3D számítógépes geometria és alakzatrekonstrukció

2b. Háromszöghálók - algoritmusok

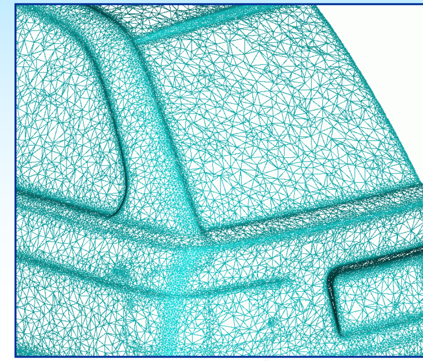
http://cg.iit.bme.hu/portal/node/312
https://www.vik.bme.hu/kepzes/targyak/VIIIMA01

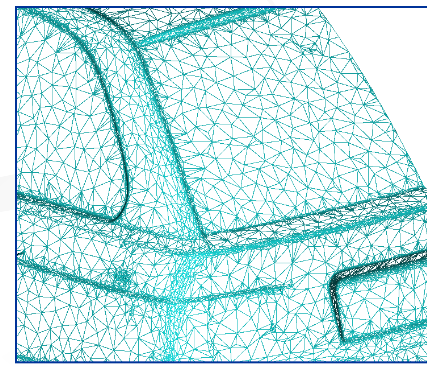
Dr. Várady Tamás, Dr. Salvi Péter
BME, Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Irányítástechnika és Informatika Tanszék

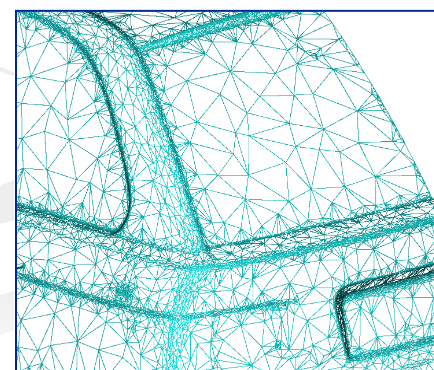
Tartalom

- háromszöghálók egyszerűsítése
  - csúcspontok klaszterezése
  - inkrementális eljárások
  - progresszív hálók
  - egyenletes mintavételezés és újrahálózás
- normálvektorok és görbületek numerikus becslése
- felületek minőségének javítása

Háromszöghálók egyszerűsítése$_1$ (decimálás)

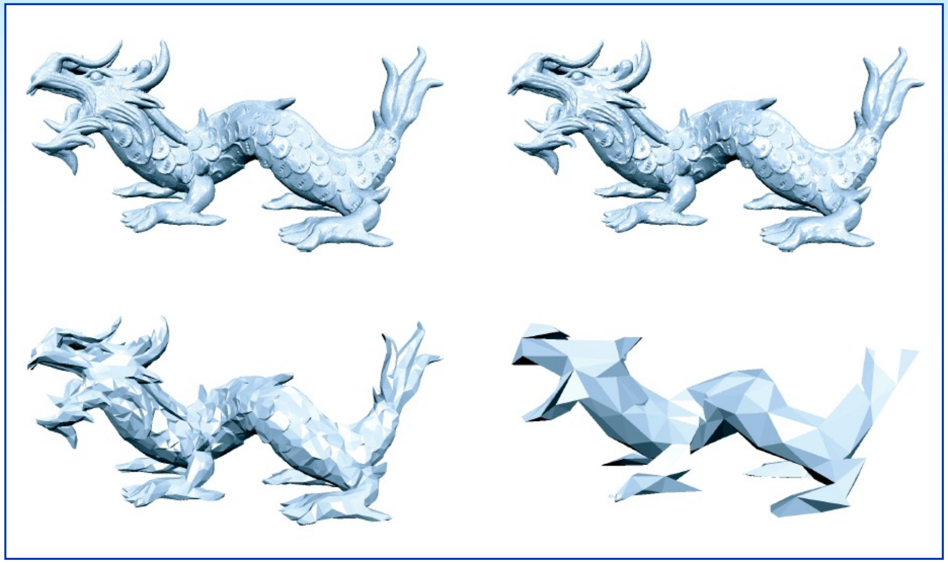






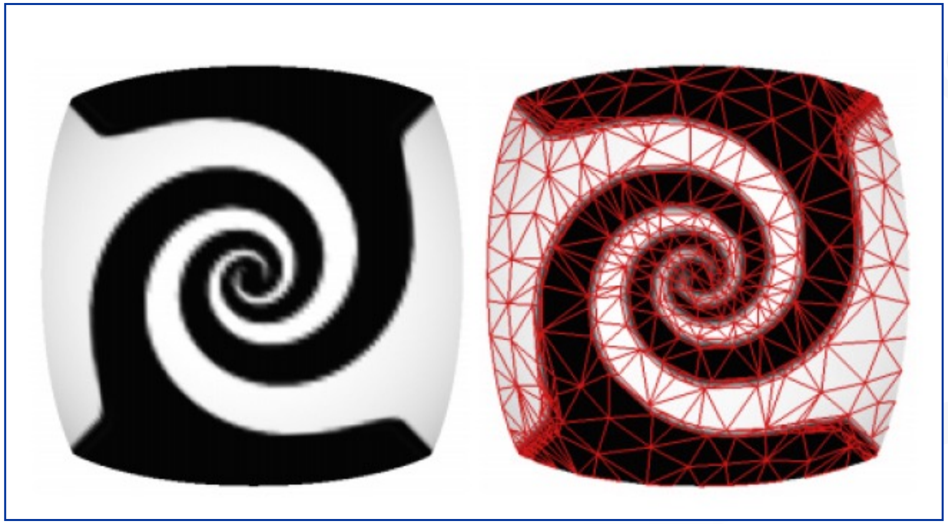
- háromszögháló $\Rightarrow$ kisebb háromszögháló
  - komplexitás csökkentése – hatékonyság növelése
  - adattárolás, adatátvitel
  - hierarchikus reprezentáció
  - optimalizálás (energiafüggvények)
- minőség megőrzése
  - távolság tolerancia
  - alaksajátosságok (shape features)
  - grafikus paraméterek, textúra
- négy algoritmus
  - csúcspontok klaszterezése
  - inkrementális eljárások
  - progresszív hálók (visszaépíthető)
  - mintavételezés és új háló létrehozása

Háromszöghálók egyszerűsítése$_2$



1. példa (Botsch et al.):

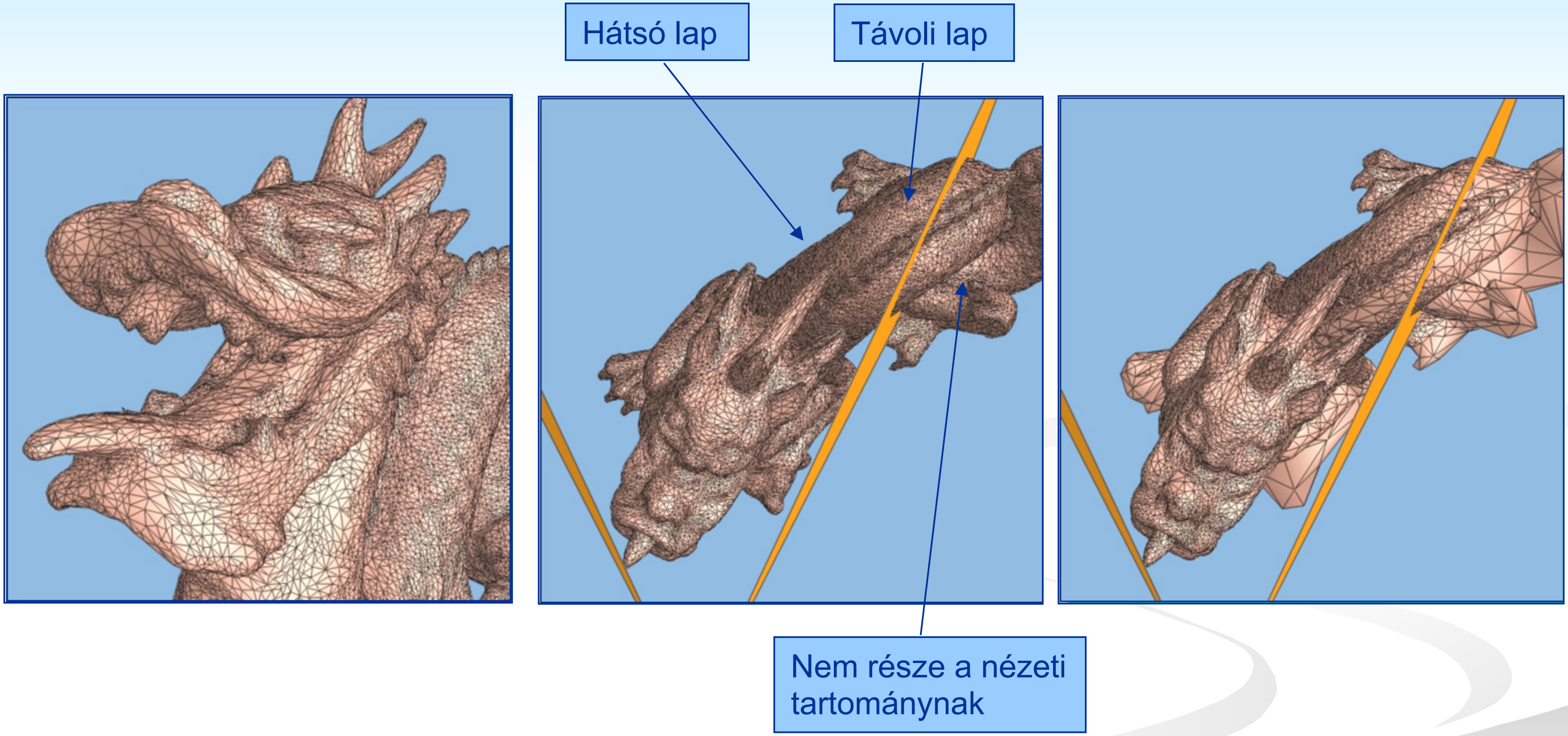
577 512 háromszög
→ 10 % → 1 % → 0.1 %



2. példa: (Garland, Heckbert):

