3D számítógépes geometria és alakzatrekonstrukció

1b. Görbék és felületek

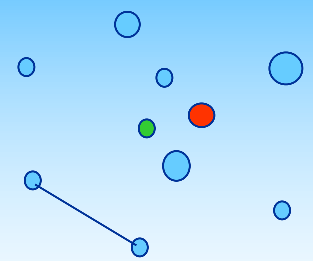
http://cg.iit.bme.hu/portal/node/312
https://www.vik.bme.hu/kepzes/targyak/VIIIMA25

Dr. Várady Tamás, Dr. Salvi Péter
BME, Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Irányítástechnika és Informatika Tanszék

Tartalom

- Pontok és vektorok
- Görbe és felületegyenletek
- Differenciál geometria - alapok:
  - implicit és parametrikus görbék
  - implicit és parametrikus felületek

Pontok$_1$



$$\mathbf{p} = (x, y) \in R^2, \mathbf{p} = (x, y, z) \in R^3$$

Pontok kombinálása (súlyozott átlag)

- lineáris kombináció: $\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{p}_i, \quad \alpha_i \in R, \mathbf{p}_i \in R^3$
- baricentrikus kombináció: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$
- konvex kombináció: $\alpha_i \geq 0 \quad \text{pl.} \;\; \alpha_i = \frac{1}{n} \quad \alpha_i = \frac{m_i}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$

Pontok transzformációja

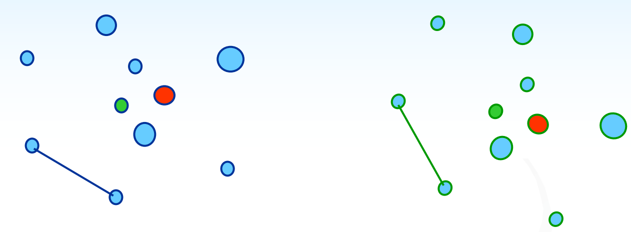
$$\mathbf{r}^* = \Phi(\mathbf{r}); \Phi : R^2 \to R^2$$

- pl. eltolás, elforgatás, skálázás, nyírás
- affin transzformáció

Pontok$_2$

Az összes affin transzformáció felírható az alábbi formában (!):

$$\mathbf{r}^* = \Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\mathbf{A} + \mathbf{v}$$



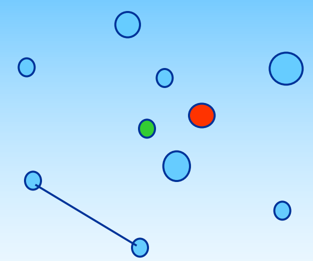
$$[x^*, y^*] = [x, y]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + [v_x, v_y]$$

$$[x^*, y^*, z^*] = [x, y, z]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + [v_x, v_y, v_z]$$

- egyenest egyenesbe képez

- R^2: adott két háromszög – a Φ leképzés egyértelmű
  R^3: adott két tetraéder – a Φ leképzés egyértelmű

Pontok$_3$



$$\mathbf{r}^* = \Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{rA} + \mathbf{v}$$

Azonosság: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = 0$

Eltolás: $\mathbf{A} = \mathbf{I}, \; \mathbf{v} \neq 0$

Forgatás: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \; \mathbf{v} = 0$

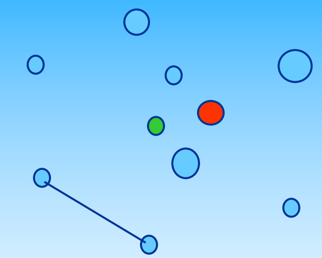
Skálázás: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$

Nyírás: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$

Egybevágóság: $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$

$$(x, y) \rightarrow (x + ay, y)$$

Affin kombináció



(Affin invariáns lineáris kombináció)

Alapkövetelmény:

1. kombináció, 2. transzformáció ≡ 1. transzformáció, 2. kombináció

$$\Phi : R^2 \to R^2, \quad \mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{r}^* = \Phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Phi(\mathbf{p}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{p}_i^*$$

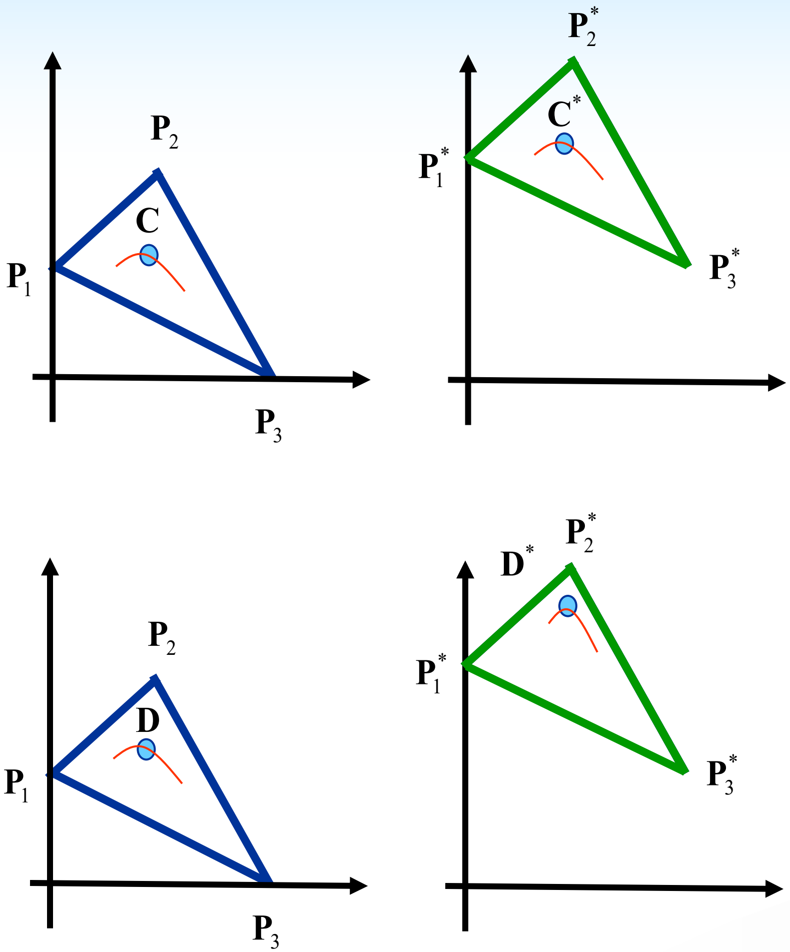
Feltételek:

(i) α_i - k baricentrikus súlyok $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$

(ii) Φ affin transzformáció

Példa

$$\mathbf{r}^* = \Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{r} + (0{,}2)$$



Baricentrikus súlyok

$$\mathbf{P}_1 = (0{,}2),\ \alpha_1 = \frac{1}{4},\ \mathbf{P}_2 = (2{,}4),\ \alpha_2 = \frac{1}{2},\ \mathbf{P}_3 = (4{,}0),\ \alpha_3 = \frac{1}{4},$$

$$\mathbf{C} = (0{,}2)\frac{1}{4} + (2{,}4)\frac{1}{2} + (4{,}0)\frac{1}{4} = (0+1+1,\ \frac{1}{2}+2+0) = (2{,}2.5)$$

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C} + (0{,}2):\quad OK$$

$$(0{,}4)\frac{1}{4} + (2{,}6)\frac{1}{2} + (4{,}2)\frac{1}{4} = (0+1+1,\ 1+3+0.5) = (2{,}4.5)$$

Nem baricentrikus kombináció !

$$\mathbf{P}_1 = (0{,}2),\ \alpha_1 = \frac{1}{2},\ \mathbf{P}_2 = (2{,}4),\ \alpha_2 = \frac{1}{2},\ \mathbf{P}_3 = (4{,}0),\ \alpha_3 = \frac{1}{4},$$

$$\mathbf{D} = (0{,}2)\frac{1}{2} + (2{,}4)\frac{1}{2} + (4{,}0)\frac{1}{4} = (0+1+1,\ 1+2+0) = (2{,}3)$$

$$\mathbf{D}^* \neq \mathbf{D} + (0{,}2)\ !!!$$

$$(0{,}4)\frac{1}{2} + (2{,}6)\frac{1}{2} + (4{,}2)\frac{1}{4} = (0+1+1,\ 2+3+0.5) = (2{,}5.5)$$

Vektorok$_1$

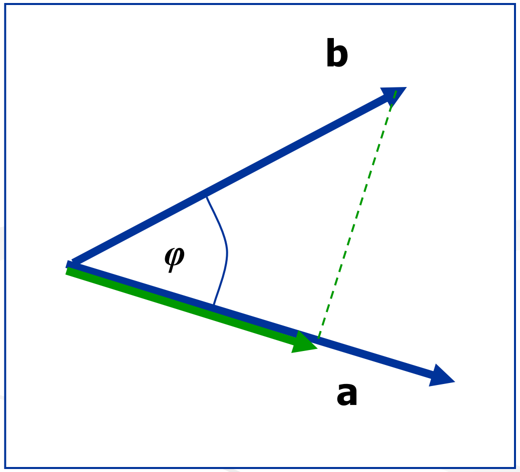
$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) \in R^3$

Elemi vektor műveletek: $R^3 \to R^3, \quad \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{e} = \lambda\mathbf{a}$

Skalárszorzás (dot product):

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi$$



$|\mathbf{b}|\cos\varphi = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) / |\mathbf{a}|$

