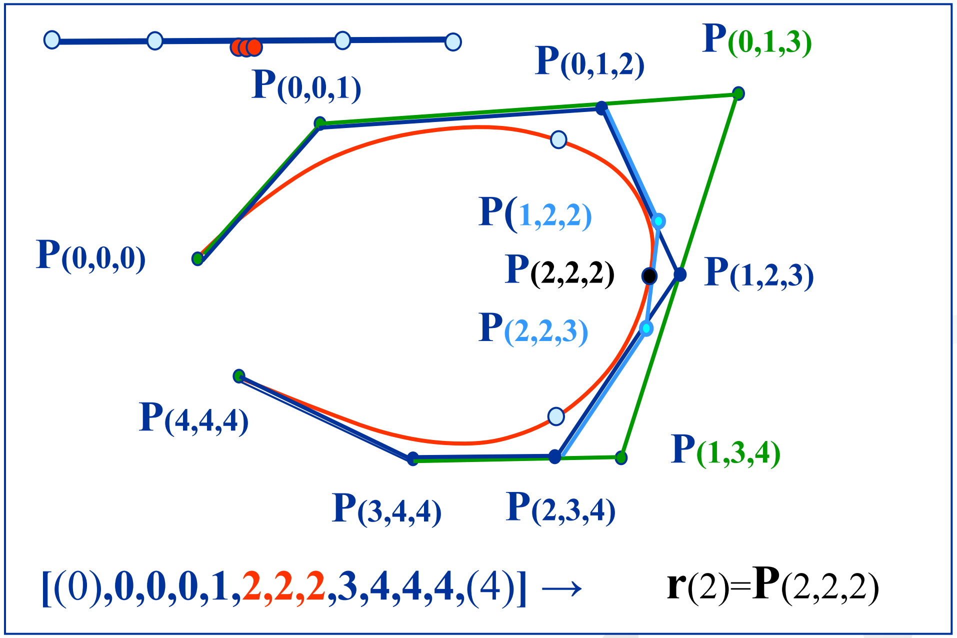
B-spline - Algoritmusok$_2$

B-spline – de Boor algoritmus

- n-szer ismételt csomó-beszúrás

$$\mathbf{r}(u) = \mathbf{P}_{(u,u,\ldots,u)}$$

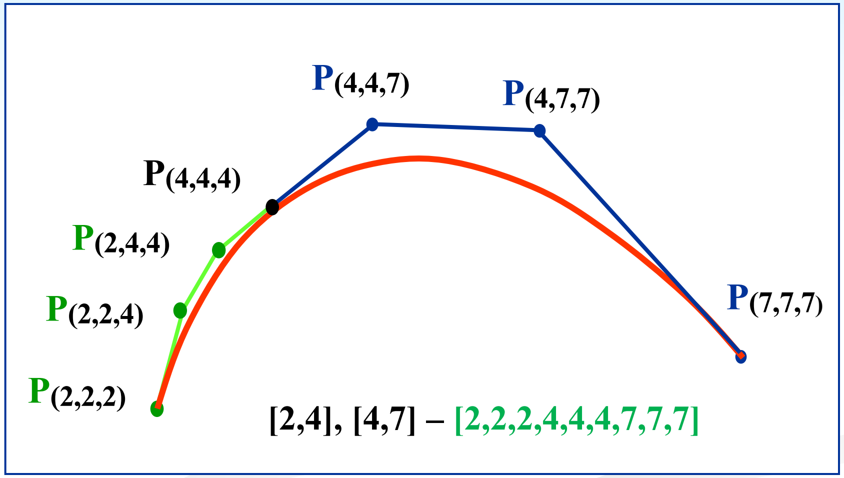
görbe kettévágása → de Boor



?

de Boor

Poláris forma - Bézier görbék



n-ed fokú Bézier: $\mathbf{r}(u),\, u \in [a,b]$

- a kontroll pontok poláris koordinátái (címkéi):