a háromszögek követik a textúra struktúrát – 18050 → 1000

Háromszöghálók egyszerűsítése$_3$

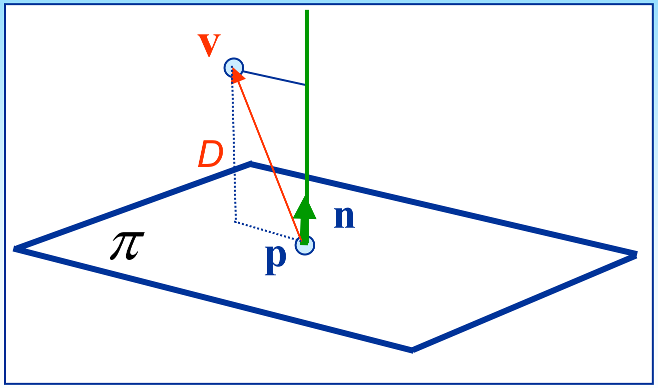


3. példa (Hoppe): nézőpont függő egyszerűsítés – 100000 → 29400

Csúcspontok klaszterezése$_1$

- approximációs tolerancia: ε
- adaptív osztás: minden cella átmérője $\leq \varepsilon$
  - 2D: quadtree, 3D: oct-tree, kd-tree - bináris osztás
- reprezentáns mintapontok meghatározása
- az eredeti háromszögek degenerálódnak $\Rightarrow$ törlés, egyszerűsítés
- klaszterek közötti élek újraszámolása
  - *P* klaszter, reprezentáns: ***p***, eredeti pontok: $\boldsymbol{p_0, p_1, \ldots p_n}$
  - *Q* klaszter, reprezentáns: ***q***, eredeti pontok: $\boldsymbol{q_0, q_1, \ldots q_m}$
  - ha van $\boldsymbol{(p_i, q_j)}$ él $\Rightarrow$ új $\boldsymbol{(p,q)}$ él beillesztése
- aránylag gyors algoritmus (lineáris lépésszám)
- topológiai változások – a minőség nem mindig megfelelő

Négyzetes hiba



- adott egy π sík; ismeretlen $\mathbf{v}=(x,y,z)$ pont π -től mért távolsága:

  $$D(\mathbf{v})= |\mathbf{v}\text{-}\mathbf{p}|\cos\alpha=(\mathbf{n},\mathbf{v}\text{-}\mathbf{p})=(\mathbf{n},\mathbf{v})+d$$

  ahol $\mathbf{n}=(n_x,n_y,n_z)$ egységvektor; $\mathbf{p}$ - tetszőleges pont a síkban, d konstans

- négyzetes hiba:

  $$D^2(\mathbf{v})=((\mathbf{n},\mathbf{v})+d)^2=\mathbf{v}[\mathbf{n}^T,\mathbf{n}]\mathbf{v}^T+2d(\mathbf{n},\mathbf{v})+d^2$$

- másodfokú felület:

  $$\equiv Q(\mathbf{v})=\mathbf{v}\mathbf{A}\mathbf{v}^T+2(\mathbf{b},\mathbf{v})+c,\quad Q=\{\mathbf{A},\mathbf{b},c\}=\left\{[\mathbf{n}^T,\mathbf{n}],d\mathbf{n},d^2\right\}$$

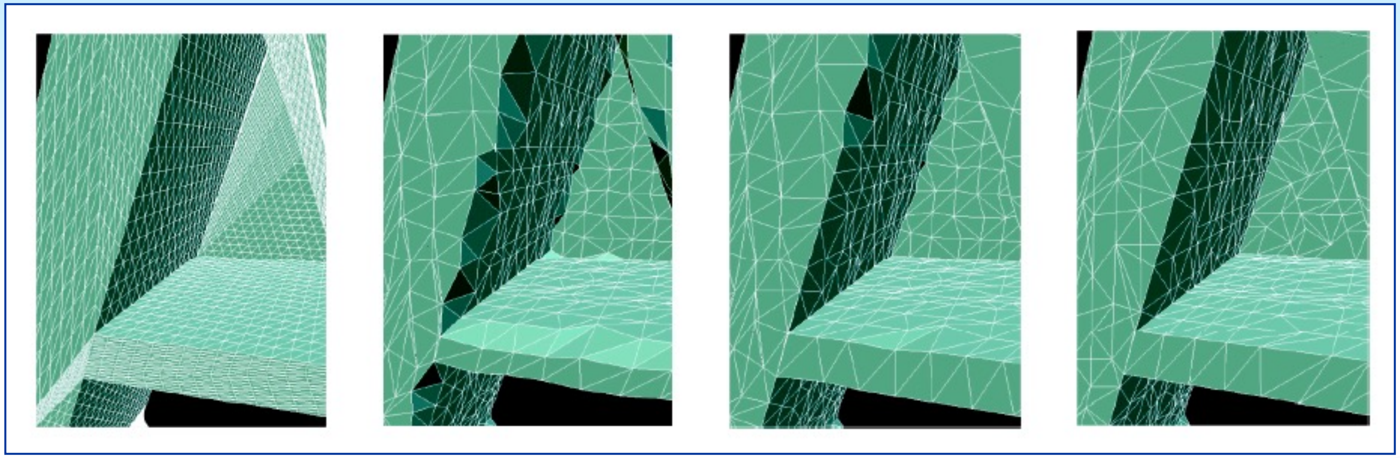
- egy pont, két felülettől mért négyzetes hibája - összeadás komponensenként:

  $$Q_1(\mathbf{v})+Q_2(\mathbf{v})=\{\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2,\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2,c_1+c_2\}$$

- egy pont négyzetes hibája *k* síkra:

  $$Q^*(\mathbf{v})=\sum_k Q_k(\mathbf{v})=\{\mathbf{A}^*,\mathbf{b}^*,c^*\}$$

Csúcspontok klaszterezése$_2$



a) eredeti b) átlag c) medián (középső érték) d) négyzetes (Botsch et al.)

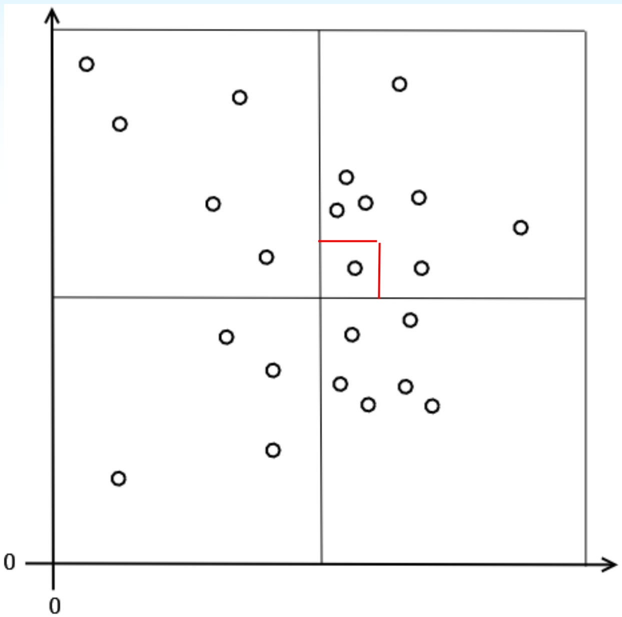
minden cellára

- feltételezés: adott síkszerű háromszöghalmaz (n darab sík)
- kiszámítandó az optimális reprezentáns csúcs: $\tilde{\mathbf{v}}$
- a legkisebb négyzetes eltérés a háromszögek síkjától:

$$Q^*(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\mathbf{A}\mathbf{v}^T + \mathbf{b}\mathbf{v} + c = min, \quad \partial Q^* / \partial x = \partial Q^* / \partial y = \partial Q^* / \partial z = 0$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = -\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}^T, \quad Q^*(\tilde{\mathbf{v}}) = -\frac{1}{4}\mathbf{b}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}^T + c$$

Ujjgyakorlat* - quadtree

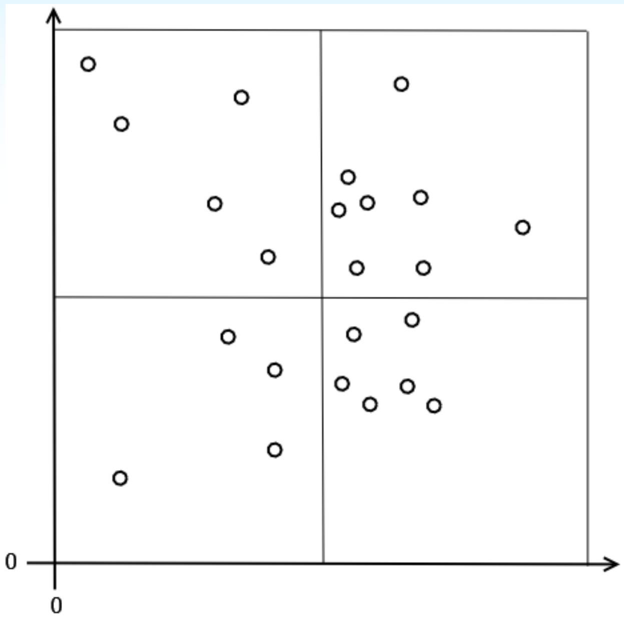


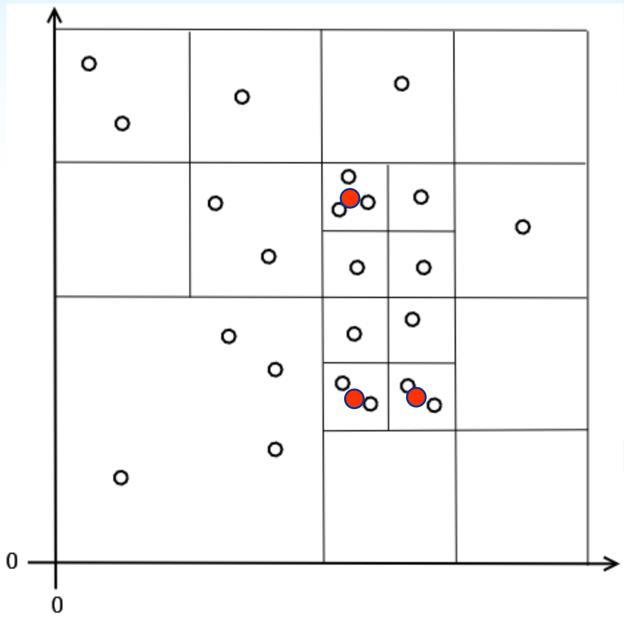
Klaszterezés

- ha egy cellában $n>4$, tovább osztunk
- ha a <u>cella kicsi</u> (1/8) és $n \geq 2 \rightarrow$ **új** reprezentáns pontot kell számolni

Végül hány cellát (.....) és hány új reprezentáns pontot kapunk (.....) ?