Tulajdonságok:

$$\text{Kommutatív}: \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$$

$$\text{Disztributív}: \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

$$90^\circ : (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$$

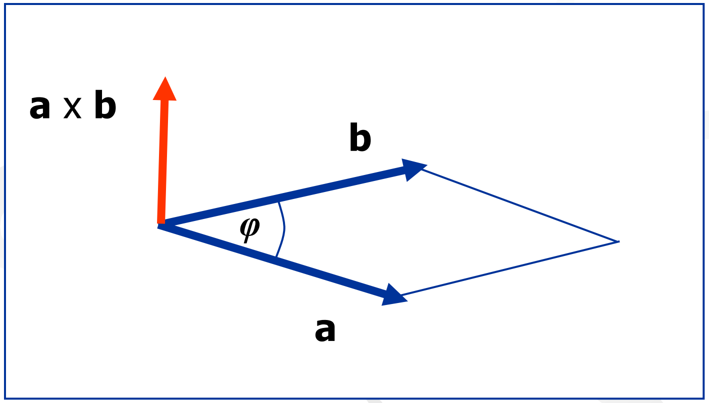
$$\text{Abszolút érték négyzete}: (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2$$

Vektorok$_2$

Vektorszorzás (cross product):

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = (a_y b_z - b_y a_z, -a_x b_z + b_x a_z, a_x b_y - b_x a_y)$$

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$$



(Jobb kéz szabály)

Tulajdonságok:

$$\text{Nem kommutatív: } \quad \mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}!$$

$$\text{Disztributív: } \quad (\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$$

$$\text{Párhuzamosság: } \quad \mathbf{a}\times\mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$$

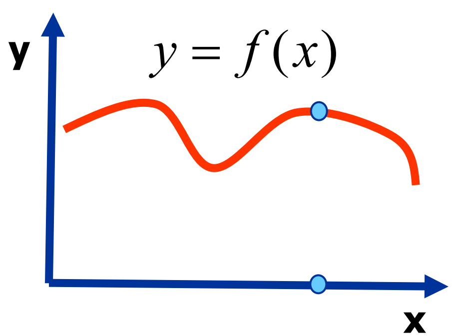
$$\text{Paralelogramma területe: } \quad |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$$

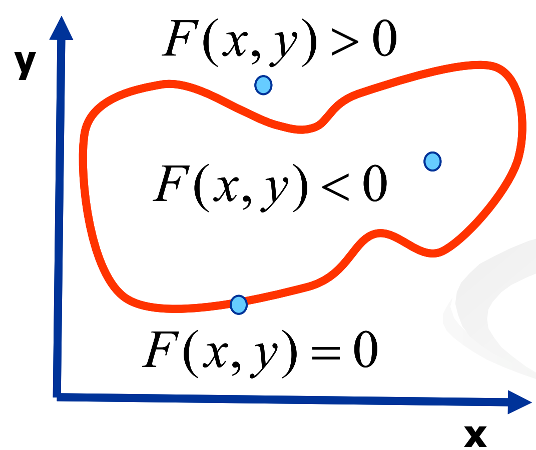
Görbe és felület egyenletek$_1$

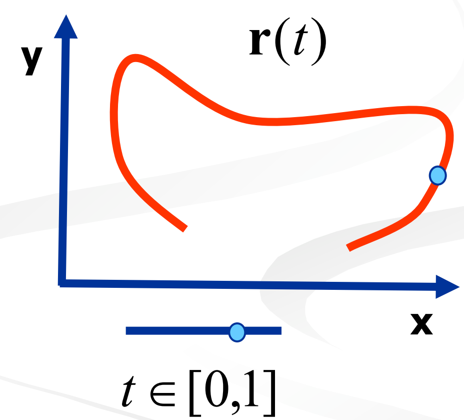
Függvény: $y = f(x),\ R^1 \to R^1; \quad z = f(x,y),\ R^2 \to R^1$

Implicit: $F(x,y) = 0,\ R^2 \to R^1; \quad F(x,y,z) = 0,\ R^3 \to R^1$

Parametrikus: $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)),\ R^1 \to R^2; \quad \mathbf{S}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ R^2 \to R^3$







- egyértelmű hozzárendelés
- *pnt_on_crv* egyszerű
- mintavételezés egyszerű
- CAD: ritkán használják

- (végtelen) félterek
- *pnt_on_crv* egyszerű
- mintavételezés nehéz
- CAD: szabályos felületek

- véges felületdarab
- *pnt_on_crv* nehéz
- mintavételezés egyszerű
- CAD: szabadformájú felületek

Görbe és felület egyenletek$_2$

Példa (2D): parabola

Függvény: $y=ax^2+b$, (elforgatva nem függvény !)

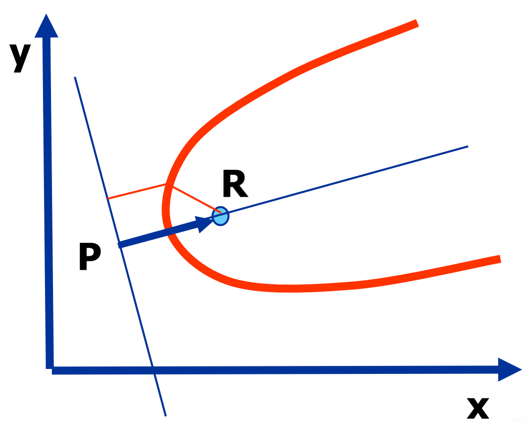
Implicit: $F(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$

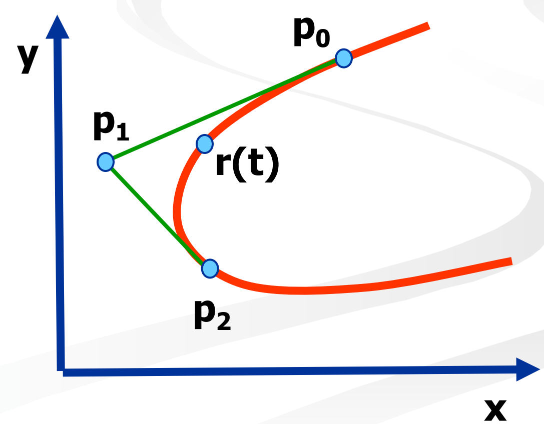
$$B=ac-b^2,\quad B>0\ ellipszis,\ B=0\ parabola,\ B<0\ hiperbola$$

Parametrikus: $\mathbf{r}(t)=\mathbf{p}_0(1-t)^2+\mathbf{p}_1 2(1-t)t+\mathbf{p}_2 t^2$

Ideális reprezentáció

- koordináta rendszer független
- paraméterei geometriailag értelmezhetők





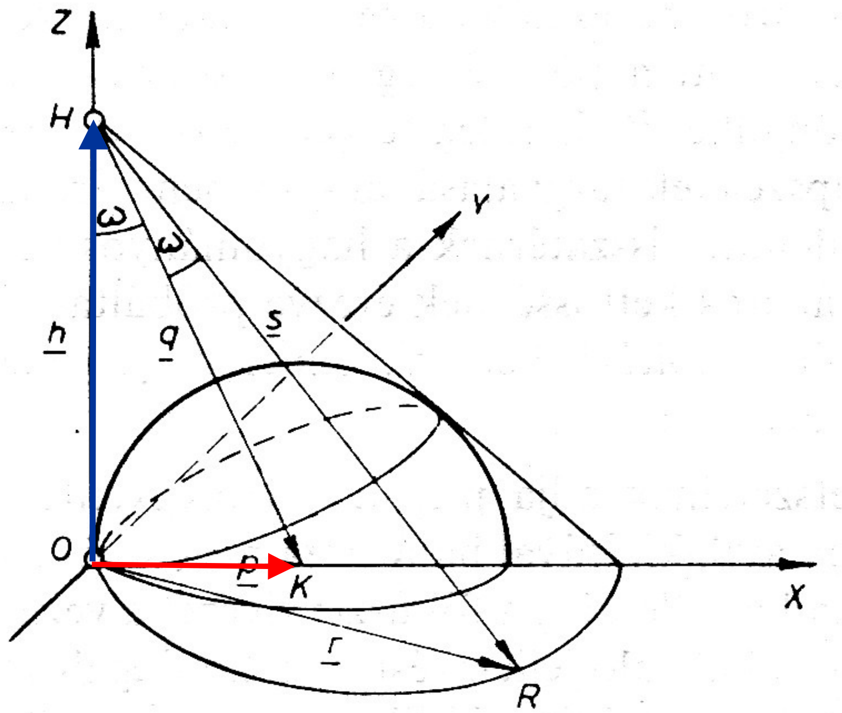
Példa

Általános kúpszelet egyenlet vektoros alakban:

- félgömb a síkon, paraméterek:

$$O, p, h \rightarrow$$

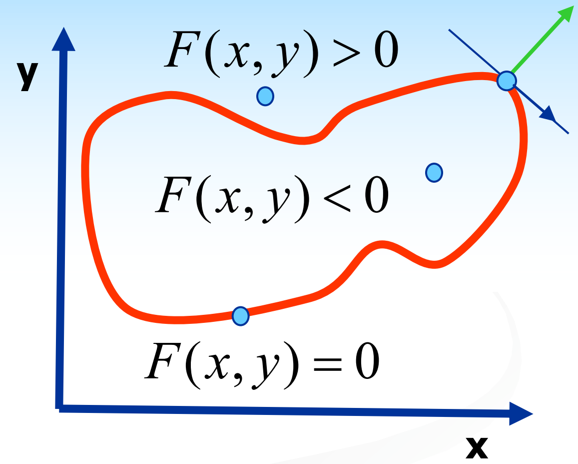
$$\mathbf{r}^2 = (\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r})^2 + 2\mathbf{r}\mathbf{v} + w$$