$$\mathbf{P}_i(u) = \mathbf{P}_{(u_1,u_2,\ldots,u_n)},$$

$$u_k = a \text{ ha } k \le n-i,\ u_k = b \text{ egyébként}$$

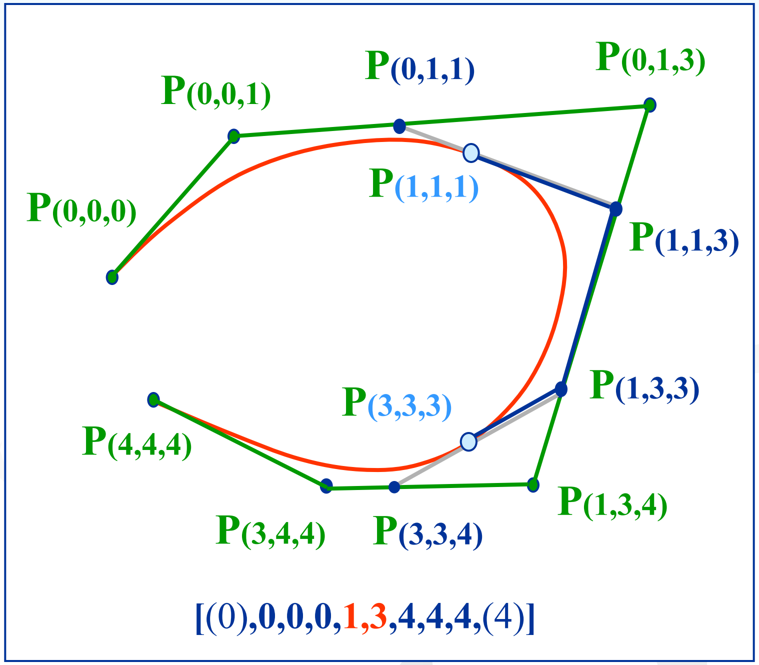
- lineáris: $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_{(a)}, \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_{(b)}$
- másodfokú: $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_{(a,a)}, \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_{(a,b)}, \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_{(b,b)}$
- harmadfokú: $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_{(a,a,a)}, \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_{(a,a,b)}, \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_{(a,b,b)}, \mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_{(b,b,b)}$

B-spline - Algoritmusok$_3$

kapcsolódó Bézier szegmensek előállítása

- példa: $\mathbf{r}^B(u),\ u \in [1,3]$
- cél: $\mathbf{P}_{(1,1,1)}, \mathbf{P}_{(1,1,3)}, \mathbf{P}_{(1,3,3)}, \mathbf{P}_{(3,3,3)}$
- lépések:

$$\left\{\mathbf{P}_{(0,1,3)}, \mathbf{P}_{(1,3,4)}\right\} \Rightarrow \left\{\mathbf{P}_{(1,1,3)}, \mathbf{P}_{(1,3,3)}\right\}$$
$$\left\{\mathbf{P}_{(0,0,1)}, \mathbf{P}_{(0,1,3)}\right\} \Rightarrow \left\{\mathbf{P}_{(0,1,1)}\right\}$$
$$\left\{\mathbf{P}_{(0,1,1)}, \mathbf{P}_{(1,1,3)}\right\} \Rightarrow \left\{\mathbf{P}_{(1,1,1)}\right\} \quad \ldots$$