Ujjgyakorlat - quadtree





Klaszterezés

- ha egy cellában $n>4$, tovább osztunk
- ha a cella kicsi (1/8) és n≥2 → új reprezentáns pontot kell számolni

Cellák száma: 19, reprezentáns pontok száma: 3

Inkrementális decimáció$_1$

Euler szabály (poliéderek):

- v-e+f = 2
- csúcs (v), él (e), lap (f)

elemi műveletek:

- v ↔ v-1, e ↔ e-3, f ↔ f-2

(a) csúcs törlés – beszúrás

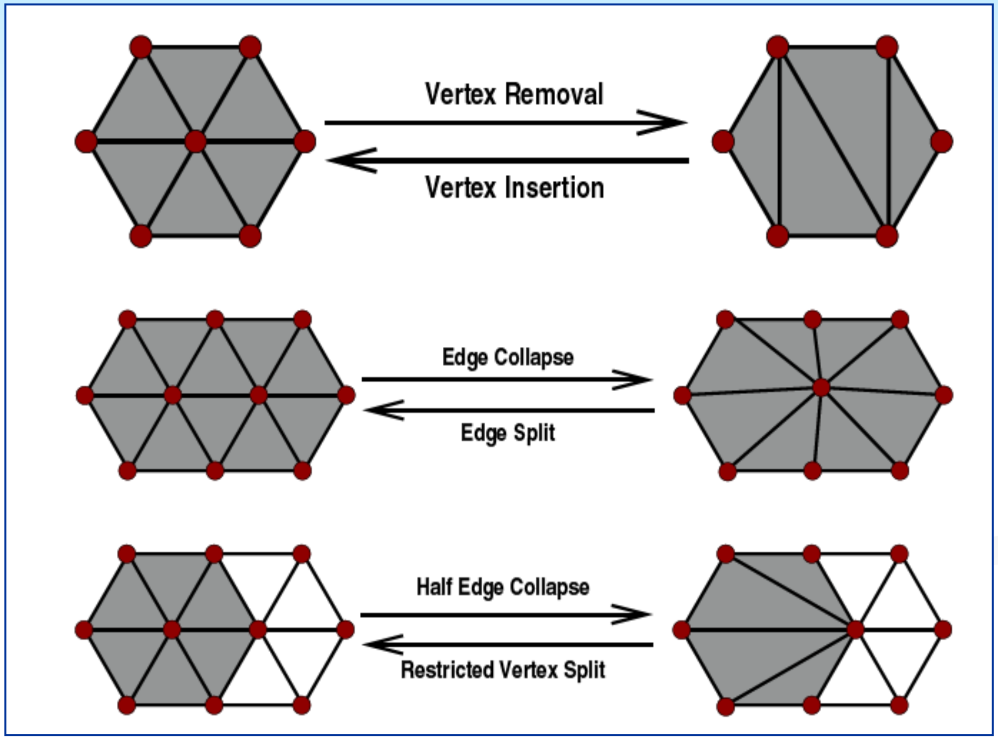
- a belső háromszögelés módja szabad

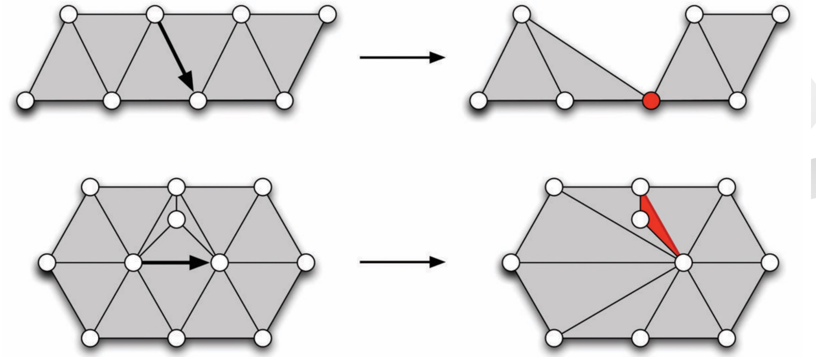
(b1) él összehúzás –ketté vágás

- az új csúcs választása szabad, optimalizálható

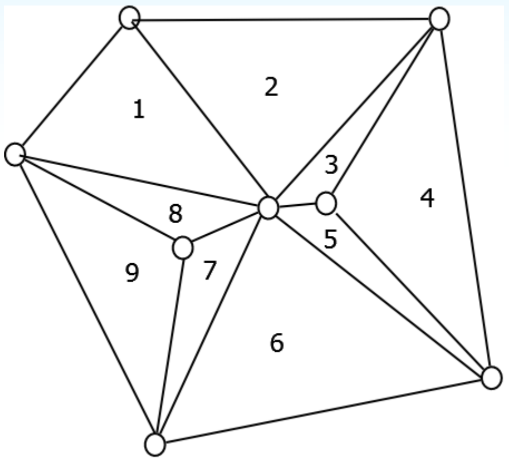
(b2) fél-él összehúzás – ketté vágás

- az új csúcs az eredeti ponthalmaz tagja



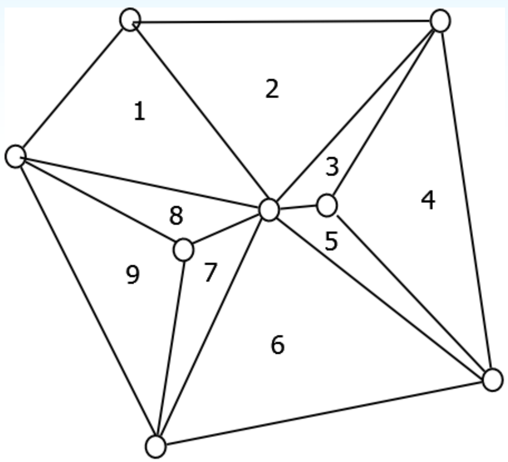


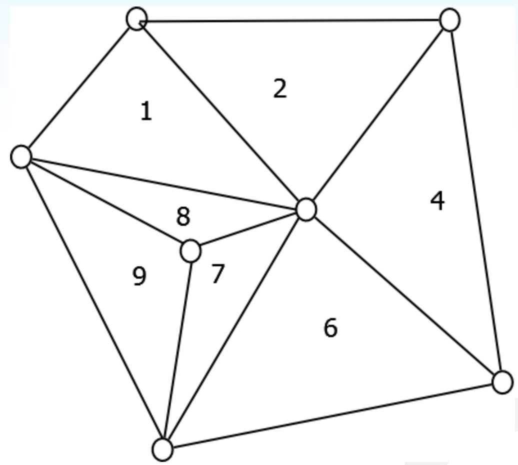
Ujjgyakorlat* - decimáció

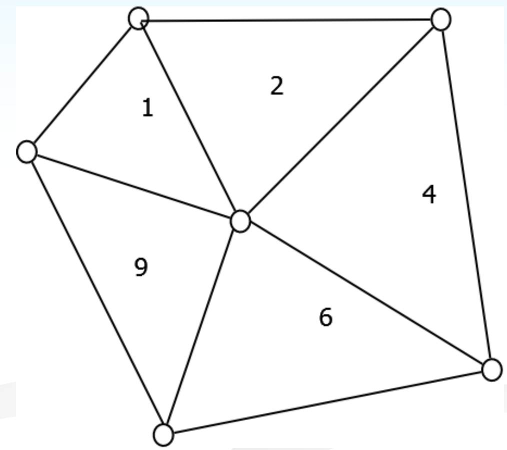


- mindig a legrövidebb élet írtjuk ki
- az új csúcs a régi él közepére kerül
- két lépés

Ujjgyakorlat - decimáció





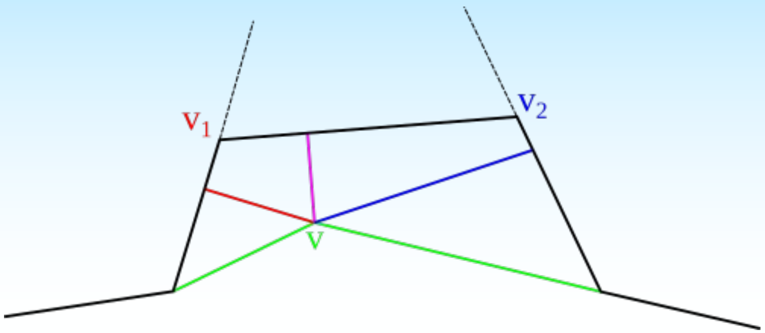


- mindig a legrövidebb élet írtjuk ki
- az új csúcs a régi él közepére kerül
- két lépés