1. ábra

Implicit görbék$_1$

$$F(x,y)=0, \quad F(x,y): R^2 \to R^1$$



A síkot három részre osztja

$$F(x_0,y_0)<0,\ F(x_0,y_0)=0,\ F(x_0,y_0)>0$$

Szintgörbe sereg (eltolással keletkező görbék)

$$F(x,y)=d \to F(x,y)-d=0 \to G(x,y,d)=0$$

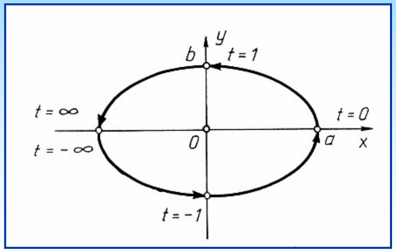
Gradiens vektor - az $F(x,y)$ kétváltozós függvény parciális deriváltjai

$$grad\ F=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y}\right), \quad R^2 \to R^2, \quad tangent\ F=\left(\frac{\partial F}{\partial y},-\frac{\partial F}{\partial x}\right), R^2 \to R^2$$

Implicit görbék$_2$ - példák

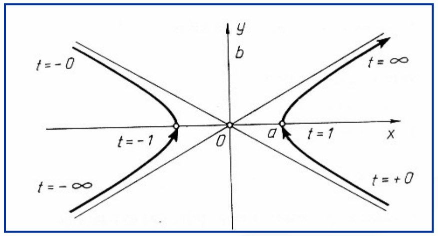
Ellipszis

$$F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$



Hiperbola

$$F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

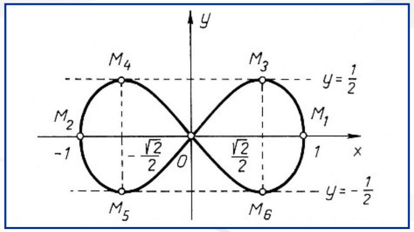


Nem görbe

$$F(x,y)=x^2+y^2+1=0$$

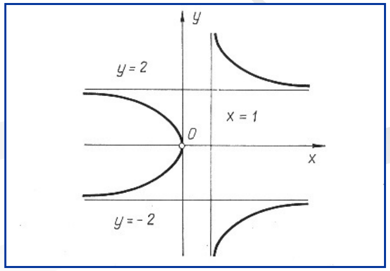
Önmetsző görbe

$$F(x,y)=x^4-x^2+y^2=0$$



Több darabból álló görbe

$$F(x,y)=xy^2-y^2-4x=0$$



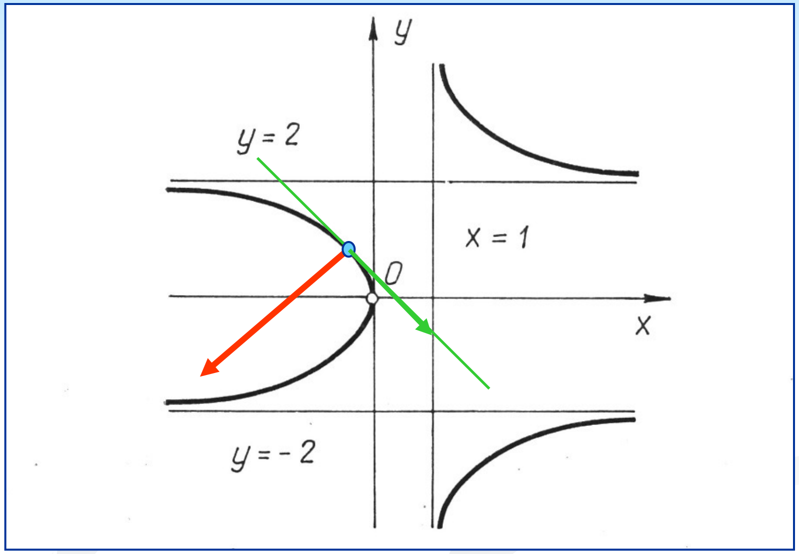
Ujjgyakorlat* - implicit görbék

Pontok kiértékelése :
'+' vagy '-' vagy '0'

$$F(x,y) = xy^2 - y^2 - 4x = 0$$

$$P_1 = (2{,}5),\ P_2 = (-\frac{1}{2},1),\ P_3 = (-\frac{1}{3},1),\ P_4 = (1,\frac{1}{2})$$

$[\ldots]$, $[\ldots]$, $[\ldots]$, $[\ldots]$



Gradiens vektor komponenseinek meghatározása

$$grad\ F(x,y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,)$$

Gradiens kiértékelése a P_3 görbepontban: $(\quad ,\quad)$

Érintővektor a P_3 görbepontban: $(\quad ,\quad)$

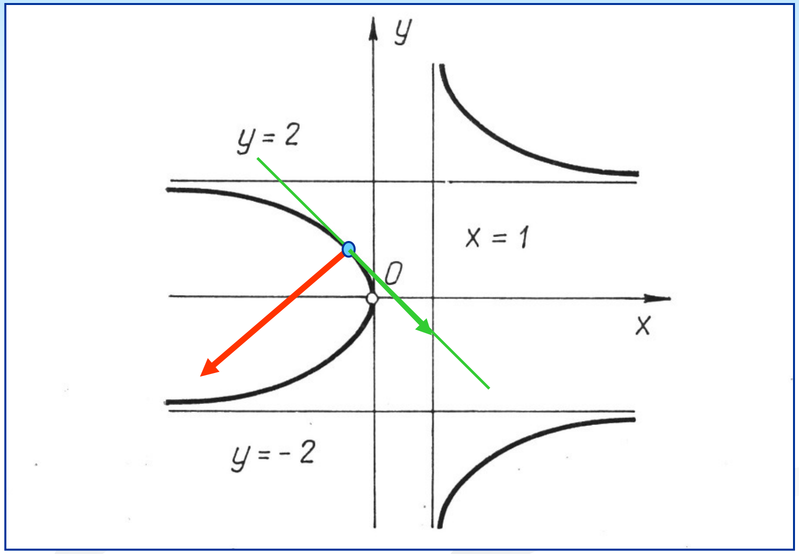
Ujjgyakorlat - implicit görbék

Pontok kiértékelése :
'+' vagy '-' vagy '0'

$$F(x,y) = xy^2 - y^2 - 4x = 0$$

$$P_1 = (2,5),\ P_2 = (-\frac{1}{2},1),\ P_3 = (-\frac{1}{3},1),\ P_4 = (1,\frac{1}{2})$$

$$[17 \Rightarrow +],\quad [0.5 \Rightarrow +],\quad [0],\qquad [-2 \Rightarrow -]$$



Gradiens vektor komponenseinek meghatározása

$$grad\ F(x,y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (\ y^2 - 4,\ 2xy - 2y)$$

Gradiens kiértékelése a P_3 görbepontban: $(-3,-\frac{8}{3})$

Érintővektor a P_3 görbepontban: $(\frac{8}{3},-3)$

Parametrikus görbék$_1$ differenciál-geometriája

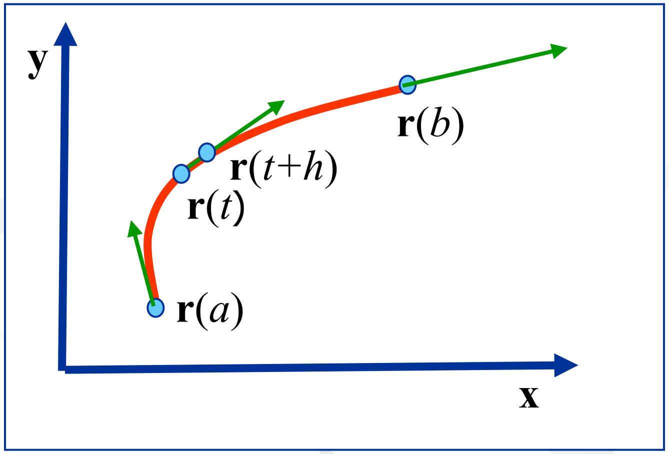
Parametrikus görbe: $t \in [a,b] \to R^n : \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

1. Példa (2D): parabola

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{b}_0(1-t)^2 + \mathbf{b}_1 2t(1-t) + \mathbf{b}_2 t^2, t \in [0,1]$$

2. Példa (3D): csavarvonal

$$\mathbf{r}(t) = (\rho \cos t, \rho \sin t, at), t \in [0, 2n\pi]$$



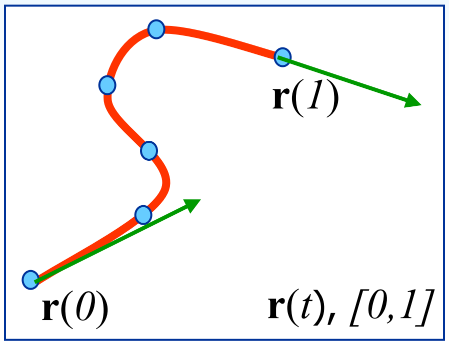
Egyszerű görbe (reguláris):

$$\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$$

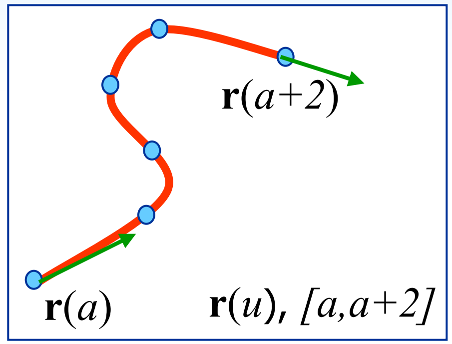
Első derivált (érintő vektor): $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}_t(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$