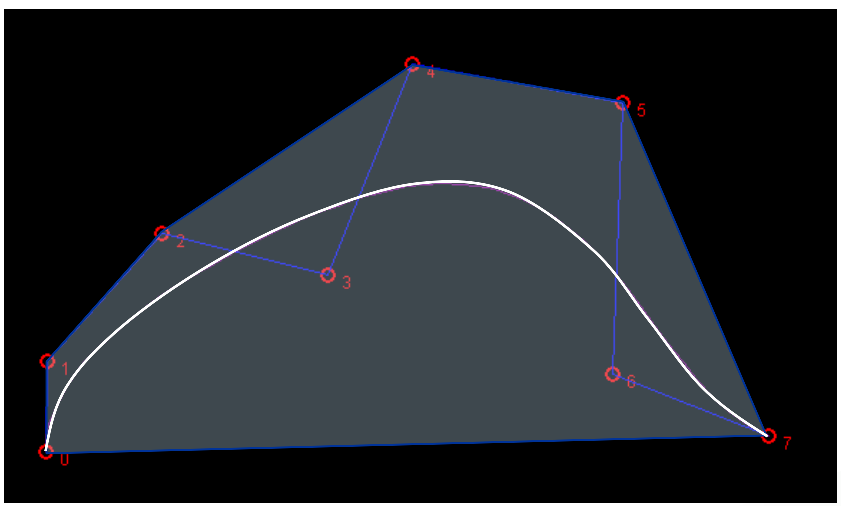
Bézier – B-spline: összehasonlítás

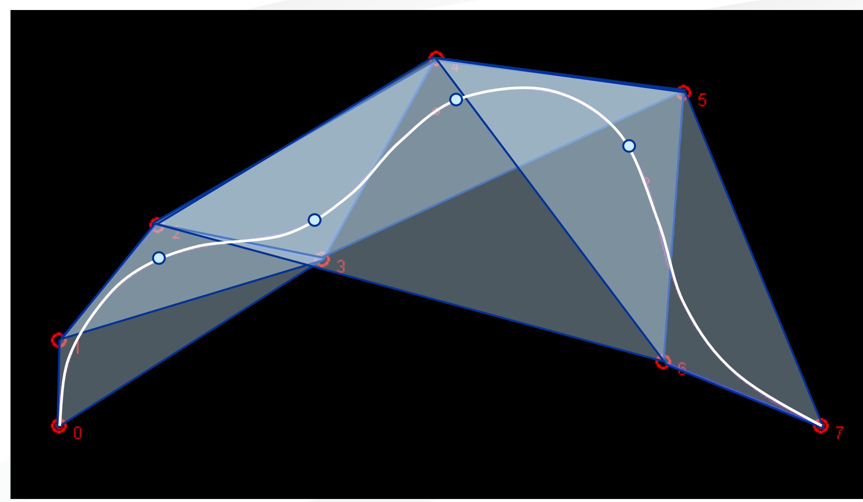
Bézier görbék

- egyszerű formula
- belül C^{∞} folytonos
- csak “kvázi” lokális
- nagy n-re – belül gyengébb tervezési kontroll lehetőség, relatíve nagy konvex burok
- szegmensek illesztése nehéz

B-spline görbék

- bonyolultabb
- a csomókban C^{n-1} folytonosság
- szigorúan lokális
- erős belső tervezési kontroll lehetőség, szűkebb konvex burok
- szegmensek automatikusan illeszkednek
- zárt görbék
- tartalmazza a Bézier reprezentációt





B-spline felületek

természetes kétparaméteres felületegyenlet (tensor product):

$$\mathbf{s}(u,v) = \sum_{i=0}^{L_u-1} \sum_{j=0}^{L_v-1} \mathbf{P}_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v)$$

két határ-interpoláló csomóvektor:

$$[u_0 = u_1 = \ldots = u_n, \ldots u_j, \ldots, u_{K_u-n-1} = \ldots = u_{K_u-1}]$$

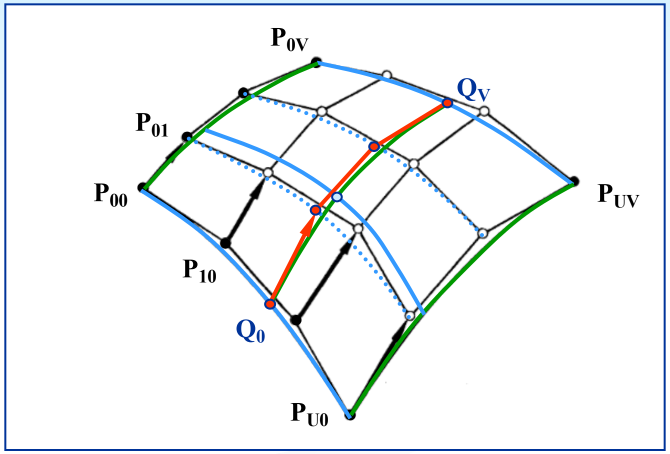
$$[v_0 = v_1 = \ldots = v_m, \ldots v_j, \ldots, u_{K_v-m-1} = \ldots = u_{K_v-1}]$$

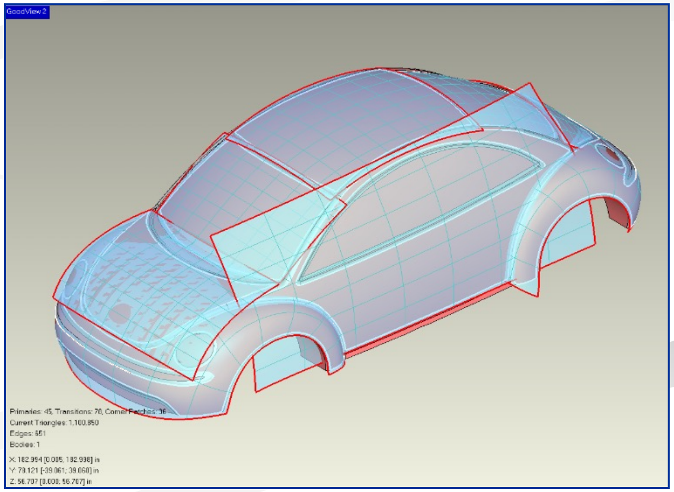
konstans paraméter vonal:

$$\mathbf{s}(u_0,v) = \sum_{j=0}^{L_v-1} N_j^m(v) \left[\sum_{i=0}^{L_u-1} \mathbf{P}_{ij} N_i^n(u_0) \right] = \sum_{j=0}^{L_v-1} \mathbf{Q}_j(u_0) N_j^m(v)$$

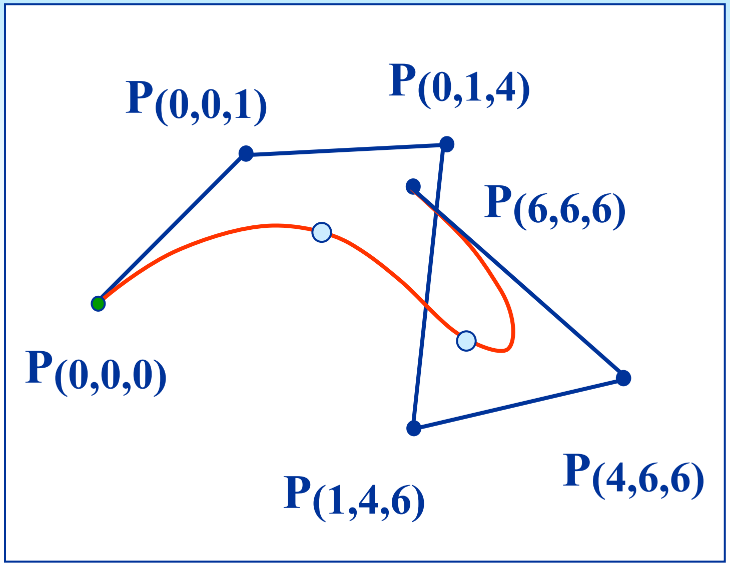
tulajdonságok:

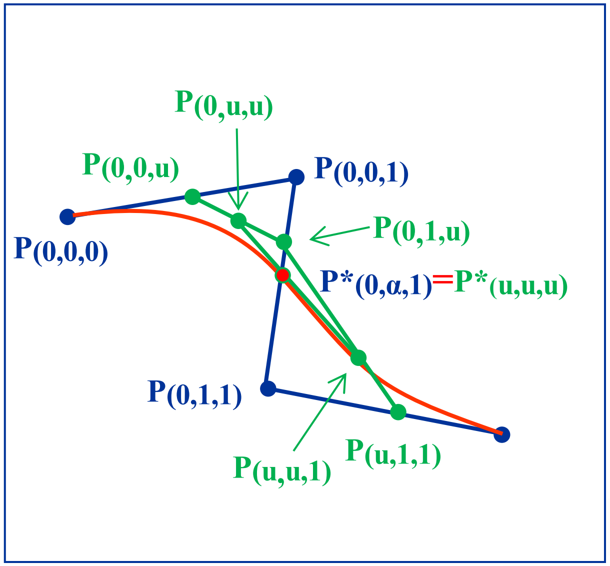
- affin invariancia
- konvex burok
- C^{n-1} - C^{m-1} folytonos a csomók mentén
- szigorúan lokálisan módosítás