Inkrementális decimáció$_2$

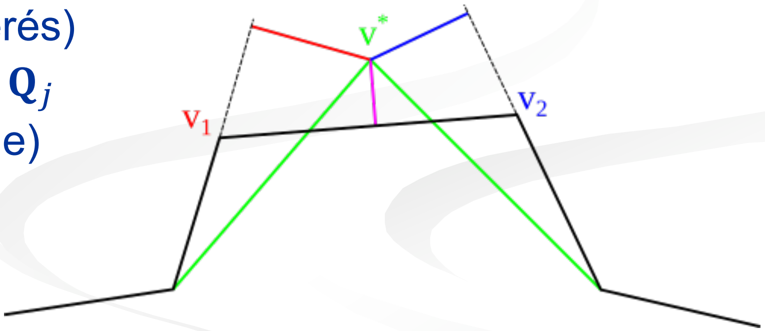
közelítési hibaösszeg becslése

- minden lépésnél, mindegyik érintett háromszögre – a hibák összegződnek
- hiba: skalár vagy vektor vagy négyzetes



négyzetes hibák esetén

- minden kiinduló ponthoz $\mathbf{Q}_i$ négyzetes függvény (a szomszédos háromszögsíkoktól való eltérés)
- élösszehúzásnál egyszerű összegzés: $\mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_j$ az optimális $\mathbf{v}$ meghatározható (korábbi slide)
- cél: minimális „összenergia”, illetve „összköltség”

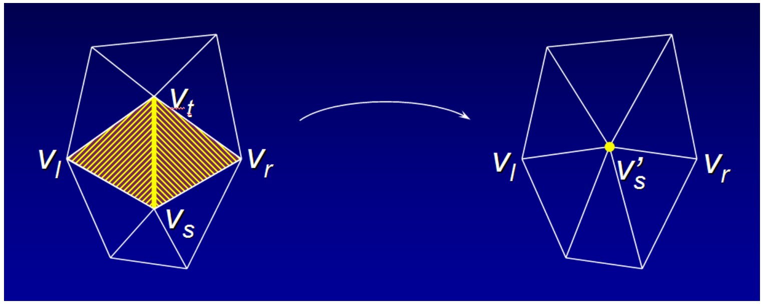


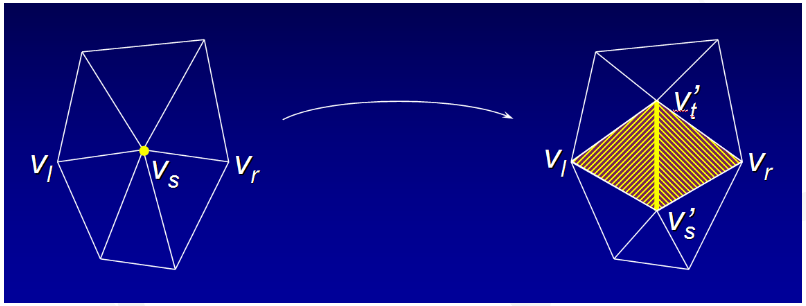
az algoritmus lépései (Garland-Heckbert 1997)

1. minden pontra a négyzetes hibafüggvény meghatározása
2. elsőbbségi sor (priority queue): összehúzható élek és ezek költsége
3. legolcsóbb élösszehúzás végrehajtása $\Rightarrow$ az adatstruktúra lokális frissítése
4. iteráció, amíg a terminálási feltétel(ek) teljesülnek

Progresszív hálók$_1$ (Hoppe)

- háromszöghálók hierarchiája
- nincs információvesztés
- cél: hatékony grafika, adattárolás, adatátvitel

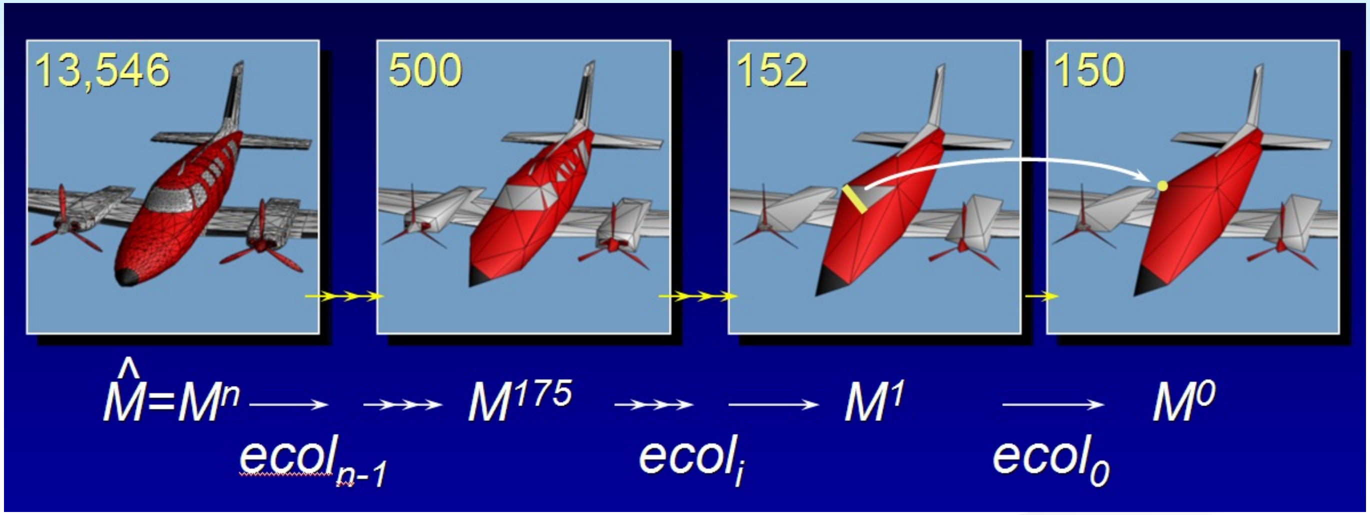


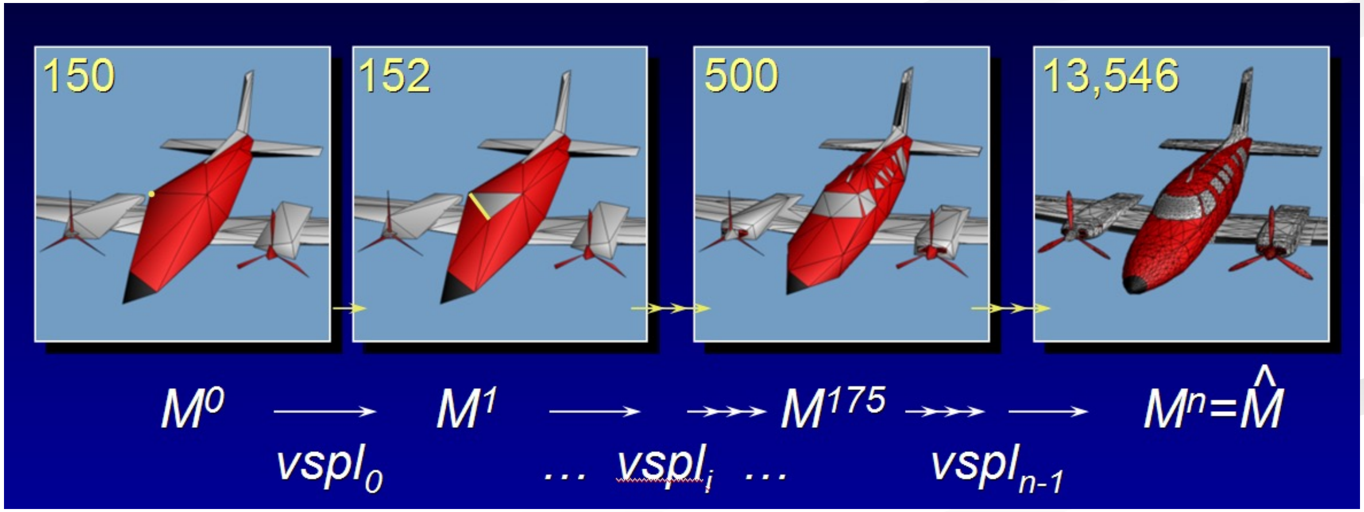


- él-összehúzás (edge collapse)
- adatsor: (v_s, v_t, v_s')

- csúcs-széthúzás (vertex split)
- adatsor: (v_s, v_l, v_r, v_t', v_s'+ attribútumok)

Progresszív hálók$_2$

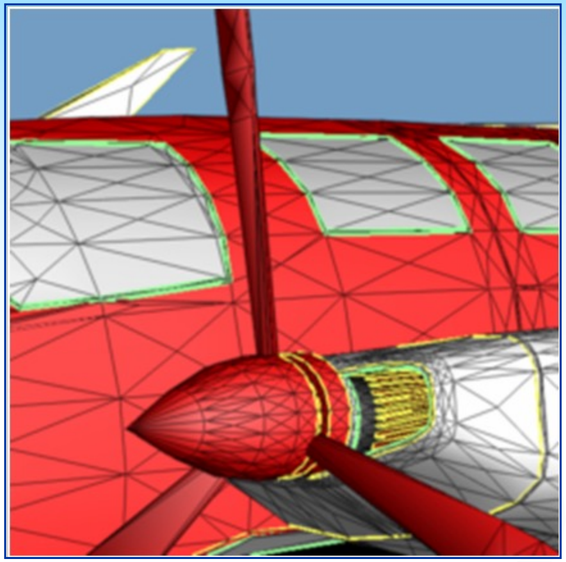




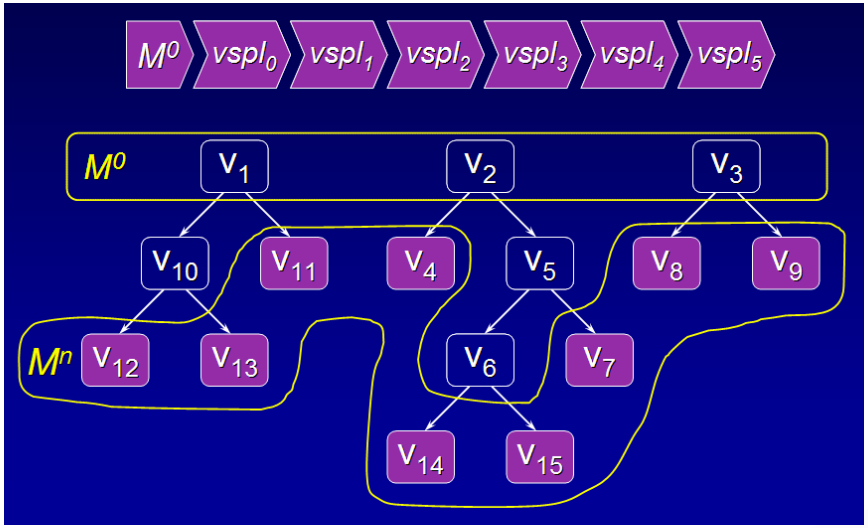
?

