3D számítógépes geometria és alakzatrekonstrukció

2a. Háromszöghálók

http://cg.iit.bme.hu/portal/node/312
https://www.vik.bme.hu/kepzes/targyak/VIIIMA25

Dr. Várady Tamás, Dr. Salvi Péter
BME, Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Irányítástechnika és Informatika Tanszék

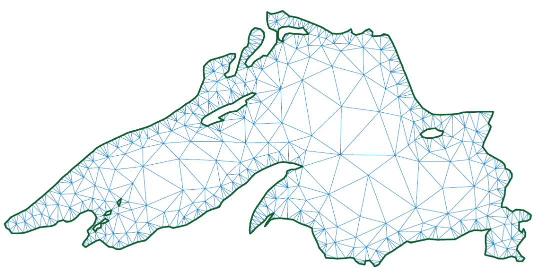
Tartalom

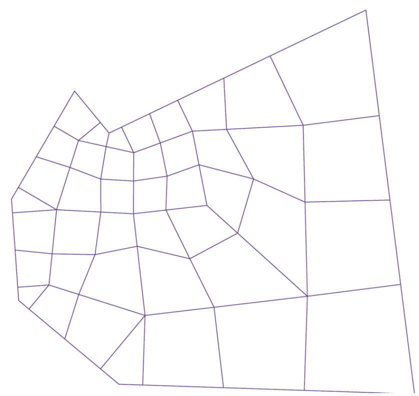
- Háromszöghálók – bevezetés
- 2D: Voronoi-diagram és Delaunay-háromszögelés, egyszerű algoritmusok
- Háromszöghálók 3D-ben
- További háromszögelő algoritmusok

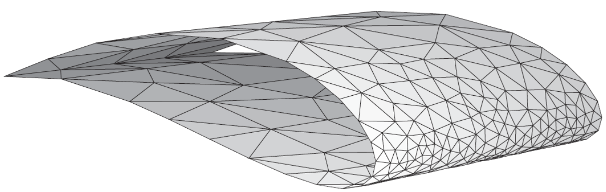
Tesszelláció – általánosan$_1$

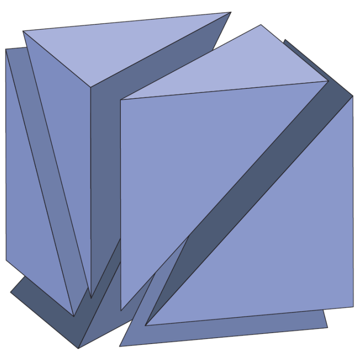
Lineáris struktúrák létrehozása

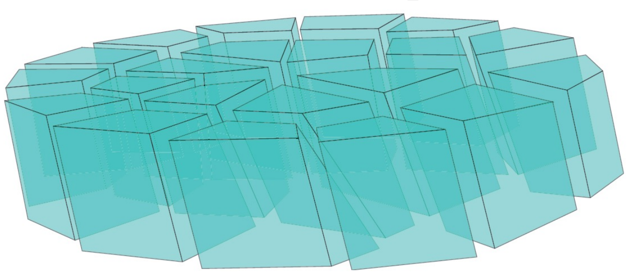
- csúcsok
- egyenes élek gráfja
- felületek tesszellációja – síklapok
- tömör testek tesszellációja – térbeli primitív testek











Háromszöghálók$_2$

Alkalmazások

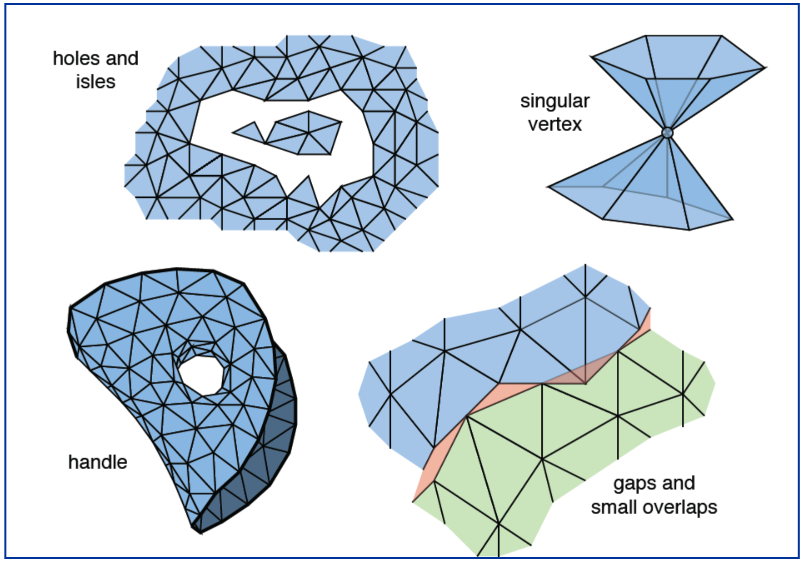
- számítógépes grafika, számítógépes játékok, animáció, virtuális valóság
- numerikus számítások, komplex egyenletrendszerek
- szimuláció, véges-elemes eljárások
- általában – orvosi és mérnöki alkalmazások
  - nincs szükség folytonos reprezentációra
  - folytonos reprezentáció nem használható

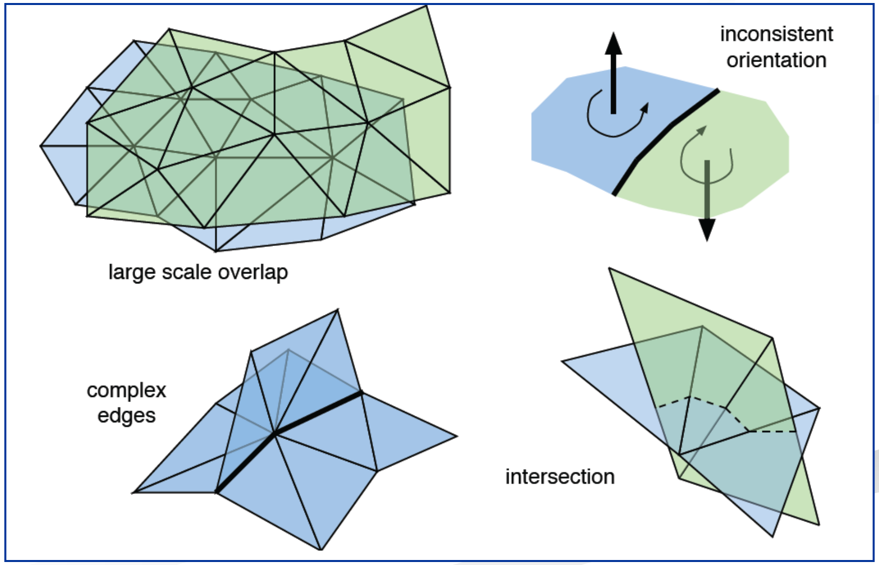
Előnyök

- egységes adatstruktúra
- hatékony algoritmusok
- hardver támogatás stb.

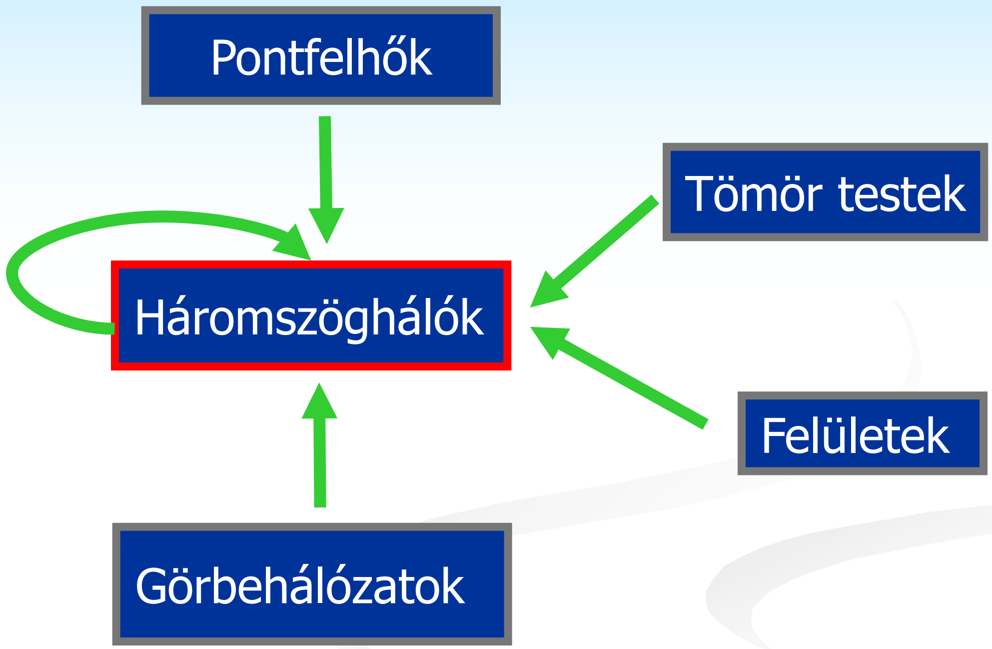
Háromszöghálók$_3$

- lokálisan körlap topológia (2-manifold)
- nem önmetsző, nem átlapoló
- folytonos és orientálható
- egyenletes és sima





Háromszögháló algoritmusok$_4$

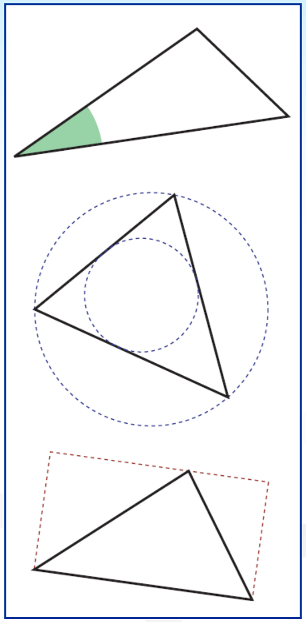


Input:

- 2D-s és 3D-s pontfelhők
- pontfelhők + élek és él-hurkok → háromszögkitöltés
- háromszögháló → egyszerűsítés, újraháromszögelés, szépítés
- törött vonalas élek és „megvágott” (trimmelt) felületlapok

Háromszöghálók jellemzése$_5$

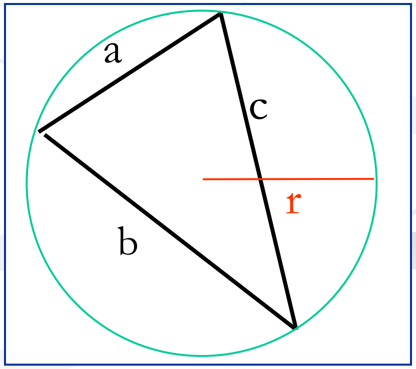
Izotrópia: „egyenletes” élhosszak és „egyenletes” szögek



Mértékek:

- legkisebb szög
- a körülírt kör és a belső érintőkör sugarának aránya
- a leghosszabb oldal és a magasság aránya
- a legrövidebb oldal és a körülírható kör sugarának aránya

$$\frac{\min(a,b,c)}{r}$$

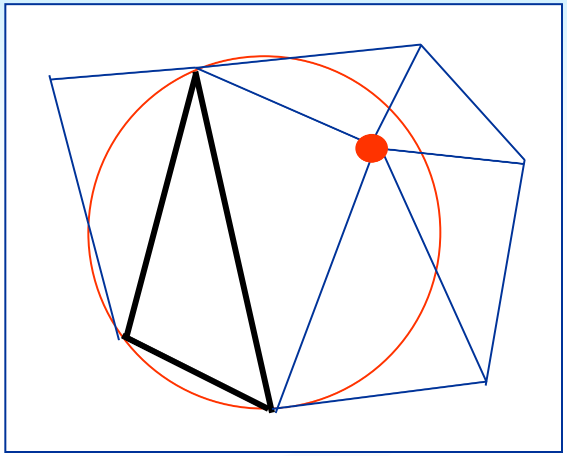


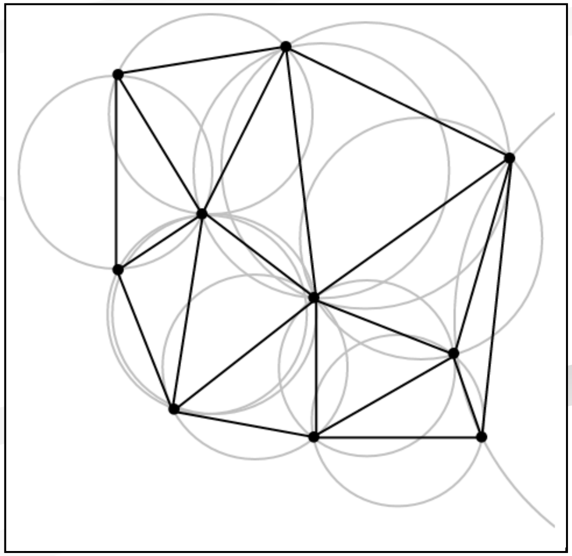
maximális, ha $a=b=c$, $\sqrt{3}$

2D: tesszellációs algoritmusok$_1$

Delaunay háromszögháló (DT)

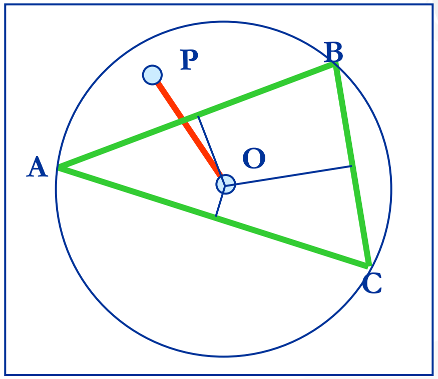
- a körülírható körökben nincs más pont
- egyértelmű, ha nincsenek körnégyszögek
- egyenletes háromszögeloszlás
- maximalizálja a legkisebb szöget
- minimalizálja a legnagyobb körülírható kör sugarát
- minimalizálja a beírható körök sugarainak összegét





Belső pont vizsgálat

- $|P-O| < r$ (?)



2D: tesszellációs algoritmusok$_2$

Voronoi diagram (VD) – tartományokra bontás „természetes” módon:

$$q \in V\_cella_i: \ |q\text{-}p_i| < |q\text{-}p_j|, j \neq i$$

$$q \in V\_él_{ij}: \ |q\text{-}p_i| = |q\text{-}p_j|$$

$$q \in V\_csúcs_{ijk}: \ |q\text{-}p_i| = |q\text{-}p_j| = |q\text{-}p_k|$$

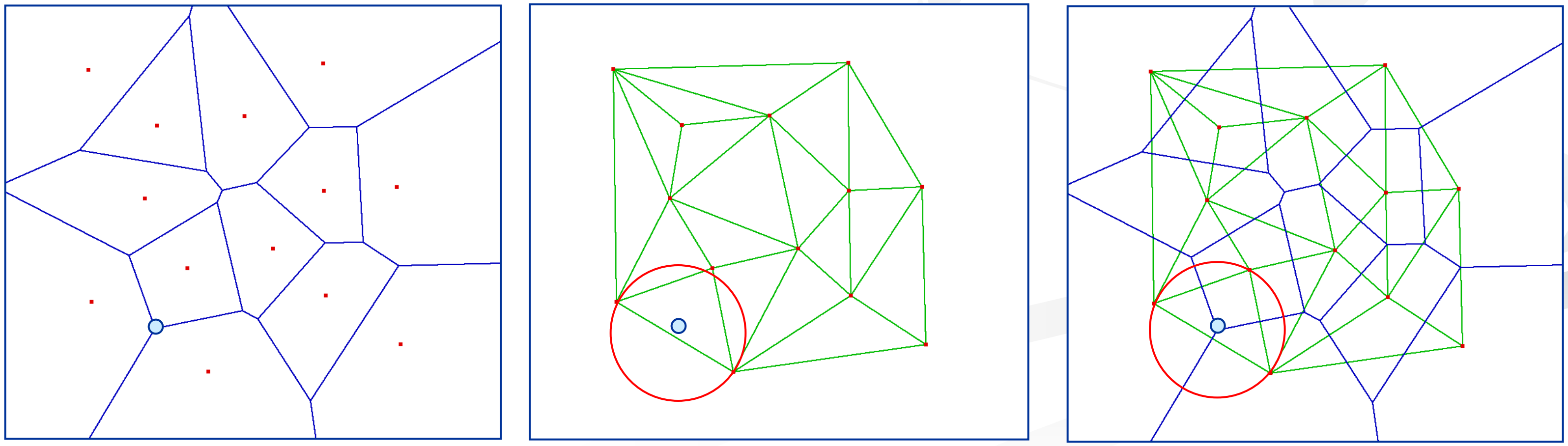
?

Duális gráfok: Voronoi diagram
↔ Delaunay-háromszögháló

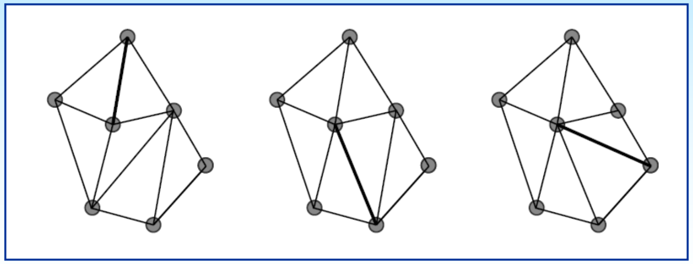
$$D\_csúcs(p_i) \Leftrightarrow V\_cella_i$$

$$D\_háromszög(p_i p_j p_k) \Leftrightarrow V\_csúcs_{ijk}$$

$$D\_él(p_i p_j) \Leftrightarrow V\_él_{ij}$$

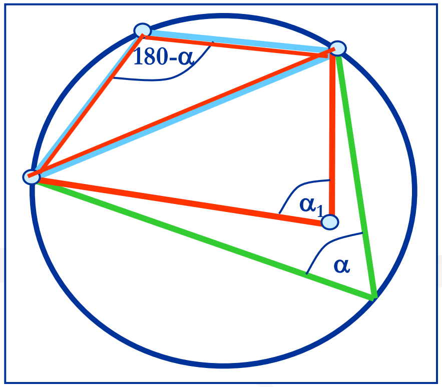


2D Delaunay: élcsere algoritmus



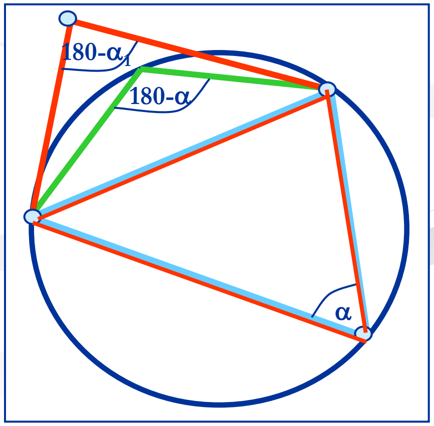
Négy 2D-s algoritmus:

- Élcsere (Delaunay)
- Inkrementális (Delaunay)
- „Oszd meg és uralkodj” (Delaunay)
- Söprő egyenes (Voronoi)