Parametrikus görbék$_2$ differenciál-geometriája

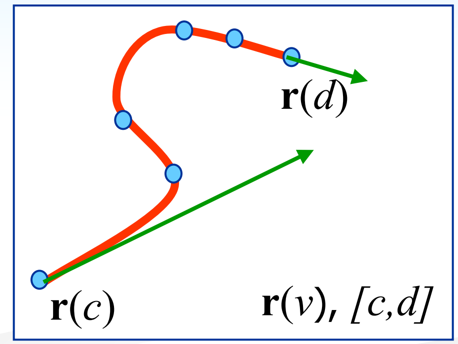
Átparaméterezés



1. Kiinduló görbe



2. Lineáris átparaméterezés



3.Tetszőleges átparaméterezés

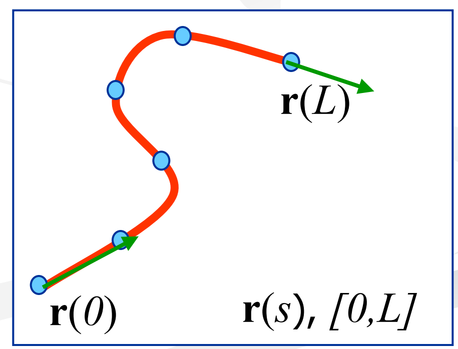
Átparaméterező függvény $u(t)$

- folytonos, szigorúan monoton, differenciálható

Ekvivalens görbe: $\mathbf{r}(t) \to \mathbf{r}(u); \quad [a,b] \to [\alpha,\beta]$

Példa: $\mathbf{r}(t) \to \mathbf{r}(u); \quad [0,1] \to [2,4], \quad u(t) = 2t+2$

A deriváltak megváltoznak: $\dot{\mathbf{r}}_u(u) = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial u} = \dot{\mathbf{r}}_t(t)\dfrac{1}{\dfrac{\partial u}{\partial t}}$



4. Ívhossz szerinti átparaméterezés

Parametrikus görbék$_3$

Az $\mathbf{r}(t)$ görbébe írt poligon:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b;$$

$$s_{ab,n} \cong \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\mathbf{r}(t_{i-1} + \Delta t) - \mathbf{r}(t_{i-1})|}{\Delta t} \Delta t$$

$s_{ab,n}$ korlátos → rektifikálható → az ívhossz létezik

$$s_{ab} = \int_a^b |\dot{r}(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{\dot{r}_x(t)^2 + \dot{r}_y{}^2(t) + \dot{r}_z{}^2(t)}\, dt$$

Az ívhossz a paraméter függvényeként:

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\mathbf{r}}(\tau)|\, d\tau; \quad \dot{s}(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)|; \quad \frac{\partial s}{\partial t} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right|$$

Parametrikus görbék$_4$

Természetes (ívhossz szerinti) paraméterezés: $\mathbf{r}(t(s)) \to \mathbf{r}(s)$

Ívhossz szerinti deriválás: $\mathbf{r}' = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds};$

Tulajdonságok: $(a)\ |\mathbf{r}'| = 1; \quad (b)\ \mathbf{r}' \perp \mathbf{r}''$

$$(a)\ |\mathbf{r}'| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds}\right| = |\dot{\mathbf{r}}|\frac{dt}{ds} = 1; \quad (b)\ \mathbf{r}'(s)^2 = 1 \ \to \ 2\langle \mathbf{r}', \mathbf{r}'' \rangle = 0$$

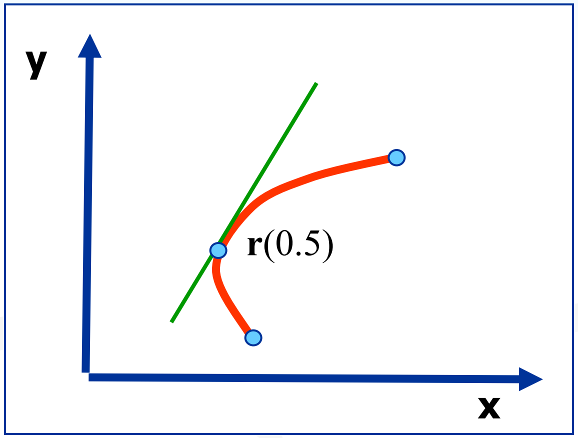
Érintő egységvektor: $\mathbf{e} = \mathbf{r}'(s)$

Ujjgyakorlat* - érintő egyenes

Parametrikus görbe

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{b}_2 t^2 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_0,\ t \in [0,1]$$

$$\mathbf{b}_2 = (12,6) \quad \mathbf{b}_1 = (-8,2), \quad \mathbf{b}_0 = (4,1)$$



Érintővektor egyenlete:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ t \in [0,1]$$

Görbepont és érintővektor a középpontban:

$$\mathbf{r}(0.5) = (\ldots\ldots, \ldots\ldots), \quad \dot{\mathbf{r}}(0.5) = (\ldots\ldots, \ldots\ldots)$$

Érintő egyenes egyenlete:

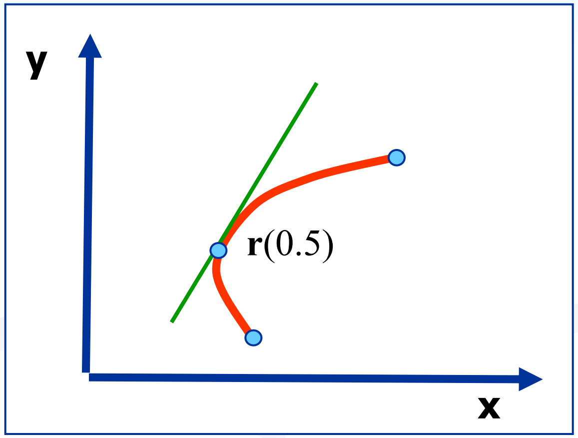
$$\mathbf{l}(w) = \mathbf{r}(t_0) + w\,\dot{\mathbf{r}}(t_0),\ t_0 = 0.5,\ \mathbf{l}(w) = (\ldots, \ldots.) + w\,(\ldots, \ldots.)$$

Ujjgyakorlat - érintő egyenes

Parametrikus görbe

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{b}_2 t^2 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_0,\ t \in [0,1]$$

$$\mathbf{b}_2 = (12,6) \quad \mathbf{b}_1 = (-8,2), \quad \mathbf{b}_0 = (4,1)$$



Érintővektor egyenlete:

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = 2\mathbf{b}_2 t + \mathbf{b}_1,\ t \in [0,1]$$

Görbepont és érintővektor a középpontban:

$$\mathbf{r}(0.5) = (3, 3.5), \quad \dot{\mathbf{r}}(0.5) = (4, 8)$$

Érintő egyenes egyenlete:

$$\mathbf{l}(w) = \mathbf{r}(t_0) + w\,\dot{\mathbf{r}}(t_0),\ t_0 = 0.5,\ \ \mathbf{l}(w) = (3,3.5) + w\,(4, 8)$$

Kitérő:
Pithagoraszi hodográf görbék

Síkgörbék ívhosszának számítása:

$$s = \int_a^b \sqrt{\dot{r}_x(t)^2 + \dot{r}_y{}^2(t)}\, dt = \int_a^b \left|\dot{r}(t)\right| dt$$

Az ívhossz mikor polinomiális?

Kitérő: pithagoraszi számhármasok

Derékszögű háromszög:
mikor egész szám a két befogó és az átfogó?

$$Pl.: \quad A = 3, B = 4, C = 5 \quad A^2 + B^2 = C^2$$

$$u, v > 0, u > v$$

$$A = u^2 - v^2, B = 2uv, C = u^2 + v^2,$$

$$A^2 + B^2 = (u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2 = C^2$$

$$Pl.: \quad u = 2, v = 1 \to A = 3, B = 4, C = 5$$

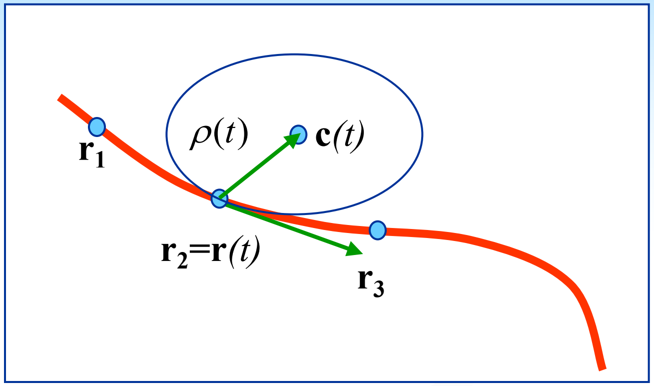
$$Pl.: \quad u = 3, v = 2 \to A = 5, B = 12, C = 13$$

$$\ldots.$$

Parametrikus görbék$_5$

Simulókör:

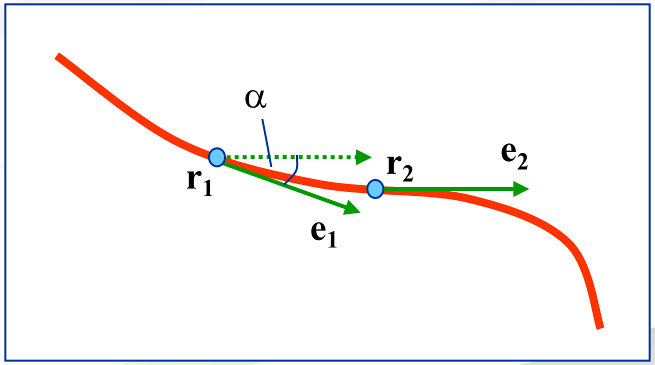
$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t-\Delta t), \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t), \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}(t+\Delta t)$$
$$\Delta t \to 0, [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3]\text{: kör}$$



Sugár és görbület:

$$\rho(t), \quad \kappa(t) = \frac{1}{\rho(t)} = \frac{\left|\dot{\mathbf{r}}(t)\times\ddot{\mathbf{r}}(t)\right|}{\left|\dot{\mathbf{r}}(t)\right|^3}$$

Alternatív származtatás:



$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{r}'(s), \mathbf{e}_2 = \mathbf{r}'(s+\Delta s), \quad \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \kappa$$

$$\kappa(s) = \left|\mathbf{r}''(s)\right|, \qquad \mathbf{r}'(s) \perp \mathbf{r}''(s)$$

Középponti vektor és evolúta:

$$\mathbf{c}(t) = \frac{1}{\kappa(t)}\mathbf{n}(t), \quad \kappa(t) \neq 0, \quad \to \mathbf{r}(t) + \mathbf{c}(t)$$

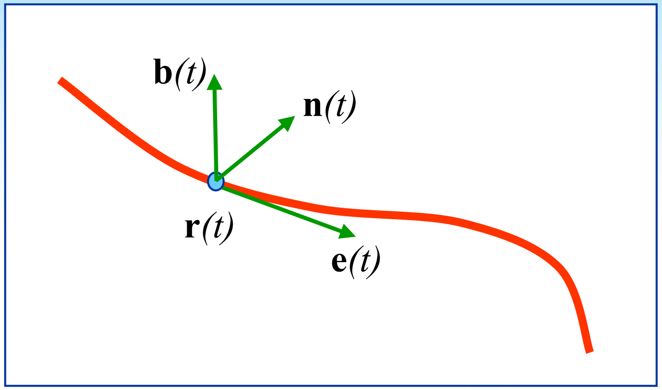
Parametrikus görbék$_6$

Simulósík és binormális:

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(s),\, \mathbf{b} = \mathbf{e} \times \mathbf{n}$$

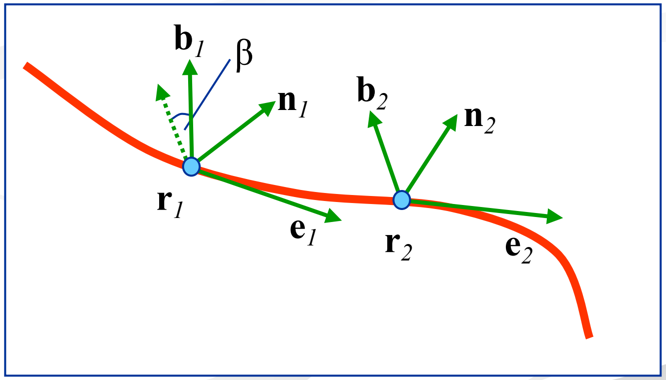
Kísérő triéder (Frenet frame):

$$[\mathbf{e}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)]$$



Torzió
(a Frenet-frame elfordulásának mértéke):

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}'(s), \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}'(s + \Delta s), \quad \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \beta}{\Delta s} = \tau$$

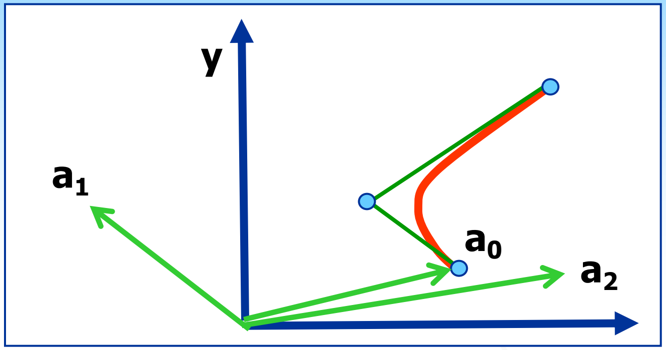


$$\tau(s) = \frac{1}{\kappa^2} \det(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}'''), \qquad \tau(t) = \frac{\det(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2}$$

Vegyes szorzat: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$

?

Ujjgyakorlat* - parametrikus görbék



Polinomiális bázis

$$[\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0][t^2, t, 1] \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_0,\ t \in [0,1]$$

$$\mathbf{a}_2 = (6,1) \quad \mathbf{a}_1 = (-4,4), \quad \mathbf{a}_0 = (4,1)$$

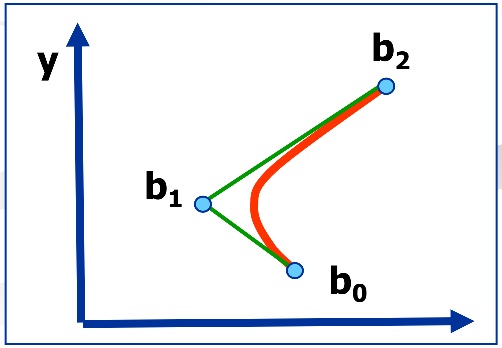
Kezdőpont: (__,__), végpont: (__,__), felezőpont: (__,__)

Bernstein bázis

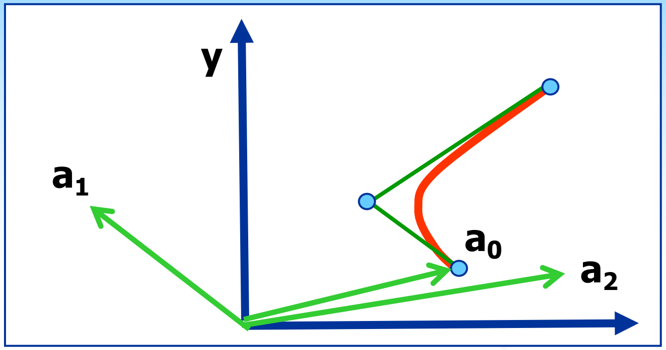
$$[\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2][(1-t)^2, 2t(1-t), t^2] \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{b}_0(1-t)^2 + \mathbf{b}_1 2t(1-t) + \mathbf{b}_2 t^2,\ t \in [0,1]$$

$$\mathbf{b}_0 = (4,1) \quad \mathbf{b}_1 = (2,3), \quad \mathbf{b}_2 = (6,6)$$

Kezdőpont: (__,__), végpont: (__,__), felezőpont: (__,__)



Ujjgyakorlat - parametrikus görbék



Polinomiális bázis

$$[\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0][t^2, t, 1] \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_0,\ t \in [0,1]$$

$$\mathbf{a}_2 = (6,1) \quad \mathbf{a}_1 = (-4,4), \quad \mathbf{a}_0 = (4,1)$$

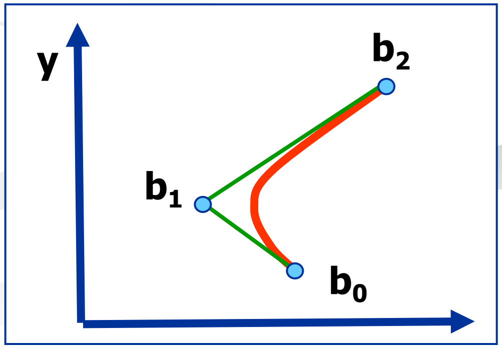
Kezdőpont: (4,1), végpont: (6, 6), felezőpont: (3.5, 3.25)

Bernstein bázis

$$[\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2][(1-t)^2, 2t(1-t), t^2] \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{b}_0(1-t)^2 + \mathbf{b}_1 2t(1-t) + \mathbf{b}_2 t^2,\ t \in [0,1]$$

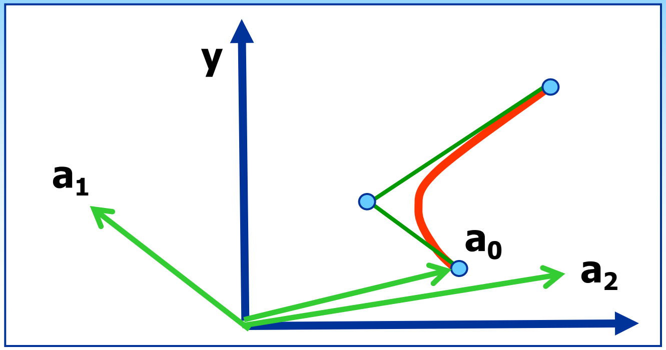
$$\mathbf{b}_0 = (4,1) \quad \mathbf{b}_1 = (2,3), \quad \mathbf{b}_2 = (6,6)$$

Kezdőpont: (4, 1), végpont: (6, 6), felezőpont: (3.5, 3.25)



Affin invariancia - példa

$$\mathbf{r}^* = \Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{r} + (0,2)$$



Polinomiális bázis, lineáris kombináció

$$[\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0][t^2, t, 1] \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_0, \ t \in [0,1]$$

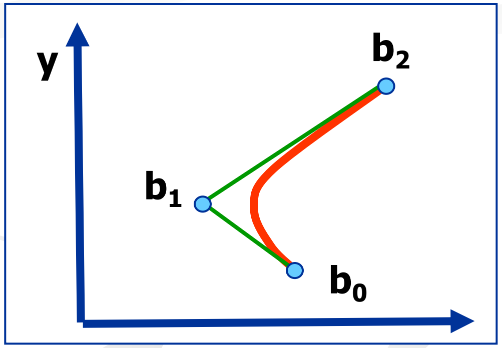
$$t^2 + t + 1 \neq 1, t \in (0,1]$$

$$\mathbf{a}_2 = (6,1), \mathbf{a}_1 = (-4,4), \mathbf{a}_0 = (4,1)$$

Kezdőpont: (4,1), végpont: (6, 6), felezőpont: (3.5, 3.25)

$$\mathbf{a}_2^* = (6,3), \mathbf{a}_1^* = (-4,6), \mathbf{a}_0^* = (4,3)$$

Kezdőpont: (4,3), végpont: (6, 12), felezőpont: (3.5, 6.75)