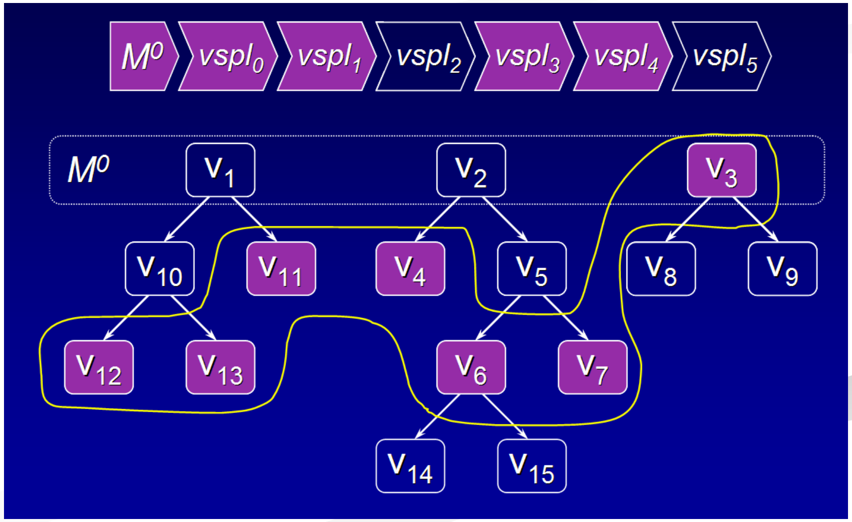
Progresszív hálók$_3$

- az összehúzandó él kiválasztása – energia minimumra való törekvés
  - E_1: geometriai jellemzők (távolság, normálvektor eltérés)
  - E_2: skalár jellemzők (pl. színek)
  - E_3: élek, határok
- nézőpont specifikus finomítás
  - hátsó lapok, távoli lapok, kis méretű lapok

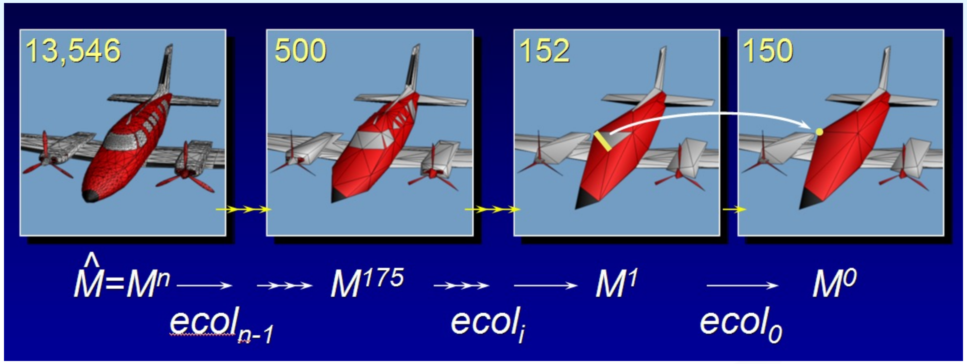


?





Önálló projekt



<u>Progresszív hálók</u>

rövid szeminárium
és prototípus implementáció

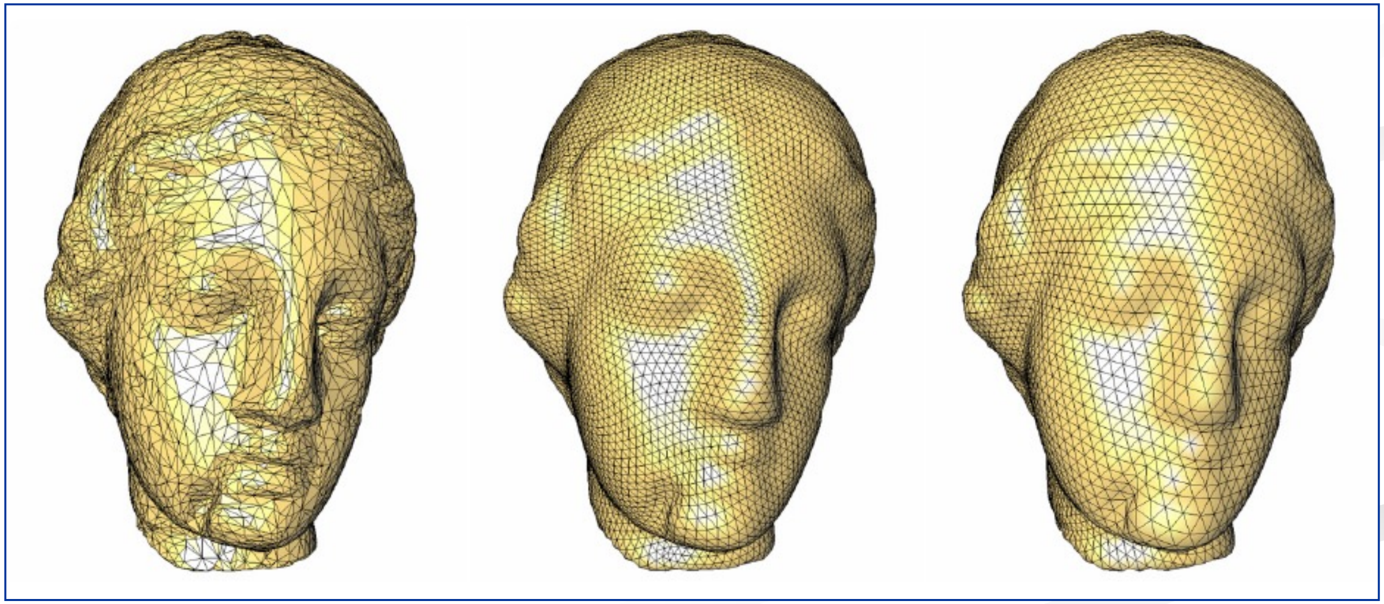
input: mesh
output: animált progresszív háromszögháló

az animáció megállítható, valamint tovább és vissza léptethető
az egyszerűsítés módszerei:
(i) nézőpont szerint
(ii) síklapuság szerint
(iii) háromszögméret szerint

Mintavételezés és új háló létrehozása

Dióhéjban:

- új topológiai struktúra
- izotrópiára való törekvés
- mintavételezés szigorú – távolsági és minőségi – kritériumok alapján



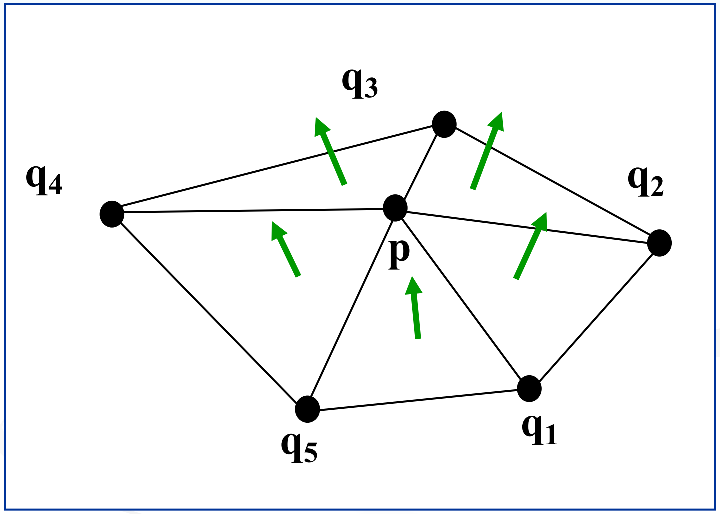
Geometriai jellemzők becslése$_1$

Háromszög alapú normálvektor-becslés

i-edik háromszög:

$$\mathbf{n}_i = (\mathbf{q_i} - \mathbf{p}) \times (\mathbf{q_{i+1}} - \mathbf{p})$$

$$A_i = \frac{1}{2} |\mathbf{n}_i|, \quad \mathbf{n}_{i0} = \frac{\mathbf{n}_i}{|\mathbf{n}_i|}$$



a) egységvektorok átlagolása:

$$\mathbf{n_p} = \frac{1}{n} \sum_i \mathbf{n}_{i0}$$

b) területarányos súlyozás:

$$A = \sum_i A_i; \;\; \mathbf{n_p} = \frac{1}{A} \sum_i A_i \mathbf{n}_{i0} = \frac{1}{2A} \sum_i \mathbf{n}_i$$

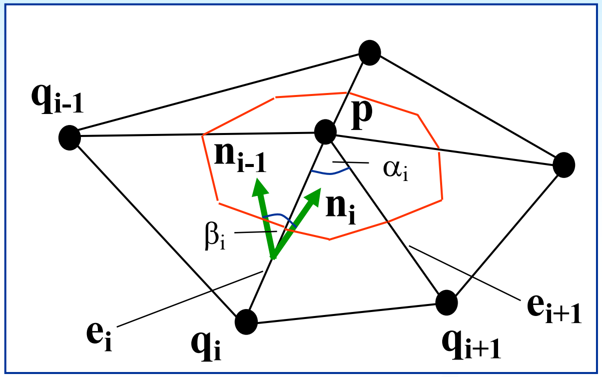
Geometriai jellemzők becslése$_2$

Háromszögalapú görbület-becslések

- az *i*-edik háromszögben:

$$\mathbf{e}_i = (\mathbf{q}_i - \mathbf{p}), \quad \alpha_i = \angle(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+1}), \quad \beta_i = \angle(\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_{i-1})$$