Élcsere algoritmus

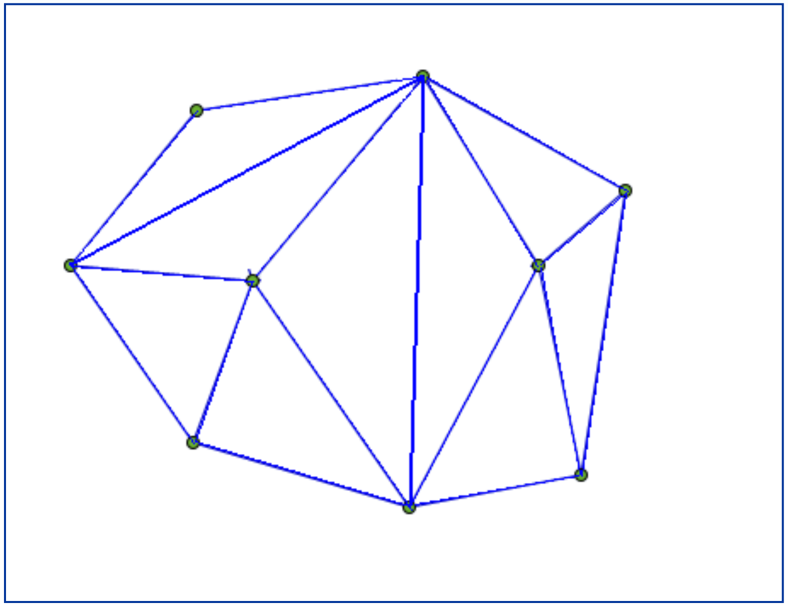
- input: tetszőleges háromszögelés
- konvex négyszögek vizsgálata
- ha szükséges, lokális élcsere (edge flipping)
- az eljárás mindig terminál – $O(n^2)$ lépés

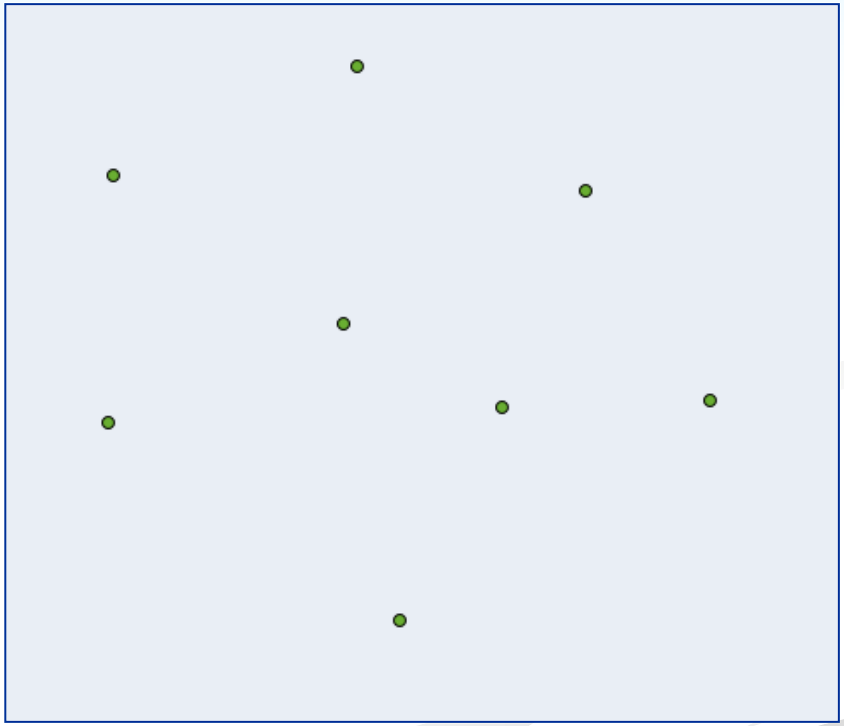


Körnégyszög kritérium

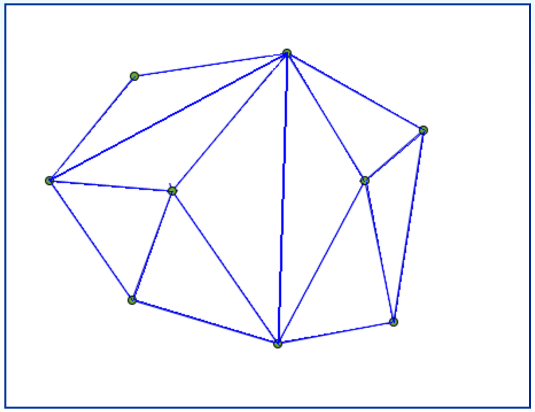
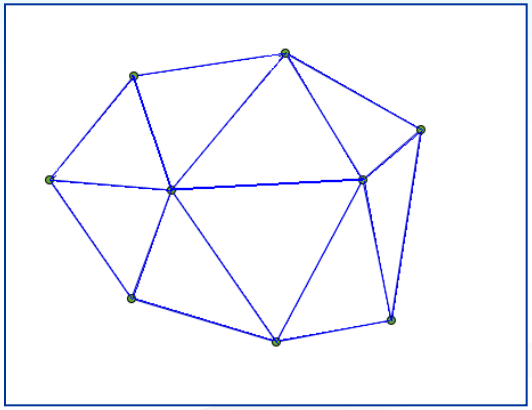
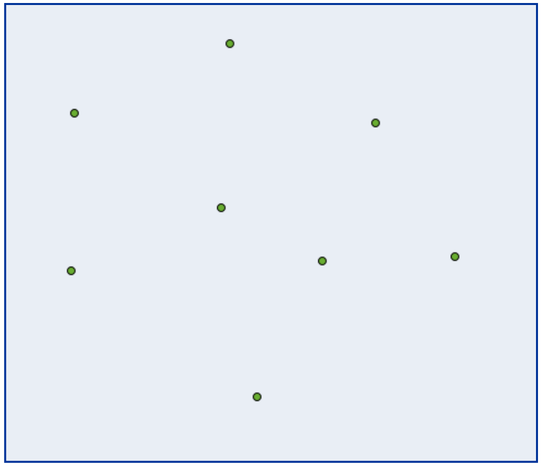
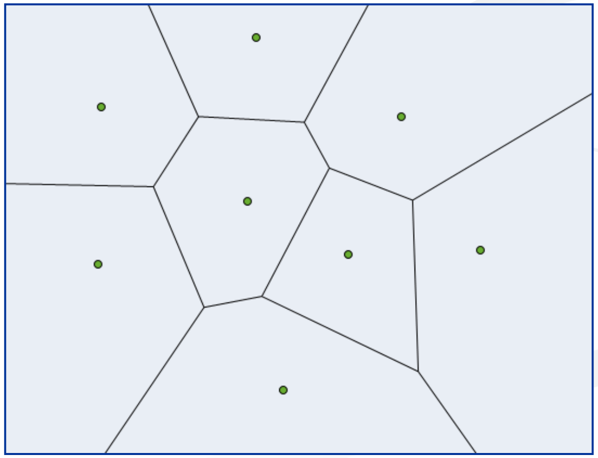
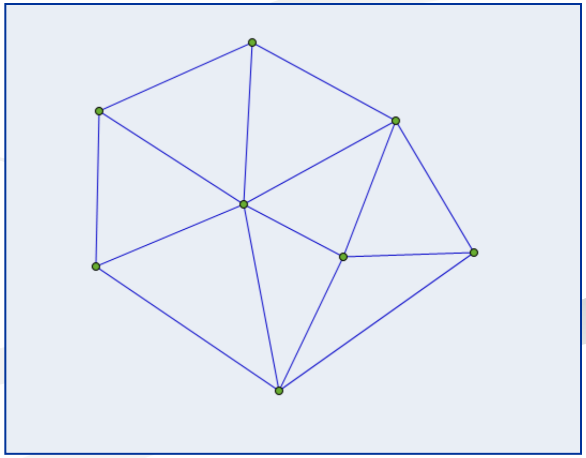
- szemben levő szögek összege: *180*
- első eset: $\alpha_1+(180-\alpha) > 180$ ↔ rossz átló
- második eset: $\alpha+(180-\alpha_1) < 180$ ↔ jó átló
- <u>mindig a nagyobb szögpár csúcsait kell összekötni !</u>