Bernstein bázis, konvex kombináció

$$[\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2][(1-t)^2, 2t(1-t), t^2] \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{b}_0(1-t)^2 + \mathbf{b}_1 2t(1-t) + \mathbf{b}_2 t^2$$

$$(1-t)^2 + 2t(1-t) + t^2 = 1, \ t \in [0,1]$$

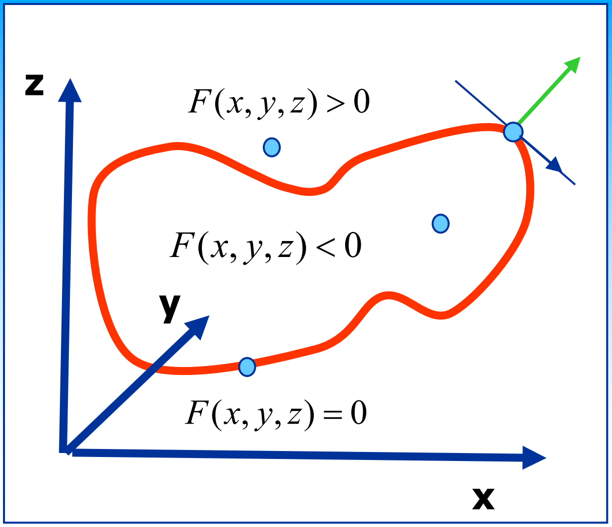
$$\mathbf{b}_0 = (4,1), \mathbf{b}_1 = (2,3), \mathbf{b}_2 = (6,6)$$

Kezdőpont: (4, 1), végpont: (6, 6), felezőpont: (3.5, 3.25)

$$\mathbf{b}_0^* = (4,3), \mathbf{b}_1^* = (2,5), \mathbf{b}_2^* = (6,8)$$

Kezdőpont: (4, 3), végpont: (6, 8), felezőpont: (3.5, 5.25)

Implicit felületek$_1$

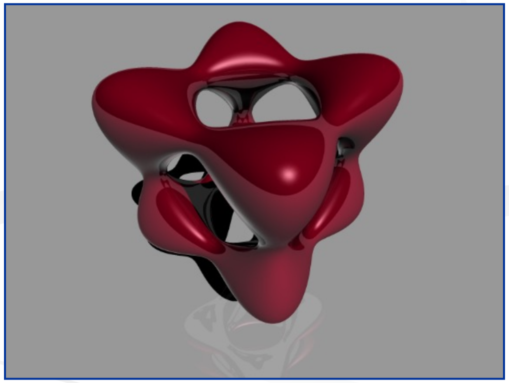


$$F(x,y,z)=0,\quad F(x,y,z): R^3 \rightarrow R^1$$

A teret három részre osztja

$$F(x_0,y_0,z_0)<0,\ F(x_0,y_0,z_0)=0,\ F(x_0,y_0,z_0)>0$$

Példák: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0,\quad vagy$



(from Otto Seiskari)

Szintfelületek

$$F(x,y,z)=d \rightarrow F(x,y,z)-d=0$$

Gradiens vektor (!), merőleges az érintősíkra

$$grad\ F(x,y,z)=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right),\ R^3 \rightarrow R^3$$

Érintősík egyenlete: $\mathbf{P}_0=(x_0,y_0,z_0),\ F(x_0,y_0,z_0)=0,\ \mathbf{N}_0=grad\ F(x_0,y_0,z_0)$

$$(\mathbf{r}-\mathbf{P}_0,\mathbf{N}_0)=((x,y,z)-\mathbf{P}_0,\mathbf{N}_0)=0$$

Parametrikus felületek$_1$ differenciál-geometriája

Parametrikus felület: $\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)); \quad E^2 : [a,b] \to E^3$

Konstans paramétervonalak: $\mathbf{r}(u_0,v), \mathbf{r}(u,v_0)$

Deriváltak: $\mathbf{r}_u(u,v) = (\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}) = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}); \quad \mathbf{r}_v(u,v) = (\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v})$

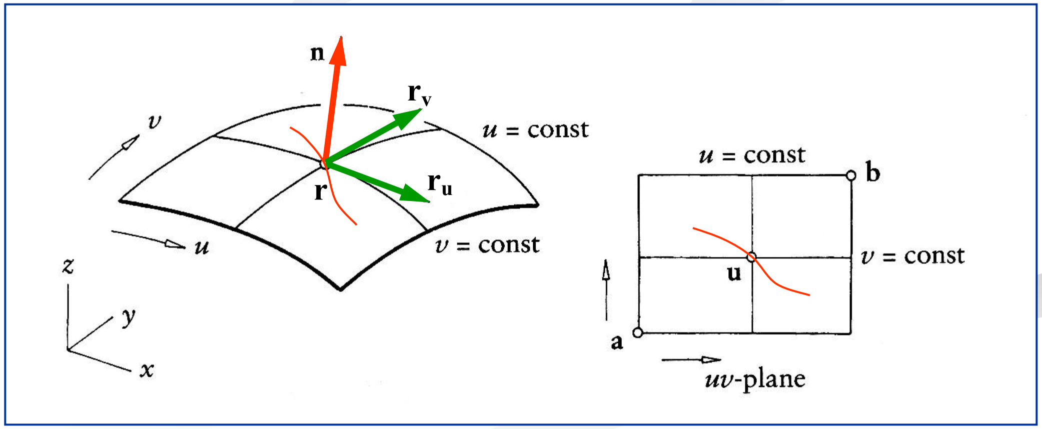
?

Normálvektor:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}$$

Elsőrendű főmennyiségek:

$$E = \mathbf{r}_u^2, F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle, G = \mathbf{r}_v^2$$



Ujjgyakorlat*-parametrikus felületek

$v=1$ konstans paraméter vonal felírása:

$$\mathbf{r}(u,v)=(1,1,0)+(2,4,1)u^2+(5,5,2)uv+(3,3,3)v^2,\ (u,v)\in[0,2]$$

$$\mathbf{r}(u,1)=\mathbf{c}(u)=(\ldots,\ldots,\ldots)+(\ldots,\ldots,\ldots)u+(\ldots,\ldots,\ldots)u^2$$

Derivált függvények és értékük az $(1,1)$ pontban:

$$\dot{\mathbf{r}}_u(u,v)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \dot{\mathbf{r}}_v(u,v)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dot{\mathbf{r}}_u(u=1,v=1)=(\ldots,\ldots,\ldots) \qquad \dot{\mathbf{r}}_v(u=1,v=1)=(\ldots,\ldots,\ldots)$$

3D-s pont egy felületi görbén:

$$(u(t),v(t))=(0.25+t,4t) \qquad \mathbf{r}(u,v)=\mathbf{r}(u(t),v(t))_{|t=0.25}=(\ldots,\ldots,\ldots)$$

Ujjgyakorlat-parametrikus felületek

$v=1$ konstans paraméter vonal felírása:

$$\mathbf{r}(u,v)=(1,1,0)+(2,4,1)u^2+(5,5,2)uv+(3,3,3)v^2,\ (u,v)\in[0,2]$$

$$\mathbf{r}(u,1)=\mathbf{c}(u)=(4,4,3)+(5,5,2)u+(2,4,1)u^2$$

Derivált függvények és értékük az $(1,1)$ pontban:

$$\dot{\mathbf{r}}_u(u,v)=(4,8,2)u+(5,5,2)v \qquad \dot{\mathbf{r}}_v(u,v)=(5,5,2)u+(6,6,6)v$$

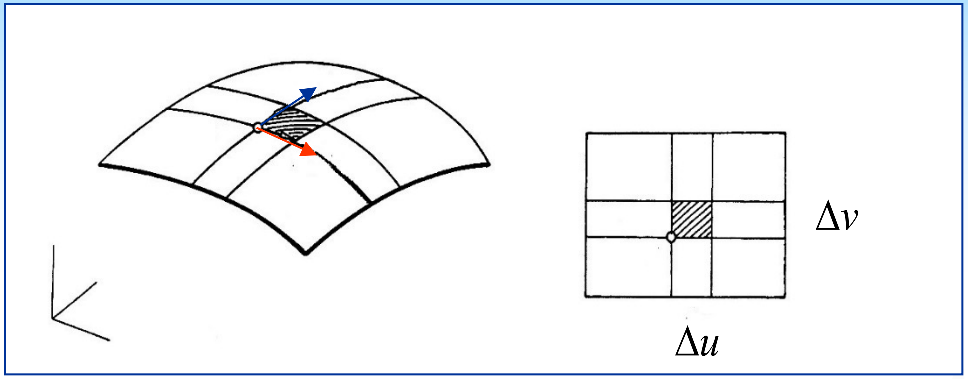
$$\dot{\mathbf{r}}_u(u=1,v=1)=(9,13,4) \qquad \dot{\mathbf{r}}_v(u=1,v=1)=(11,11,8)$$

3D-s pont egy felületi görbén:

$$(u(t),v(t))=(0.25+t,4t) \qquad \mathbf{r}(u,v)=\mathbf{r}(u(t),v(t))_{|t=0.25}=(7,7.5,4.25)$$

Parametrikus felületek$_2$

Elemi felületdarab:



$$\Delta A = |(\mathbf{r}(u+\Delta u, v) - \mathbf{r}(u,v)) \times (\mathbf{r}(u, v+\Delta v) - \mathbf{r}(u,v))| =$$

$$\left| \frac{\mathbf{r}(u+\Delta u, v) - \mathbf{r}(u,v)}{\Delta u} \times \frac{\mathbf{r}(u, v+\Delta v) - \mathbf{r}(u,v)}{\Delta v} \right| \Delta u \, \Delta v$$