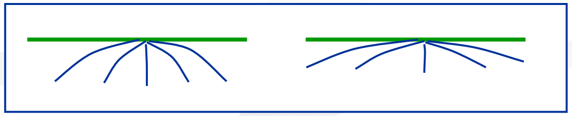
$$A(\mathbf{p}) = \sum_i A_i$$



Gauss-görbület

- klasszikus differenciálgeometria (Gauss-Bonet tétel):

$$\iint_A G\,dA = \delta(\mathbf{p})$$

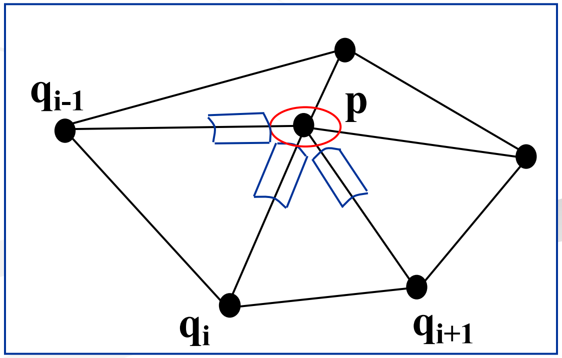


- szöghiány:

$$\delta(\mathbf{p}) = 2\pi - \sum_i \alpha_i$$

- diszkrét becslés: (körlapocska)

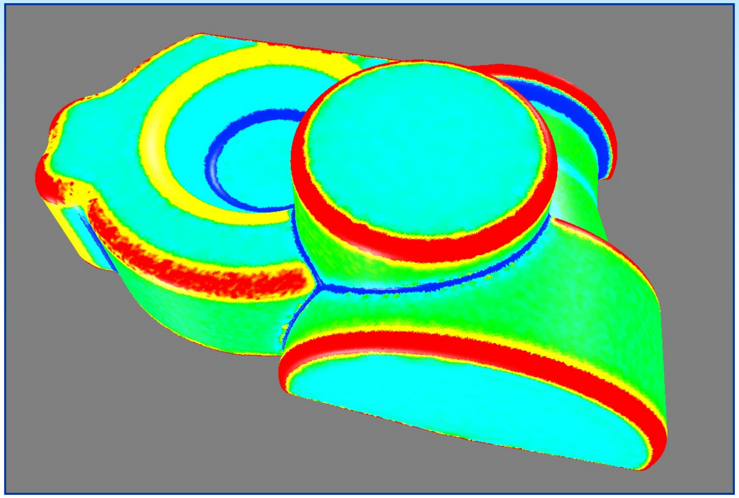
$$G(\mathbf{p}) = \frac{\delta(\mathbf{p})}{\frac{1}{3}A(\mathbf{p})}$$

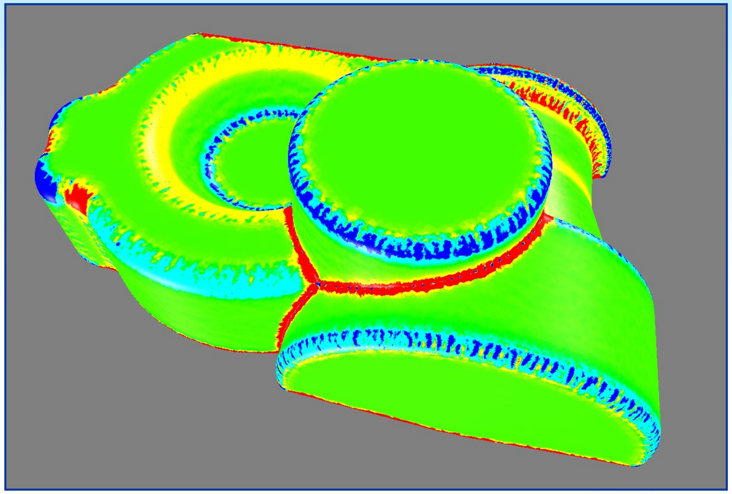


Átlaggörbület (hengerdarabok)

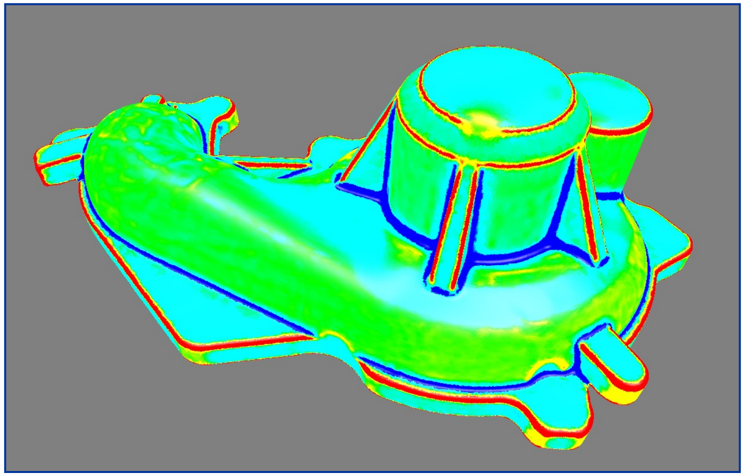
$$H(\mathbf{p}) = \frac{\frac{1}{2}\sum_i Cyl\_Area_i}{\frac{1}{3}A(\mathbf{p})} = \frac{\frac{1}{4}\sum_i \beta_i |\mathbf{e}_i|}{\frac{1}{3}A(\mathbf{p})}$$

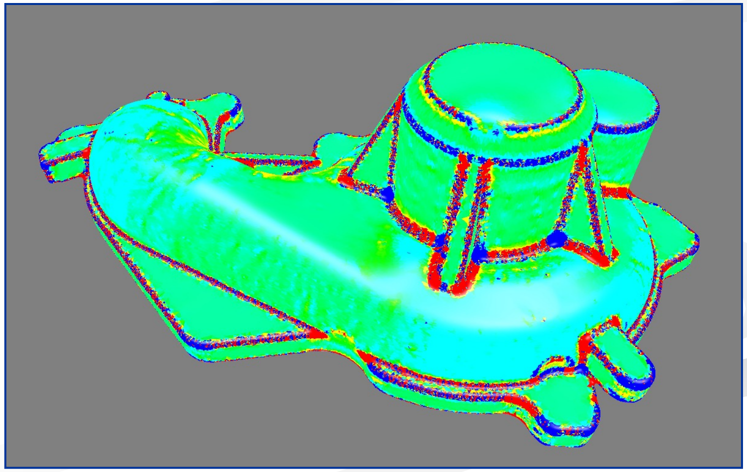
Geometriai jellemzők becslése$_3$





Átlag (H) és Gauss (G) görbület$_1$

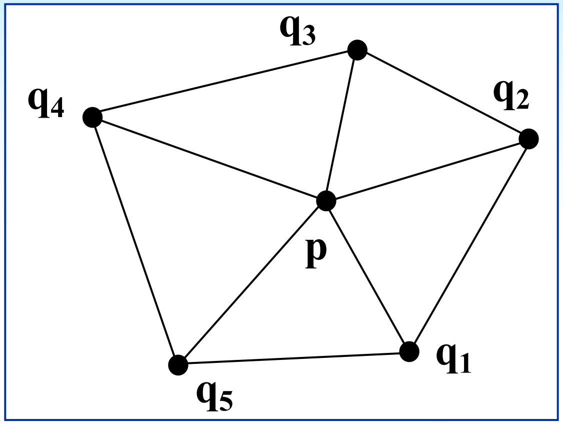




Átlag (H) és Gauss (G) görbület$_2$

Geometriai jellemzők becslése$_{1a}$

a) normálvektor: **n**
b) görbületek:
- Gauss-görbület: $G = \kappa_1 \kappa_2$,,
- Átlaggörbület: $H = (\kappa_1 + \kappa_2) / 2$
- Főgörbületek (κ_1, κ_2), főirányok ($\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$)



Normálvektor becslése sík-illesztés alapján

- adott pont: **p**, körülötte: $\mathbf{q}_i=(x_i,y_i,z_i)$,
- ismeretlen normálvektor : $\mathbf{n}=(n_x,n_y,n_z)$,
- legkisebb négyzetes távolság: $\sum_i D_i^2 = \sum_i (\mathbf{n},\mathbf{q}_i - \mathbf{p})^2 = min$
- kényszer (euklideszi távolság): $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$
- Lagrange-féle multiplikátor: $F(x,y,z) = min,\ G(x,y,z) = c$

$$H(x,y,z,\lambda) = (F(x,y,z) + \lambda(G(x,y,z) - c) = min$$

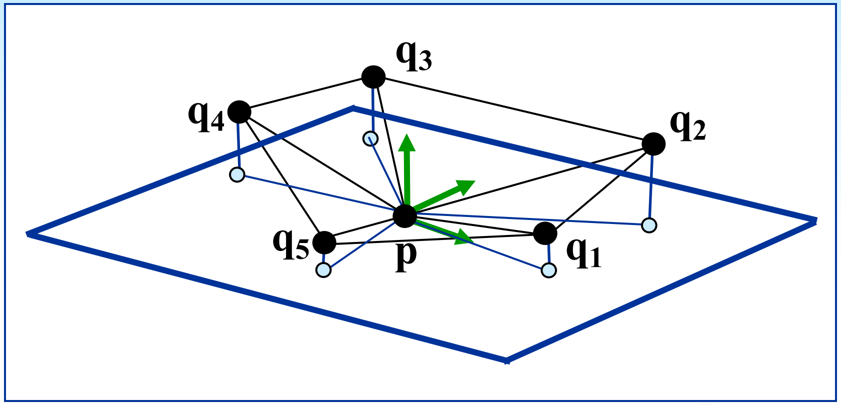
$$\partial H / \partial x = \partial H / \partial y = \partial H / \partial z = \partial H / \partial \lambda = 0$$