Érdekes kérdés





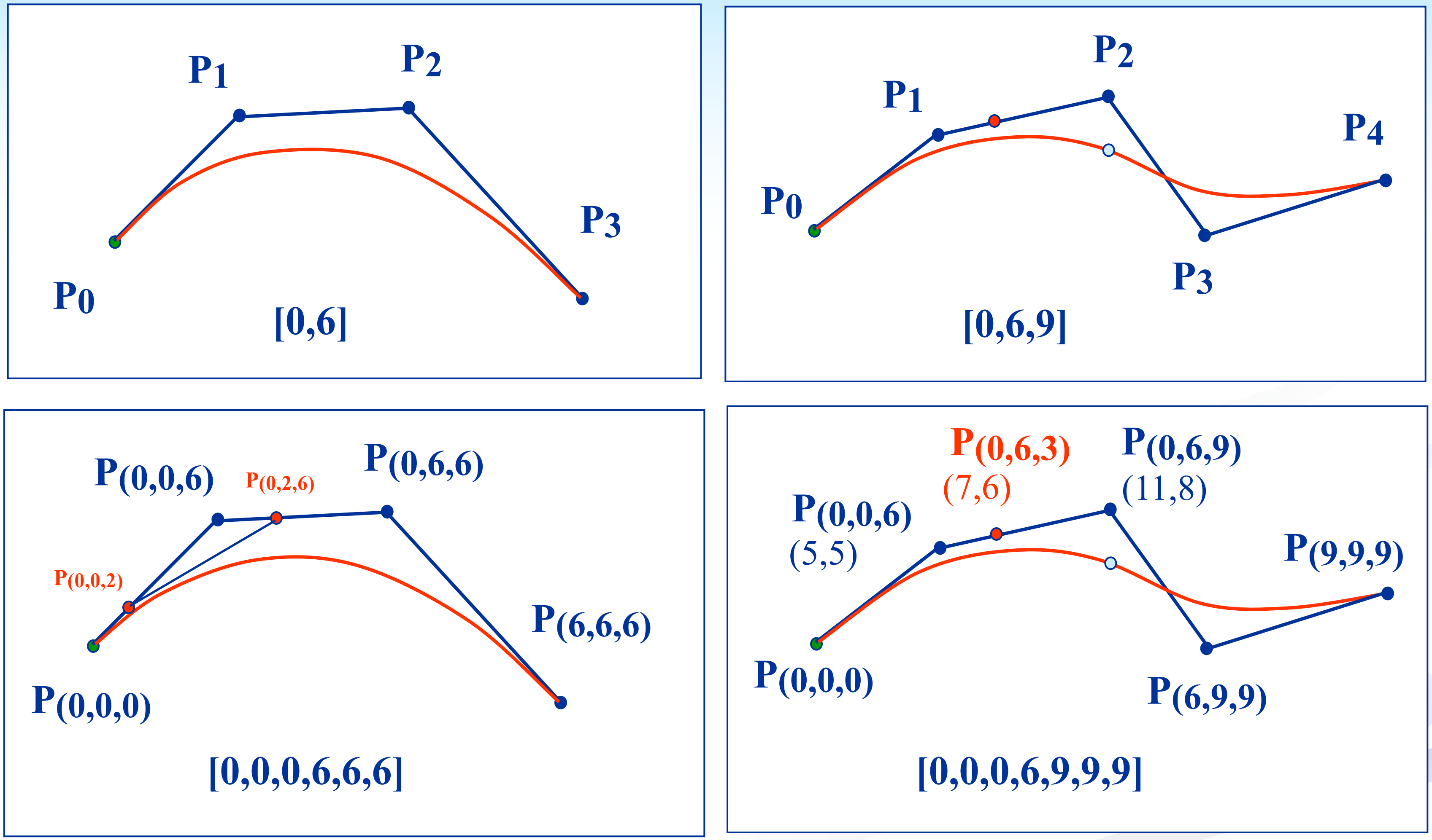
A kontroll poligon és a görbe elmetszheti egymást, mit tudunk mondani erről a metszéspontról?

1. A harmadfokú poláris címkék három koordinátát reprezentálnak, a sík pontjait viszont két koordináta írja le, így a leképzés nyilván nem lehet egyértelmű.
2. A metszéspont közvetlenül nem olvasható le, egy lineáris egyenletrendszert kell megoldani (lásd Bézier szegmens)

$$P^* = P_1(1-\alpha) + P_2\alpha =$$
$$= P_0(1-u)^3 + P_1 3(1-u)^2 u + P_2 3(1-u)u^2 + P_3 u^3$$
$$P^* = P^*_{(0,\alpha,1)} = P^*_{(u,u,u)}$$

3. Két egyenlet - x és y - szerint, továbbá két ismeretlen

Ismétlés - polár koordináták



Bézier

B-spline

Bézier görbe kiértékelése

Bézier – de Casteljau algoritmus
a poláris forma segítségével

- ismételt lineáris interpoláció
  - $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3,$ 000 001 011 111
  - $\mathbf{c}_0^1, \mathbf{c}_1^1, \mathbf{c}_2^1$ $00t$ $0t1$ $t11$
  - $\mathbf{c}_0^2, \mathbf{c}_1^2$ $0tt$ $tt1$
  - $\mathbf{c}_0^3$ ttt