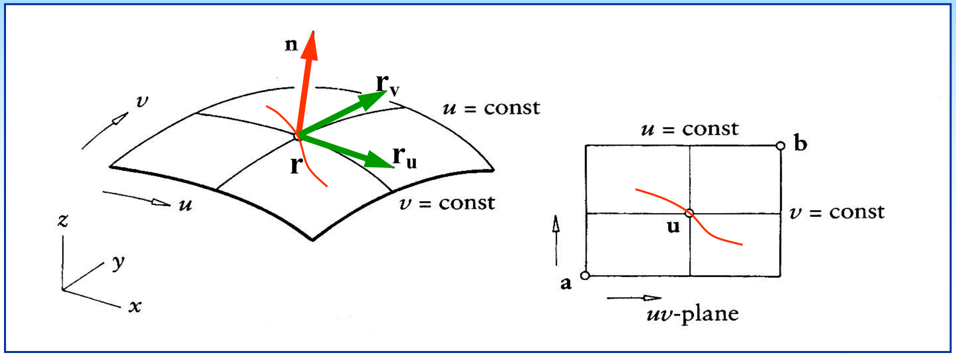
Felszín:

$$A = \iint \left| \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \right| du\, dv \; = \iint \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

Parametrikus felületek$_3$

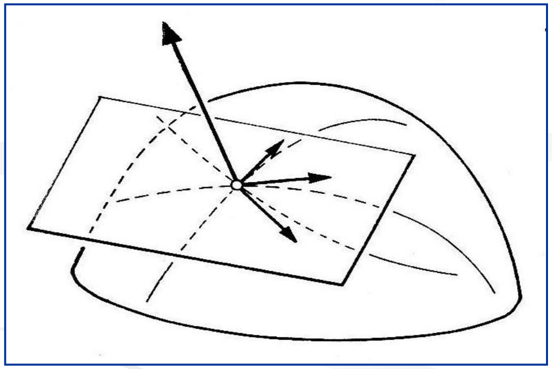
Felületi görbék:

$$u = u(t), v = v(t), t \in [t_1, t_2],$$
$$\mathbf{r}(u(t), v(t)) = \mathbf{r}(t)$$



Felületi görbesereg, normálmetszet :

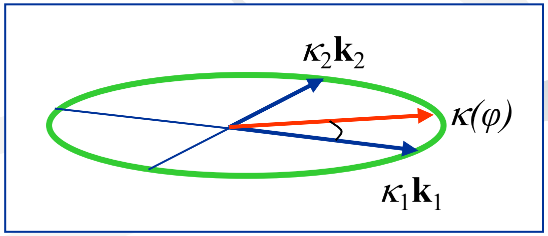
$$n_c(\varphi) \| n_s \Rightarrow \kappa(\varphi)$$



Meusnier-tétel: $\kappa(\varphi) = \kappa_c \cos \measuredangle(\mathbf{n}_c(\varphi), \mathbf{n}_s)$

Főgörbületek: $\kappa_1 = \kappa_{\min}, \kappa_2 = \kappa_{\max}$

Főgörbületi irányok: $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \quad \mathbf{k}_1 \perp \mathbf{k}_2$



Euler-egyenlet: $\kappa(\varphi) = \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi$

Parametrikus felületek$_{3+}$

Elsőrendű főmennyiségek: $E = \mathbf{r}_u^2,\ F = \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v,\ G = \mathbf{r}_v^2$

Másodrendű főmennyiségek: $L = \mathbf{r}_{uu}\mathbf{n},\ M = \mathbf{r}_{uv}\mathbf{n},\ N = \mathbf{r}_{vv}\mathbf{n}$

Görbület meghatározása egy adott pontban:

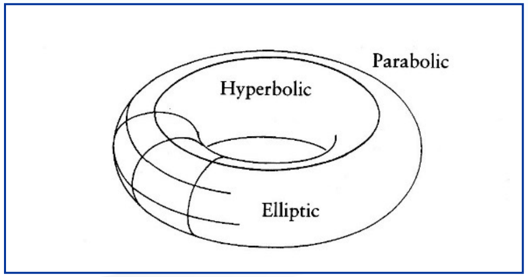
$$\det \begin{bmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{bmatrix} = 0, \qquad \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \Rightarrow \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\ \kappa_1, \kappa_2$$

$$\lambda = dv/du \qquad \kappa(\lambda) = \frac{L + 2M\lambda + N\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2}$$

Parametrikus felületek$_4$

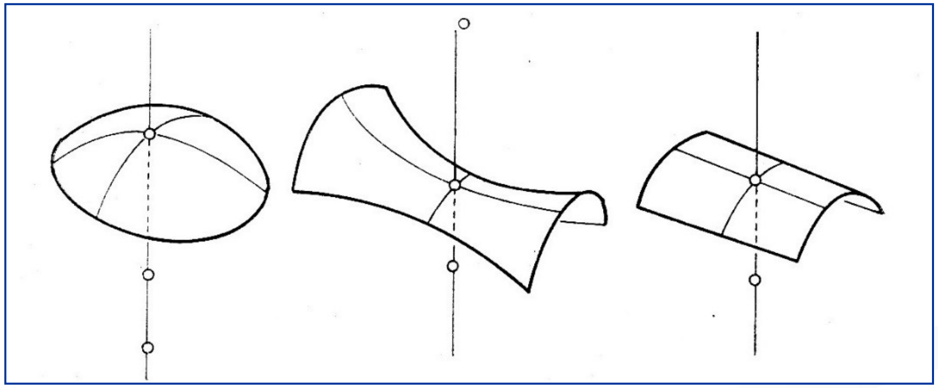
Gauss-(szorzat-) és átlaggörbületek: $G = \kappa_1 \kappa_2 ;\ M = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$

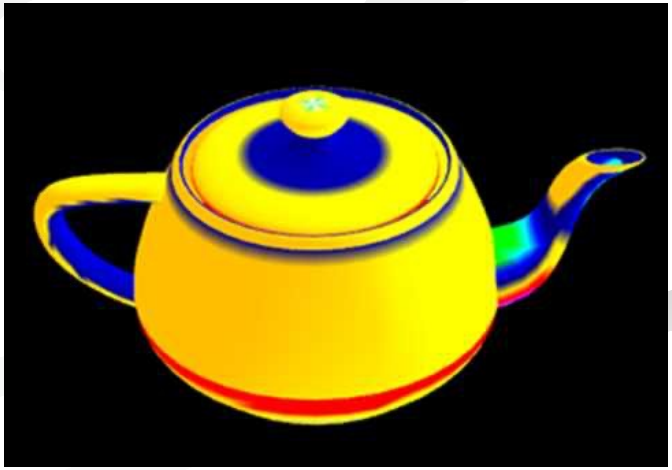
$$G = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad M = \frac{NE - 2MF + LG}{2(EG - F^2)}$$



Felület pontok környezetének osztályozása:

- $G>0$ → elliptikus,
- $G<0$ → hiperbolikus,
- $G=0,\ (M\neq 0)$ → parabolikus



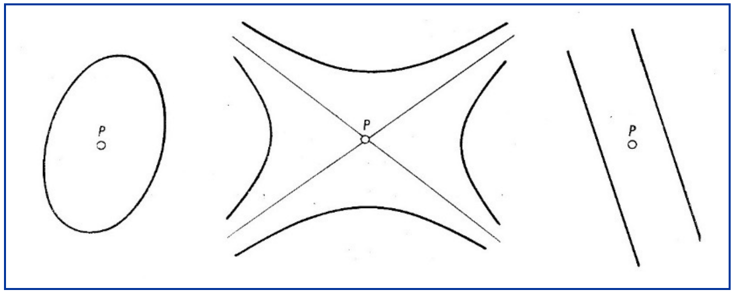


Parametrikus felületek$_{4+}$

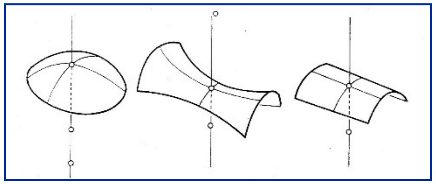
Az Euler egyenlet más formában: $\kappa(\varphi) = \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi$

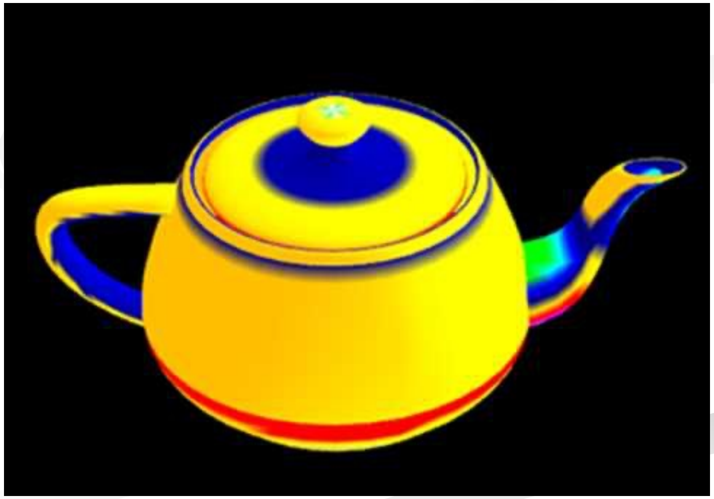
Polárkoordináták: $r = \sqrt{\rho}, x = \sqrt{\rho}\cos\varphi, y = \sqrt{\rho}\sin\varphi$

Dupin-indikátor (lokális kúpszelet): $\frac{x^2}{\rho_1} + \frac{y^2}{\rho_2} = 1$