Ujjgyakorlat*- Delaunay háromszögek és Voronoi diagram





Ujjgyakorlat - Delaunay háromszögek és Voronoi diagram

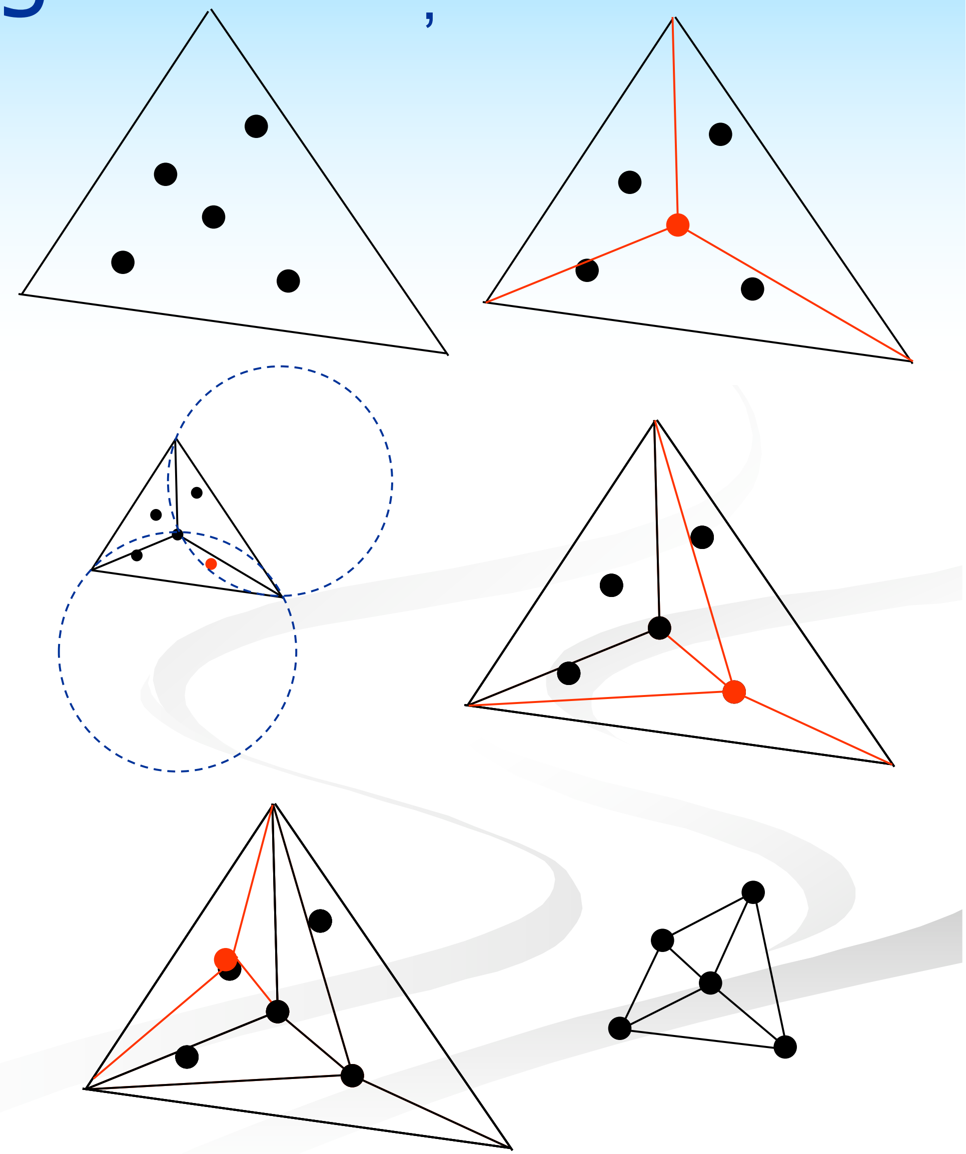
Inkrementális algoritmus

- Bowyer-Watson algoritmusa

1. óriás-háromszög az összes pont körül
2. pontok hozzáadása egyesével
3. körülírható körök meghatározása, amelyek tartalmazzák p_i-t
4. ezen háromszögek törlése
5. a megmaradt poligon és a p_i pont háromszögelése
6. óriás-háromszög törlése

- $O(n^2)$ lépés, átlagosan $3n$

?



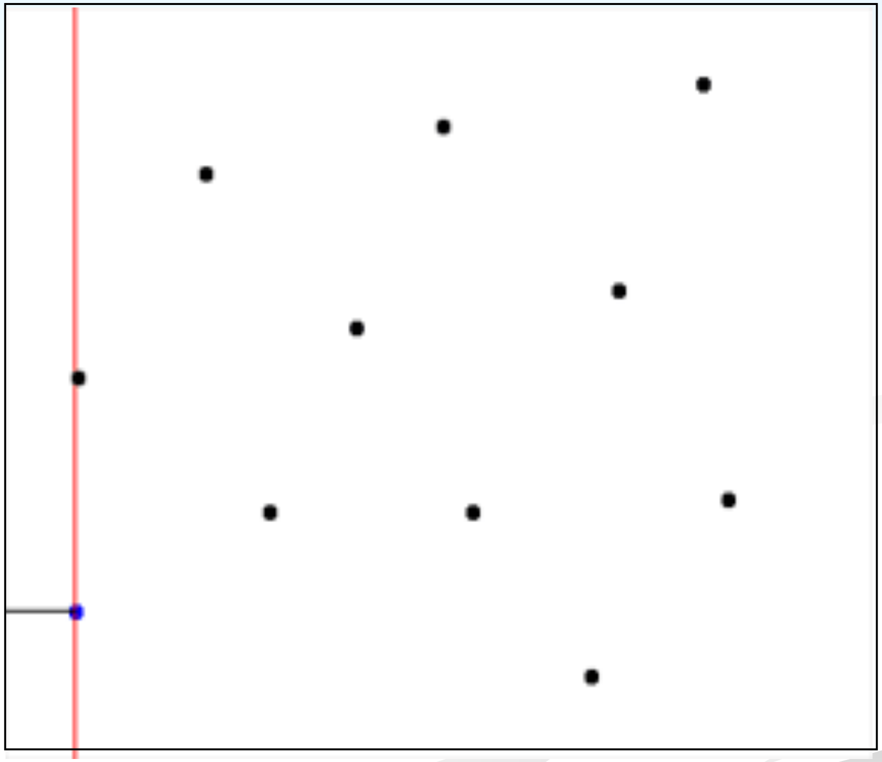
2D Voronoi: söprővonal algoritmus$_1$

Fortune algoritmusa

Söprő egyenes - balról jobbra

Baloldal: félkész Voronoi diagram

- mozgó hullámfront (beach line): parabola ívek sorozata
- parabolaív – pontok egyenlő távolságra egy p_i ponttól (D_csúcs) és a söprő egyenestől
- Voronoi él: szomszédos parabolaívek metszéspontjainak sorozata



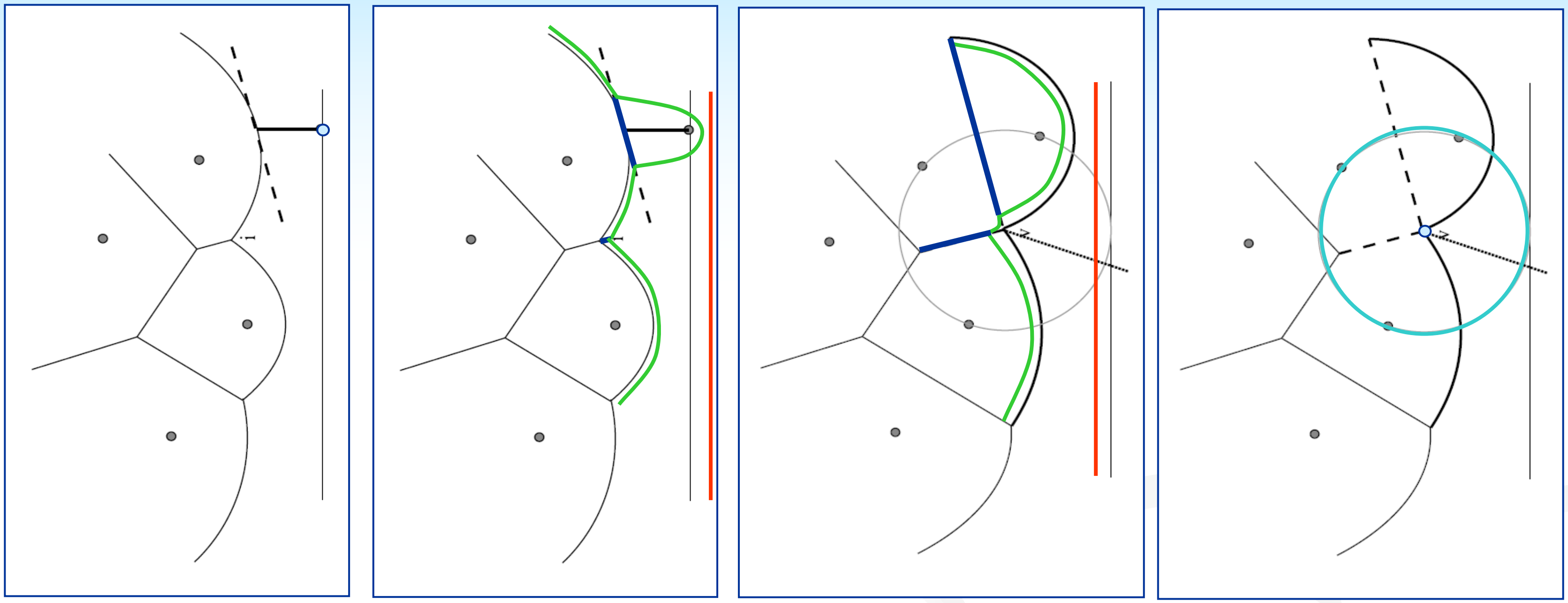
Két esemény:

- Csúcs-esemény → új V_él
- Kör-esemény → új V_csúcs

n log n lépésszám

?

2D Voronoi: söprővonal algoritmus$_2$



Csúcs-esemény ⇒

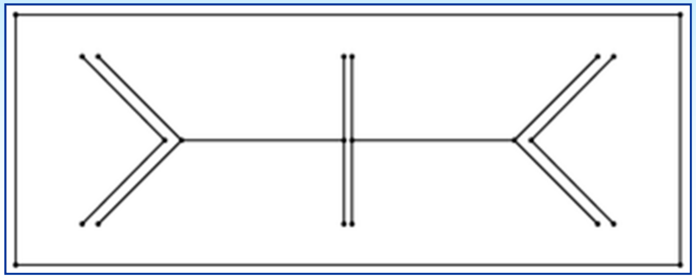
- új D_csúcs befűzése
- új V_cella (egy új szűk parabola tágulni kezd)
- új V_él (él szélesedik)