- (négy ismeretlenes egyenletrendszer)

Geometriai jellemzők becslése$_{2a}$

Lokális paraboloid-illesztés

adott pontokon keresztül



- legyen **p** az origó
- a lokális koordináta rendszerben:

  $\mathbf{q}_i = (u_i, v_i, w_i)$, $(i = 1,..n,\ n \geq 5)$, $w_i = (\mathbf{n}, \mathbf{q}_i - \mathbf{p})$

- a paraboloid egyenlete: $f(u,v) = au^2 + buv + cv^2 + du + ev$
- ismeretlenek: $\mathbf{x} = [a, b, c, d, e]$
- azonosak a deriváltakkal $(u=0,\ v=0)$-ban: $\mathbf{x} = [\frac{1}{2} f_{uu}, f_{uv}, \frac{1}{2} f_{vv}, f_u, f_v]$
- legkisebb négyzetes (algebrai) távolság:

$$\sum_i D_i^2 = \sum_i (f(u_i, v_i) - w_i)^2 = min$$

Opcionális

Geometriai jellemzők becslése$_{3a}$

Legkisebb négyzetes minimalizálás mátrix alakban:

$$\sum_i D_i^2 = \sum_i (f(u_i, v_i) - w_i)^2 = min$$

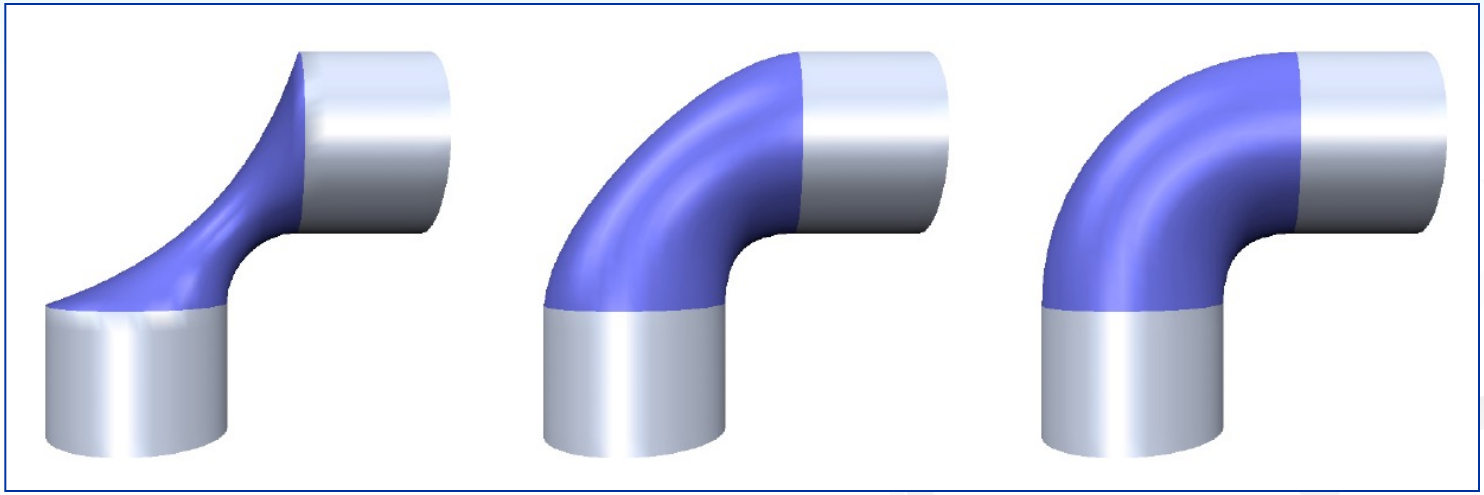
$$(\mathbf{Ax}-\mathbf{b})^2 = min. \quad \Rightarrow \mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{Ax} - \mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{b} = 0, \quad \Rightarrow \mathbf{x} = (\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{b}$$

ahol

$$(\mathbf{Ax}-\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ u_i^2 & u_i v_i & v_i^2 & u_i & v_i \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} . \\ . \\ . \\ w_i \\ . \\ . \end{bmatrix}$$

Háromszöghálók simítása$_1$

- Energia-minimalizálás (fairing) – minőségmérő integrálok: a „tökéletlenséget” büntetik
- A simaság fontos: pl. megjelenítésnél, anyagtulajdonságok, megmunkálás stb.



(Kobbelt)

Membrán energia:
- a felület legyen kicsi

$$\int_S dA = min.$$

$$\iint_\Omega |\mathbf{r}_u|^2 + |\mathbf{r}_v|^2 \, dudv$$

Rugalmas lap energia (thin plate):
- ne legyen nagy a görbület

$$\int_S \kappa_1^2 + \kappa_2^2 dA = min.$$

$$\iint_\Omega |\mathbf{r}_{uu}|^2 + 2|\mathbf{r}_{uv}|^2 + |\mathbf{r}_{vv}|^2 \, dudv$$

Minimális görbület variáció:
- ne változzon gyorsan a görbület

$$\int_S \left(\frac{\partial \kappa_1}{\partial \mathbf{k}_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \kappa_2}{\partial \mathbf{k}_2}\right)^2 dA = min.$$

Háromszöghálók simítása$_1$

Lokális, iteratív módszerek:

(i) Laplace-féle simítás

– a pontokat a szomszédok konvex kombinációjának irányába mozgatja

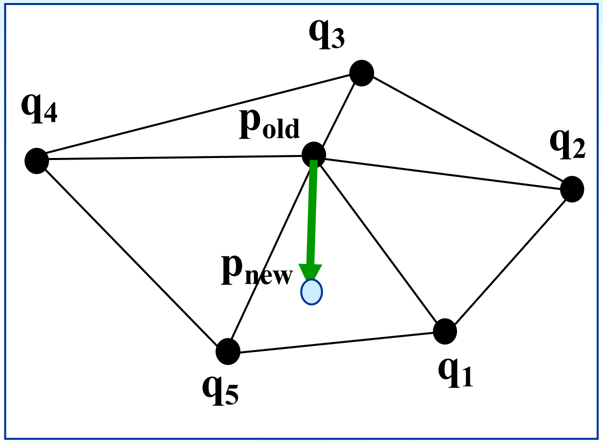
– esernyő operátor, súlyozott átlag

$$U(\mathbf{p}) = \sum_j w_j(\mathbf{q}_j - \mathbf{p}), \quad (a): w_j = 1/n,$$

$$(b): w_{j0} = |\mathbf{q}_j - \mathbf{p}|^{-1}, w_j = \frac{w_{j0}}{\sum_k w_{k0}}$$

– λ simítási mérték

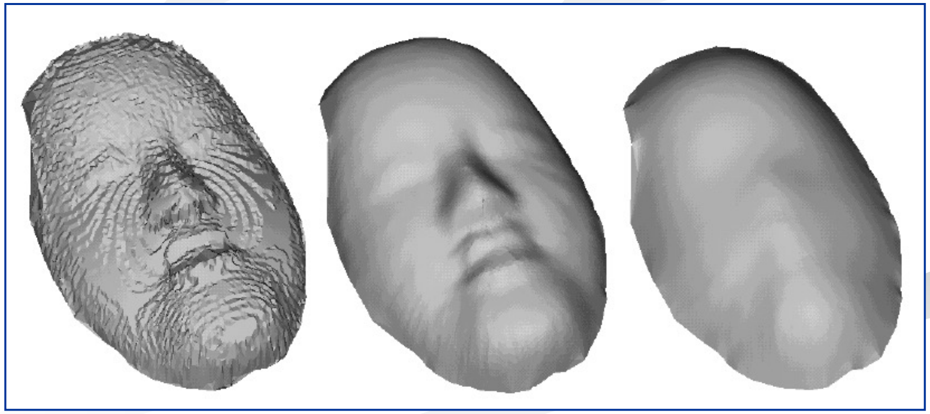
$$\mathbf{p}_{new} = \mathbf{p}_{old} + \lambda U(\mathbf{p}_{old})$$



(ii) Görbület-áramlás

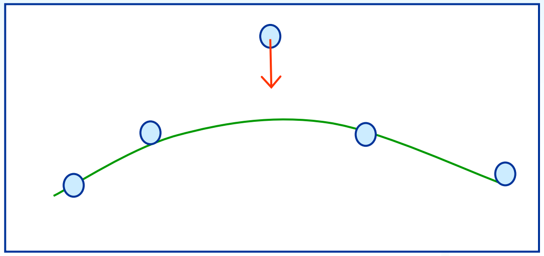
(mean curvature flow)

$$\mathbf{p}_{new} = \mathbf{p}_{old} + \lambda H(\mathbf{p}_{old})\mathbf{n}(\mathbf{p}_{old})$$



Háromszöghálók simítása$_2$

Globális módszerek - numerikus vagy diszkrét simítás (fairing)