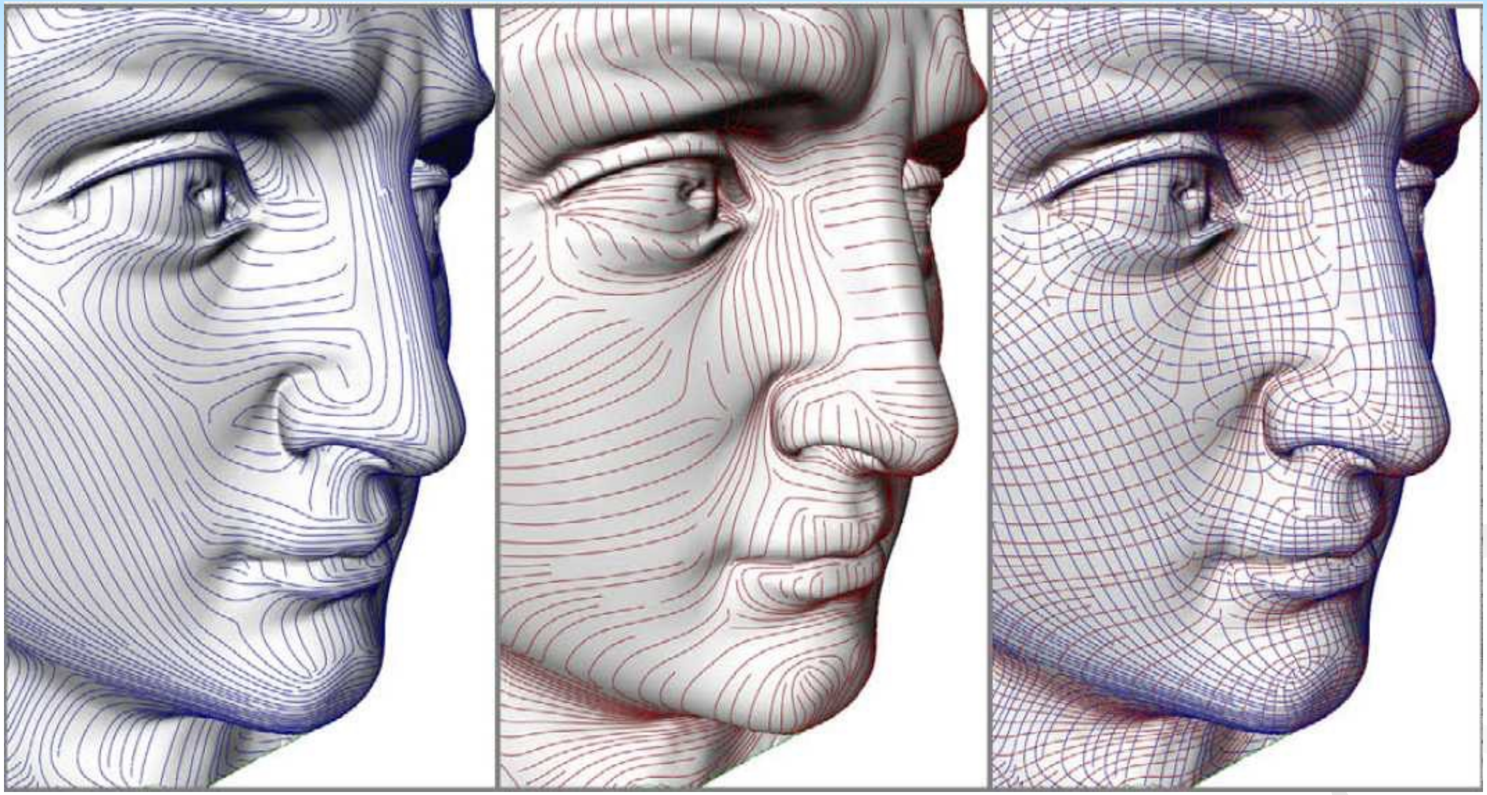


G>0 *G<0* *G=0 (M≠0)*





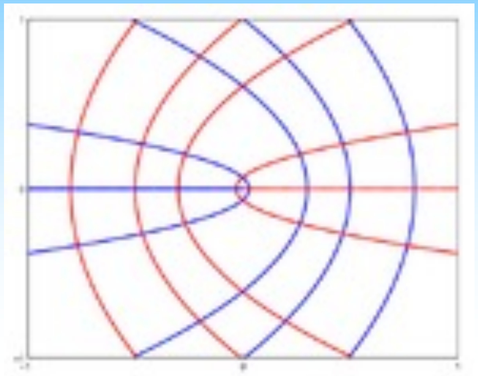
Parametrikus felületek$_5$



Görbületi vonalak és umbilikus pontok

Alliez et al.: Anisotropic Polygonal Remeshing, SIGGRAPH'2003

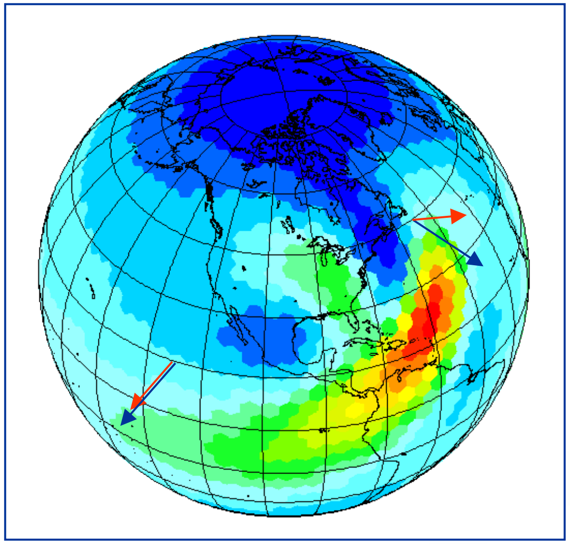
Parametrikus felületek$_6$

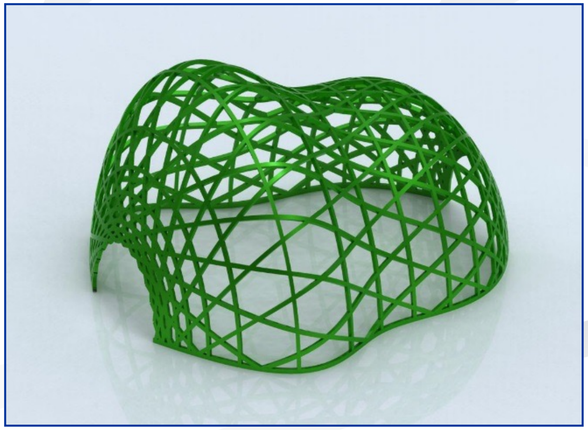


Umbilikus pontok: $\kappa_1 = \kappa_2 = c, \kappa(f) = c;$

Geodetikus vonalak:

- a felületi normális és a görbe főnormálisa egy egyenesbe esik, pl. főkörök a gömbön (mellékkörökre nem igaz!)
- két felületi pont között a legrövidebb út mindig geodetikus vonal, fordítva nem igaz!





(from Lorenz Lachauer)

Weingarten-leképzés$_1$

- $\mathcal{G}$: Gauss-leképzés (normális egységvektor)
  - "Gauss-gömbre" képez
- $\mathcal{S}(\mathbf{w}) = -\nabla_{\mathbf{w}}\mathcal{G}$: alak (shape) operátor / Weingarten-leképzés
  - Az egységnormális (negált) deriváltja **w** irány szerint
  - $\mathbf{n}' \perp \mathbf{n}$ (mivel egységvektor) → $\mathcal{S}$ a normálsíkban van
  - 2×2-es mátrix, szimmetrikus lineáris leképzés
- $\kappa(\mathbf{w}) = \langle \mathcal{S}(\mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle$
- $G = |\mathcal{S}|,\ M = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathcal{S})$
- Főgörbületek/irányok az $\mathcal{S}$ sajátértékei/vektorai

Weingarten-leképzés$_2$

- Milyen bázisban írjuk fel?
  - Ha a főirányok bázisában:
$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$$
  - Tulajdonságok rögtön látszanak
- Általánosan:
  - Az első parciális deriváltak bázisában írjuk fel
  - $\mathcal{S} = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{II}$, ahol
$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$
    az első és második fundamentális formák
  - Függ a paraméterezéstől!

Weingarten-leképzés$_3$

- Alternatíva: 3D bázis
  - A főirányok mellé felvesszük a normálvektort:

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  - “Beágyazott” Weingarten-leképzés
  - Ilyenkor $G = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(\mathcal{W})^2 - \mathrm{tr}(\mathcal{W}^2)\right)$
  - Felírható az (x, y, z) bázisban is:
    - $\mathcal{W} = (\mathbf{J}^+)^T \cdot \mathbf{II} \cdot \mathbf{J}^+$, ahol $\mathbf{J}^+$ a Jacobi-mátrix pszeudoinverze:

$$\mathbf{J}^+ = (\mathbf{J}^T\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}^T = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{J}^T = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{I}^{-1})^T, \qquad \mathbf{J} = (\mathbf{r}_u \quad \mathbf{r}_v) \text{ [3x2-es mátrix]}$$

- Paraméterezés-független, de koordinátarendszer-függő

Weingarten-leképzés$_4$ – Implicit

- Kell: gradiens (∇f) és Hesse-mátrix $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix}$
- Legyen $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ merőleges vektorok az érintősíkban, és

$$f_n = \|\nabla f\|, \qquad f_{uu} = \mathbf{u}^T\mathbf{H}\mathbf{u}, \qquad f_{uv} = \mathbf{u}^T\mathbf{H}\mathbf{v}, \qquad f_{vv} = \mathbf{v}^T\mathbf{H}\mathbf{v}$$

- Ekkor a Weingarten-leképzés az $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ bázisban:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{f_n}\begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix}$$

- Beágyazott: $\mathcal{W} = \frac{1}{f_n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{T}$, ahol $\mathbf{T} = \mathbf{I}_3 - \mathbf{n}\mathbf{n}^T$, $\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$

$$G = \frac{\nabla f^T \cdot \mathrm{adj}(\mathbf{H}) \cdot \nabla f}{\|\nabla f\|^4}, \qquad M = \frac{\|\nabla f\|^2 \cdot \mathrm{tr}(\mathbf{H}) - \nabla f^T \cdot \mathbf{H} \cdot \nabla f}{2\|\nabla f\|^3}$$