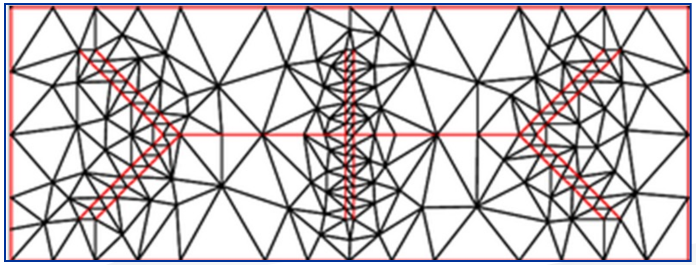
⇒ Kör-esemény

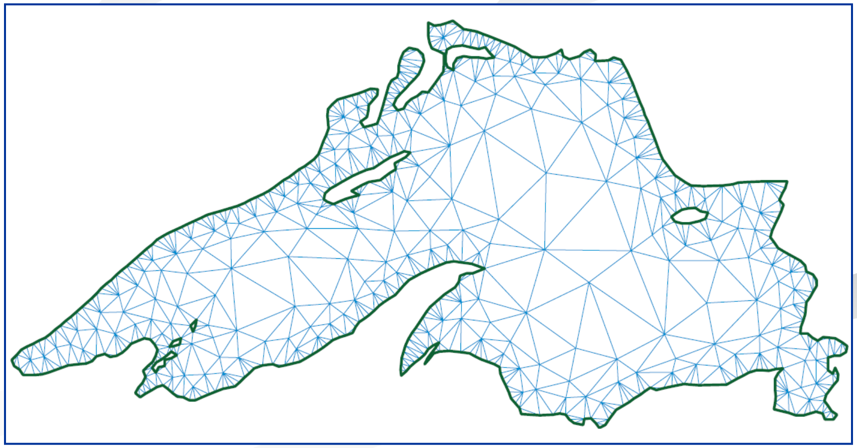
- parabola eltűnik, két él összefut és egy V_cella lezárul
- új V_csúcs befűzése
- új V_él (növekszik)

Háromszögelés kényszerekkel

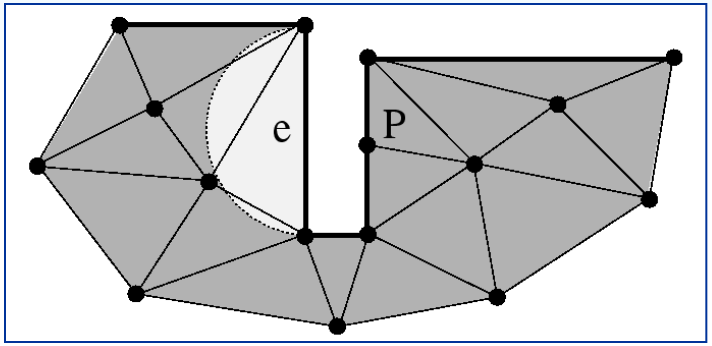
- Input:
  - ponthalmaz + rögzített élek és él-hurkok
- Ouput:
  - háromszögháló: legkisebb szög ≥ α_0, leghosszabb él ≤ l_0 (opcionális)
- Iteratív eljárás
  - kezdeti Delaunay-szerű háromszögelés
  - új határpontok beszúrása
  - “rossz” háromszögek → belső pontok beszúrása, lokális korrekció

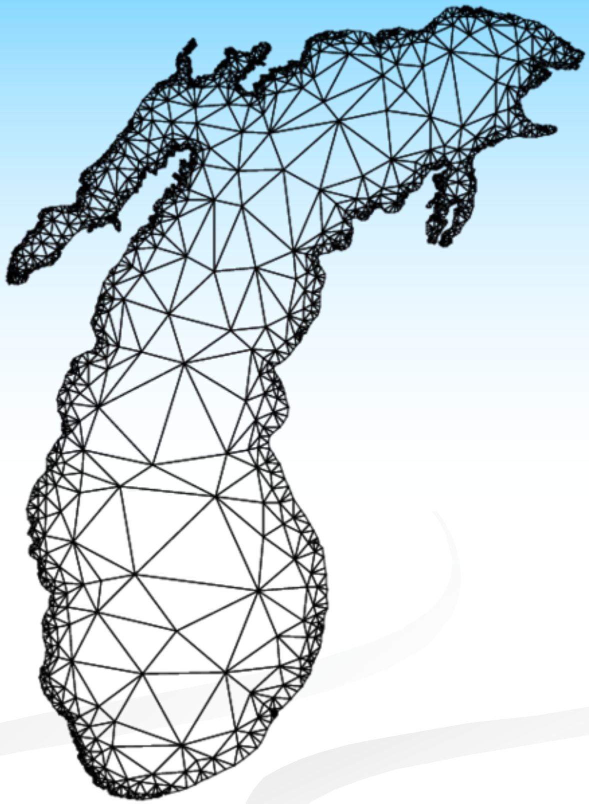






Önálló projekt**





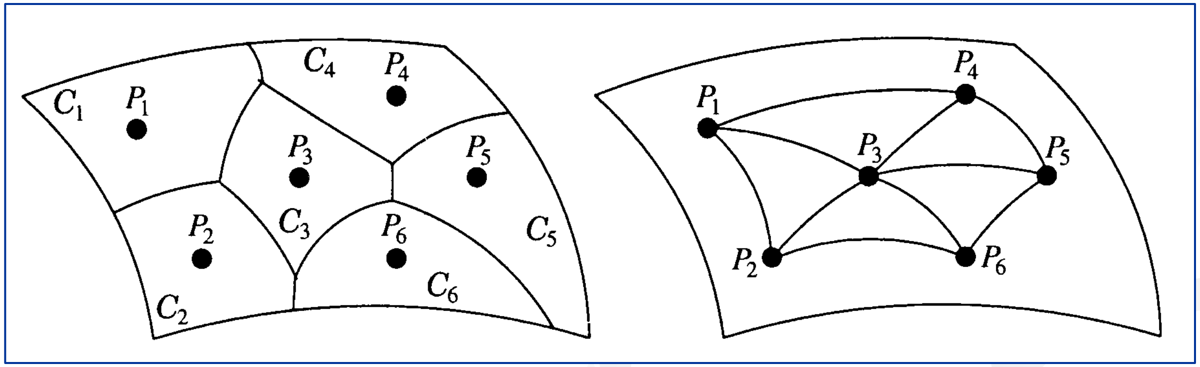
- Delaunay háromszöghálók előállítása kényszerek figyelembevételével

- Szemináriumi előadás és prototípus implementáció
- Poligon struktúrák létrehozása, Delaunay előállítása majd finomítása

3D háromszögelés$_1$

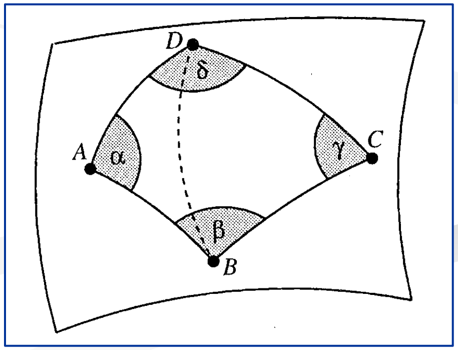
Kiterjesztés görbült felületekre (Kós'99)

- távolság: legrövidebb felületi görbeszakasz hossza
- általánosított Voronoi cellák és Delaunay háromszögek



Általánosított szögkritérium görbült négyszögekre

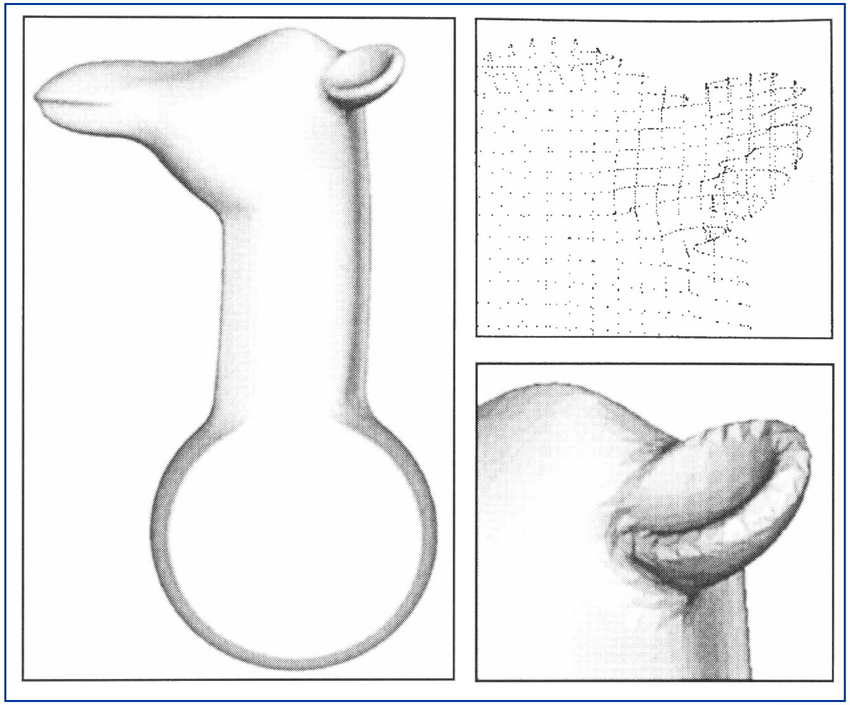
- ha β + δ > α + γ → BD összekötés

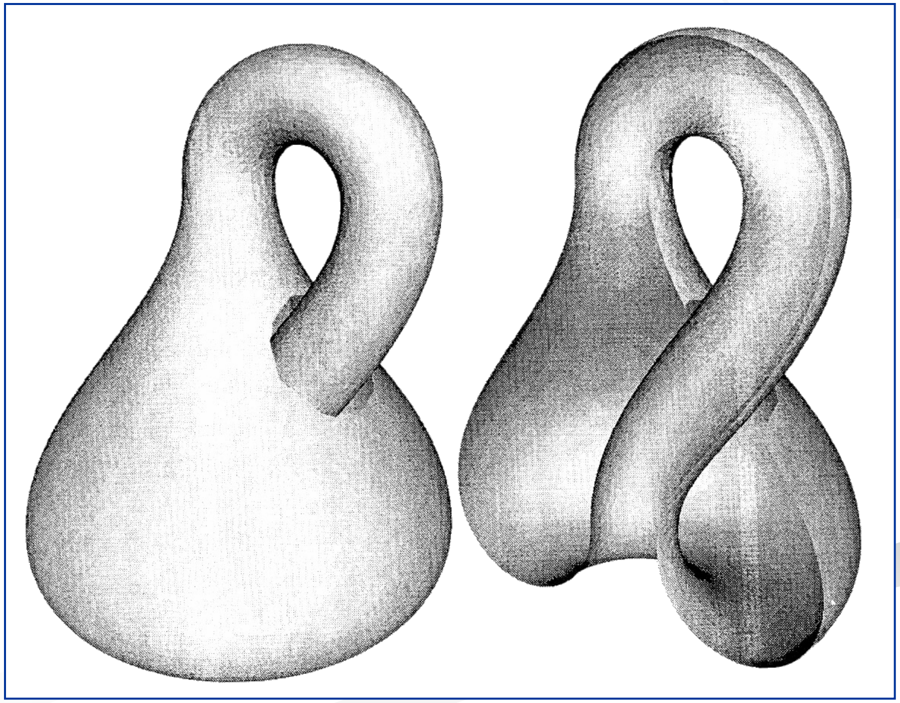


3D háromszögelés$_2$

Gyakorlati elvárások:

- általános topológia: nyitott vagy zárt felületek, lyukak
- zajos, nagyon egyenlőtlen eloszlású pontok
- nem projektálható, nem orientálható ponthalmazok

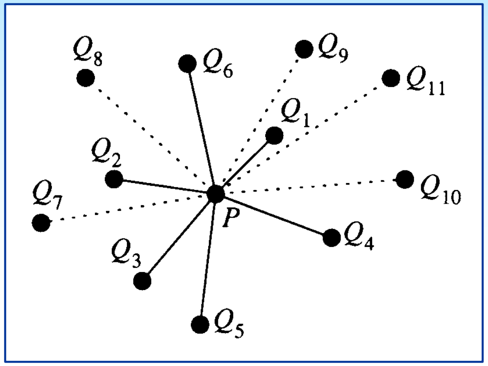




3D háromszögelés$_3$

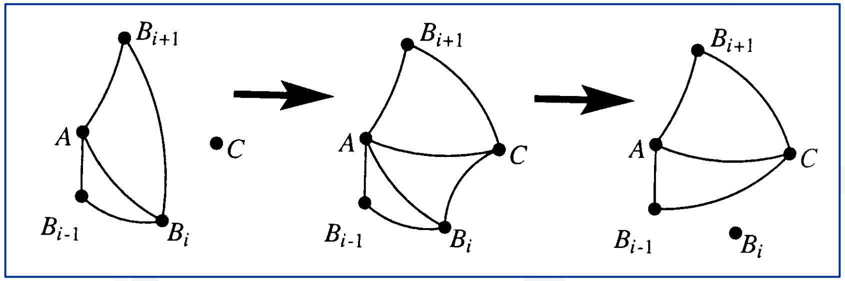
Előfeldolgozás

- octree
- lokális normálvektor becslés
- szomszédsági gráf



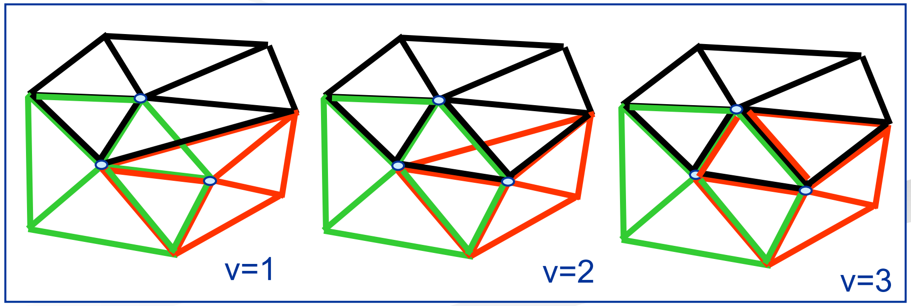
Lokális Delaunay-háromszögelés pontonként a normál síkban

- *A* és *C* összekötése (?) – a négyszög szabály szerint: AB_jCB_{j+1}
- szükség esetén B_j vagy B_{j+1}törlése
- lokális háromszöglegyező előállítása

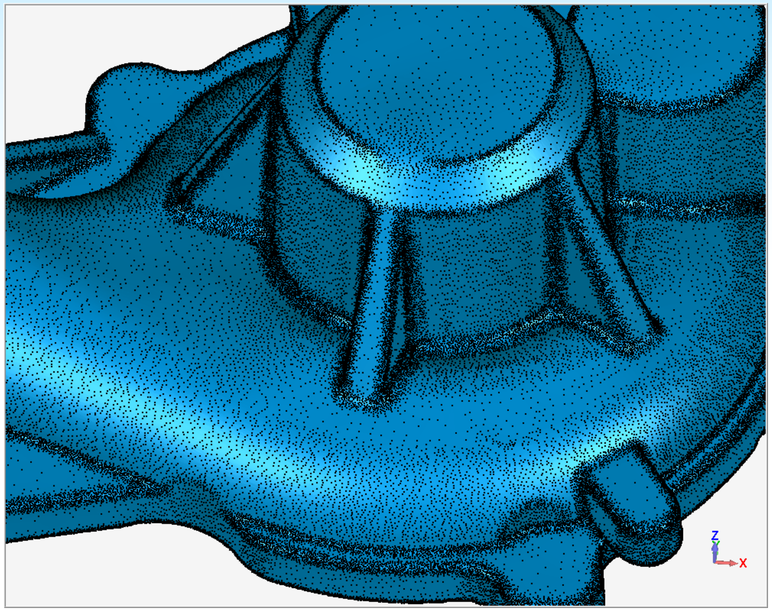


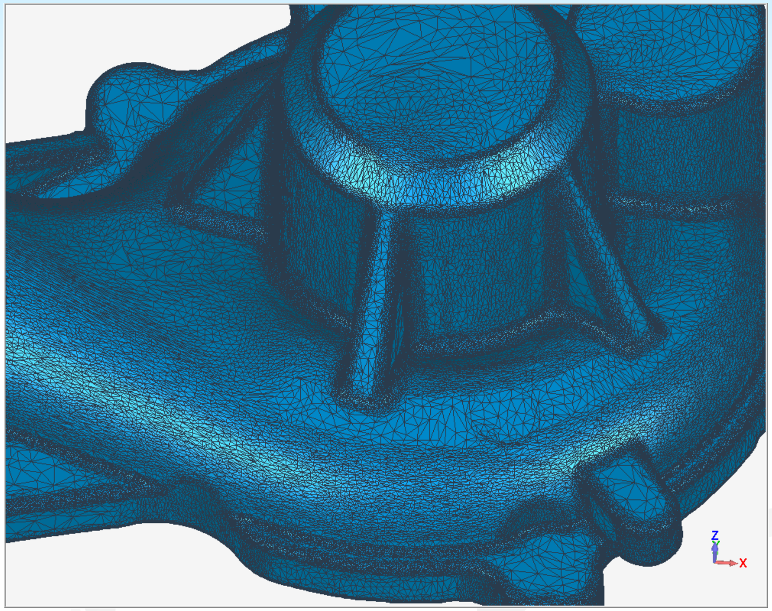
Összeépítés 3D-ben

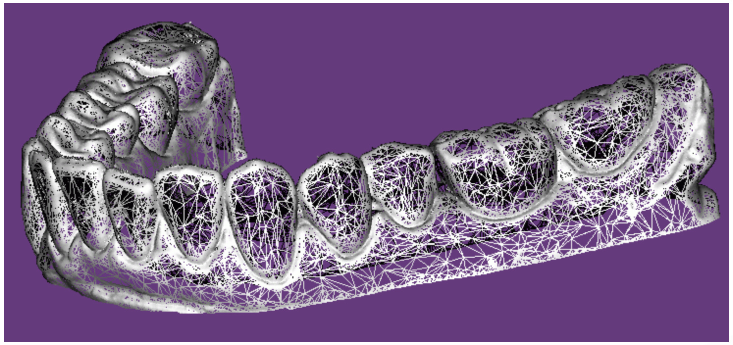
- inkonzisztens háromszögek esetén: szavazás előfordulás szerint – 1, 2, 3