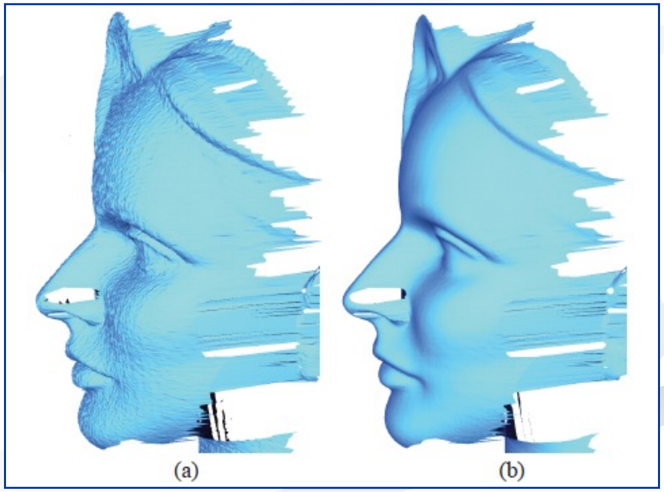


- minden iterációs lépésben módosul a háló és csökken az energia; valamennyi pont módosul: energiaminimalizáló egyenletrendszer:

$$M^n = \{p_i^n\}, E^n \Rightarrow M^{n+1} = \{p_i^{n+1}\}, E^{n+1} \leq E^n$$

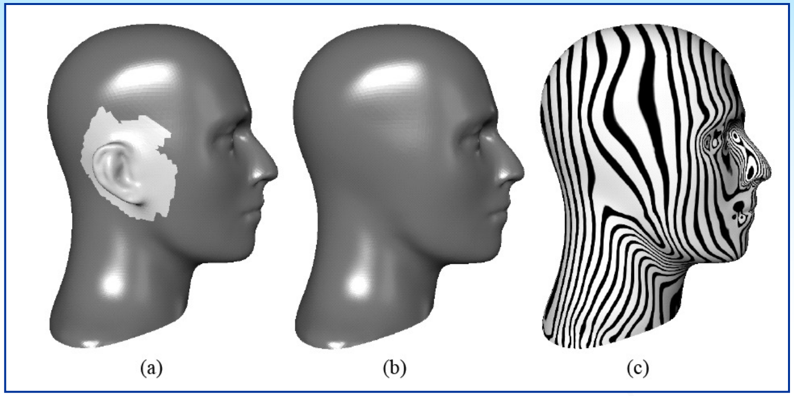
(i) mi az energia ?
(ii) hogyan módosítjuk a pontokat ?

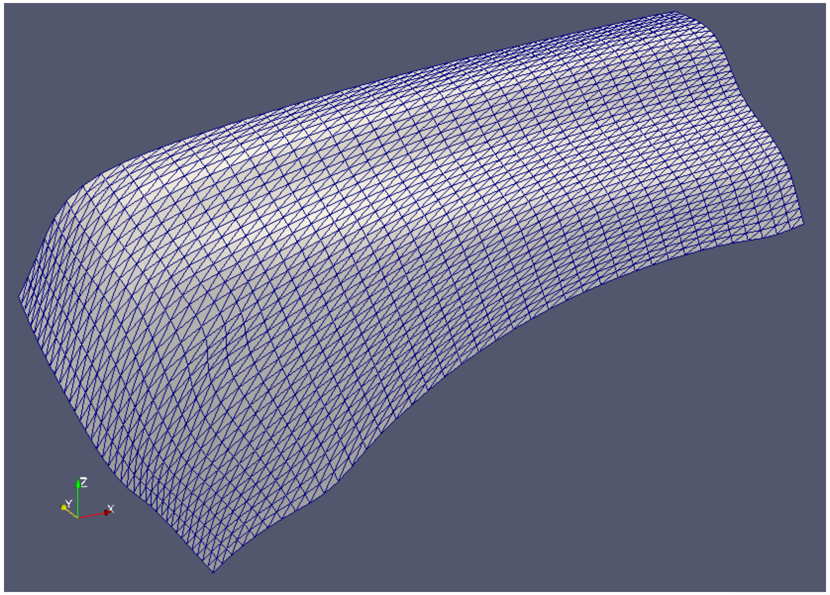
simasági mértékek
1. parametrikus görbületbecslés
2. diszkrét átlaggörbület

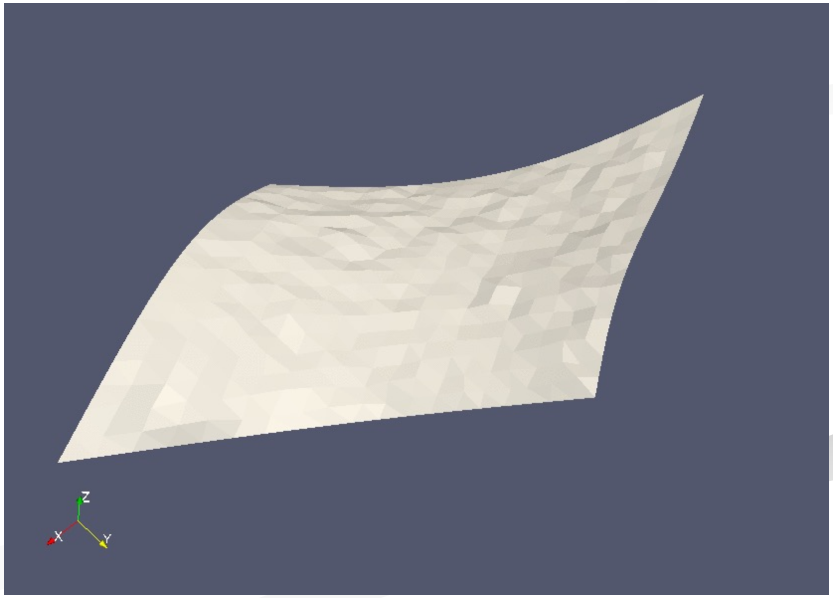


(Desbrun et al.)

Háromszögháló simítás$_3$ – Demó







Háromszöghálók simítása$_4$

1. eljárás: simasági mérték – parametrikus görbület, diszkretizálva

$$E \approx \int f_{uu}^{\ 2} + 2 f_{uv}^{\ 2} + f_{vv}^{\ 2}$$
$$E = \sum_i \omega_i \left(\left(\sum_j \alpha_{ij} p_{ij} \right)^2 + 2 \left(\sum_j \beta_{ij} p_{ij} \right)^2 + \left(\sum_j \gamma_{ij} p_{ij} \right)^2 \right)$$

(ω_i az *i-edik* pont körüli háromszögek területének összege; α_i, β_i, γ_i a deriváltakból adódó együtthatók, p_{ij} a p_i pont szomszédai)

- Cél: új optimális ponthalmaz meghatározása

$$E(S) = E(p_1, \ldots, p_n), \quad \frac{\partial E(S)}{\partial p_i} = \sum_k w_{ik} p_k = 0$$

- E másodfokú, → lineáris egyenletrendszer, ritka mátrix, k – első- és másodfokú szomszédok
- közelítő megoldás - Gauss-Seidel iteráció, csak a diagonális elemekre

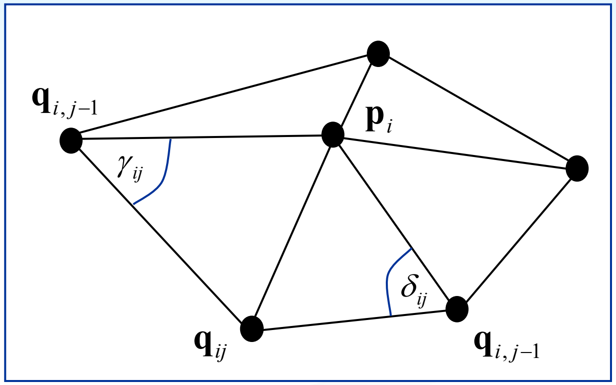
$$p_i^{új} = -\frac{1}{w_{ii}} \sum_{k \neq i} w_{ik} p_k$$

Háromszöghálók simítása$_5$

2. eljárás: simasági mérték – diszkrét átlaggörbület

$$H(\mathbf{p}_i)\mathbf{n}(\mathbf{p}_i) = \frac{3}{4A_i}\sum_j (\cot\gamma_{ij} + \cot\delta_{ij})(\mathbf{q}_{ij} - \mathbf{p}_i)$$

$$H(\mathbf{p}_i) = \frac{3}{4A_i}\sum_j \beta_j \|\mathbf{q}_{ij} - \mathbf{p}_i\|$$

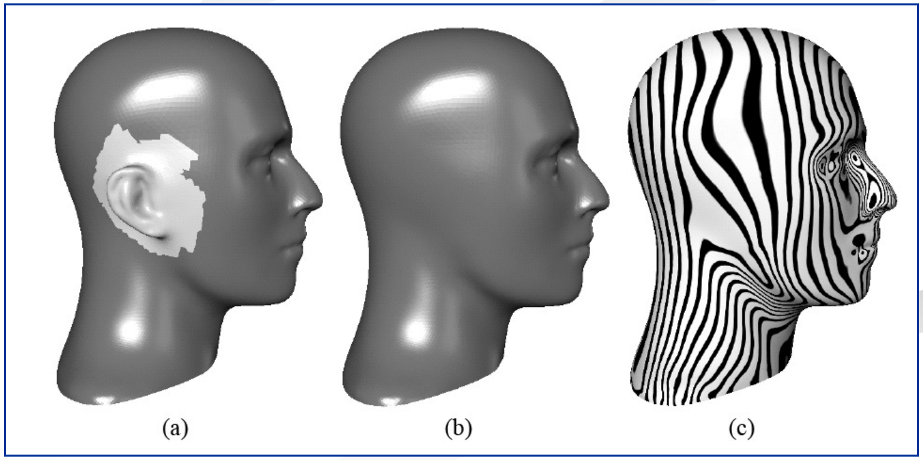


- minimalizáló egyenletrendszer, az új görbületekre kell megoldani:

$$\sum_j (\cot\gamma_{ij} + \cot\delta_{ij})(H(\mathbf{p}_i) - H(\mathbf{q}_{ij})) = 0$$

- közelítő megoldás → új átlaggörbület becslések, pont módosítás az új célgörbületek szerint:

$$\mathbf{p}_i^{new} = \mathbf{p}_i^{old} + \lambda H(\mathbf{p}_i^{new})\mathbf{n}(\mathbf{p}_i^{new})$$



Gyorsítás: először durva felbontás, utána finomítás

Peremfeltételek: az első (és a második) háromszögsor változatlan marad