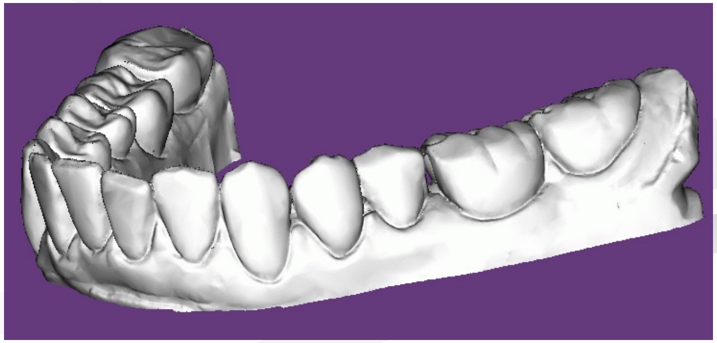


3D háromszögelés$_4$ - példák

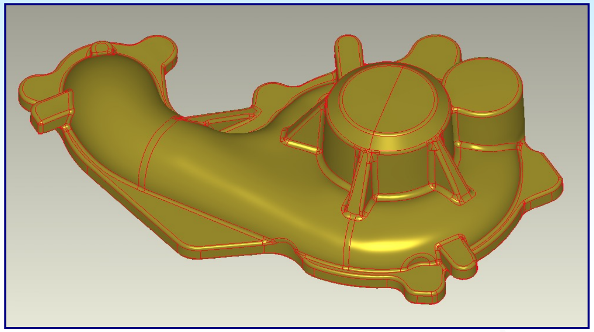


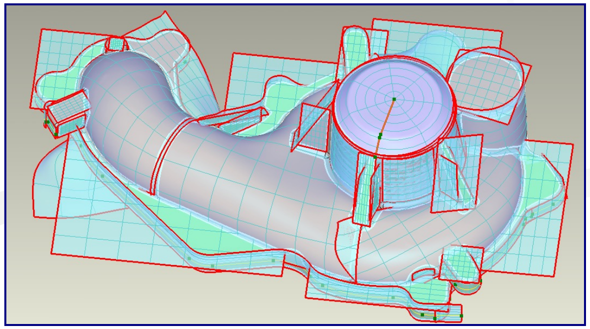


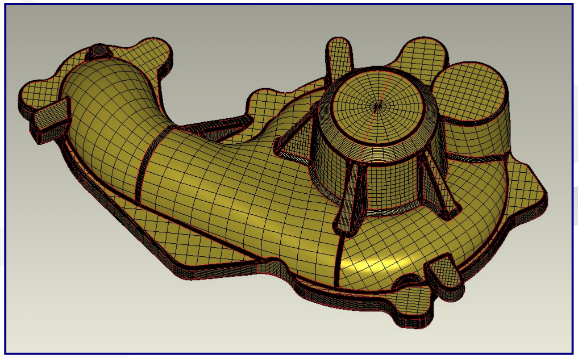




Vágott (trimmelt) lapok háromszögelése



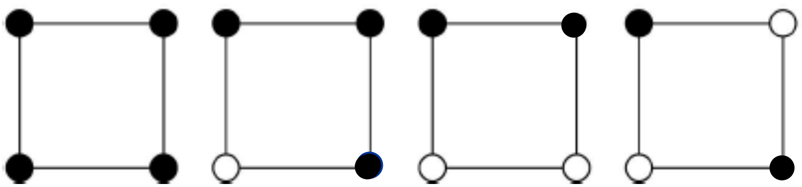


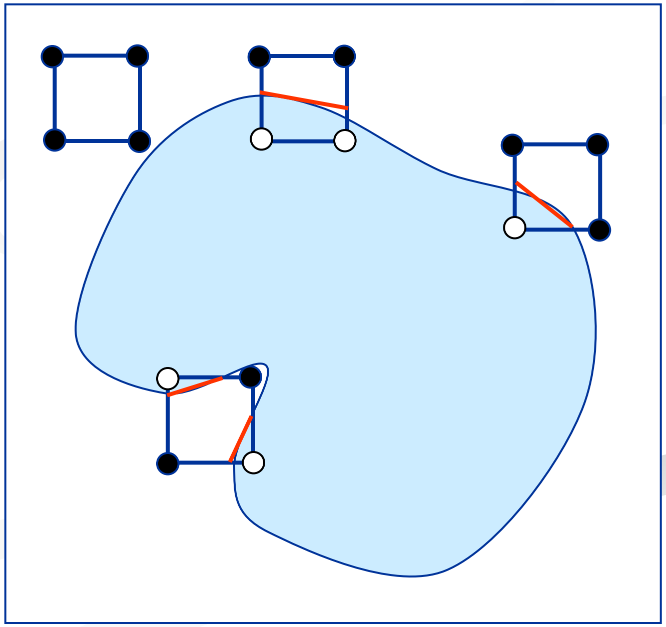


- Szabadformájú felületek: [u,v] parametrikus tartomány
- Analitikus felületdarabok: létezik parametrikus reprezentáció
- Algoritmus:
  - [u,v] tartomány felosztása háromszögekre (szabályos háló)
  - 3D élek közelítése törtvonallal
  - élek visszavetítése [u,v]-be
  - félbevágott háromszögek újraháromszögelése
  - leképzés 2D → 3D
  - 3D háromszögháló szépítése

Implicit felületek háromszögelése$_1$

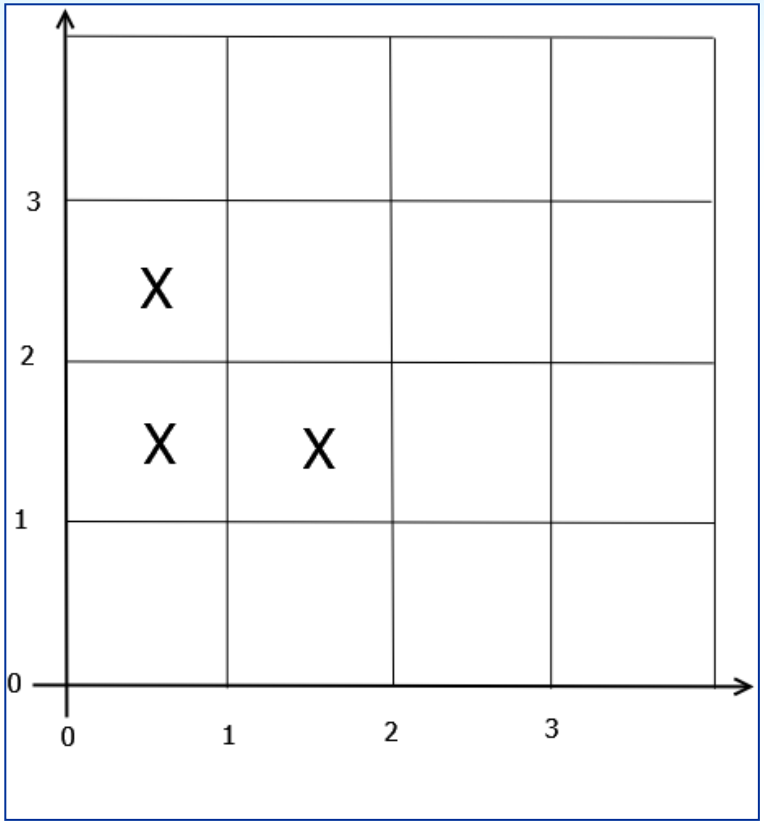
- Implicit felületek – parametrizáció általában nincs: *F(x,y,z)=0*
- CT, MR mérések – voxel reprezentáció, cél: $\alpha \geq$ *konstans* izofelület előállítása
- Háromszögelés – sétáló kockák (marching cubes)
- A skalár mező kiértékelhető a sarokpontokban
- Sétáló négyzetek - 2D-s konfigurációk:





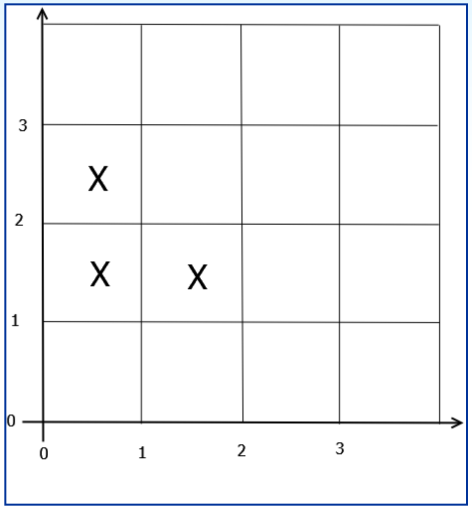
- Adaptív finomítás célszerű

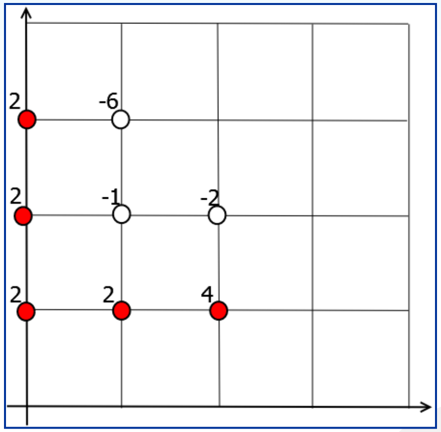
Ujjgyakorlat* - sétáló négyzet

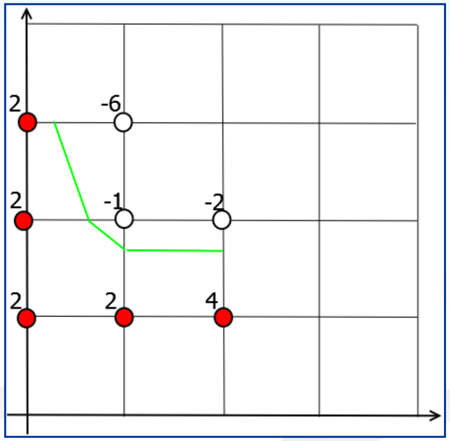


$$F(x, y) = x^2 - y^2 x + 2$$

Ujjgyakorlat - sétáló négyzet



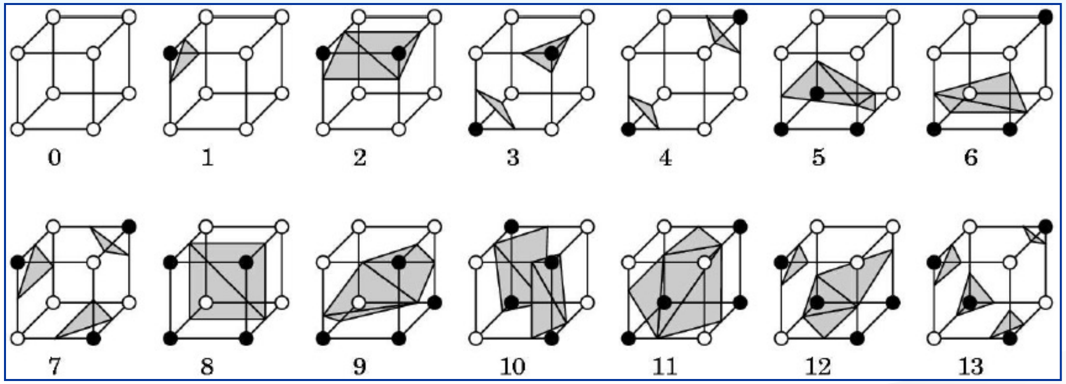




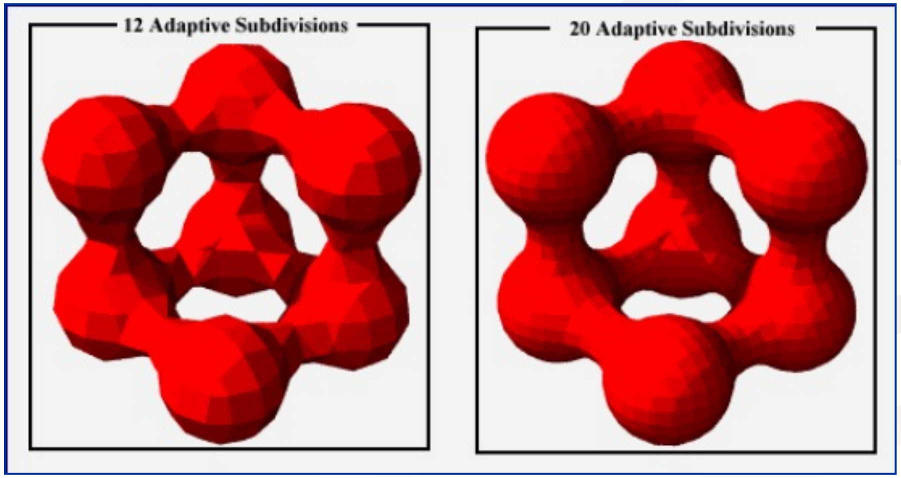
$$F(x,y)=x^2-y^2x+2$$

Implicit felületek háromszögelése$_2$

3D ekvivalens konfigurációk

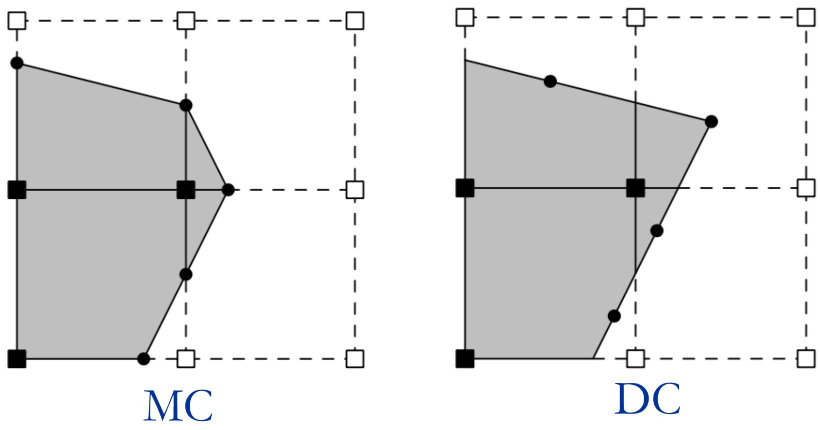


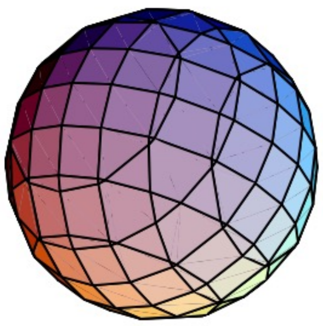
3D példa

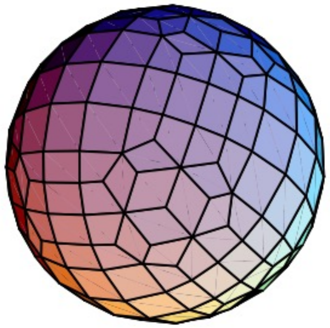


Implicit felületek háromszögelése$_3$

- Probléma: sok csúnya és kicsi háromszög
- Duális módszer („dual contouring” / SurfaceNet)
  - Csúcsok a cellákban, nem az éleken
  - Egyszerű topológia (mindig négyszögek)

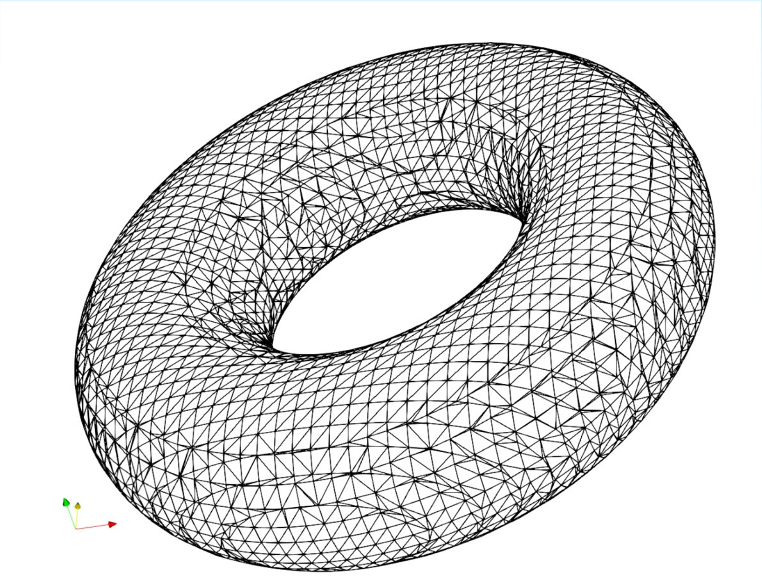


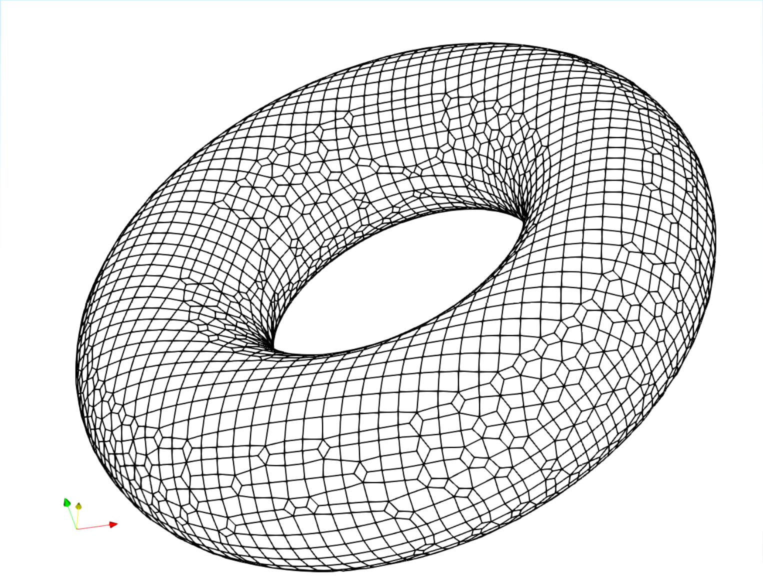




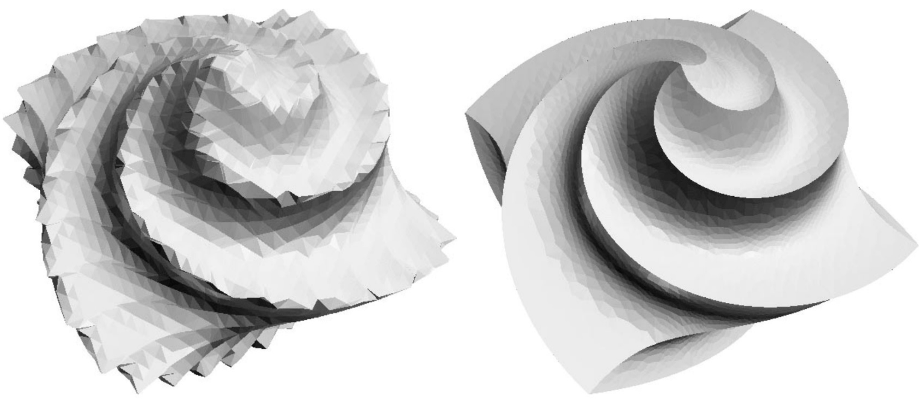
- Fel tud használni gradiens információt is
  - Pontosabban helyezi el a cellában a pontot
  - $\sum_i (\mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}_i))^2 \longrightarrow \min$

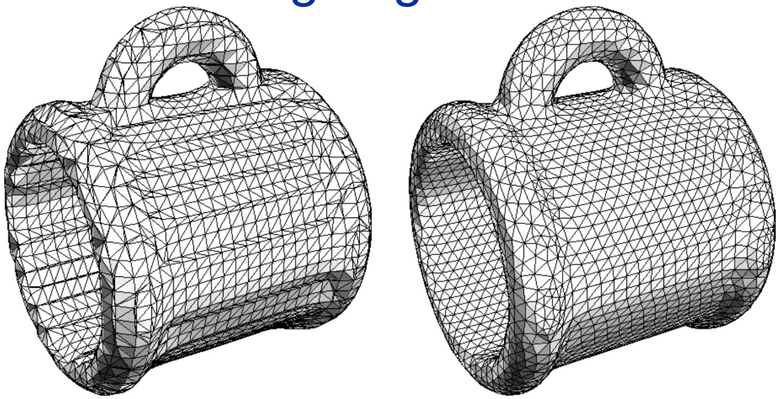
Implicit felületek háromszögelése$_4$





- További problémák, pl. éles élek kezelése – rengeteg variáns





A következő előadás tartalma

- háromszöghálók egyszerűsítése
  - csúcspontok klaszterezése
  - inkrementális eljárások
  - progresszív hálók
  - egyenletes mintavételezés és újrahálózás
- progresszív hálók
- normál vektorok és görbületek numerikus becslése
- háromszöghálók simítása