

3D Számítógépes Geometria II.

Összefoglaló, 2020. dec. 10.

<http://cg.iit.bme.hu/portal/3dgeo2>

<https://www.vik.bme.hu/kepzes/targyak/VIIIAV16>

Dr. Várady Tamás, Dr. Salvi Péter, Vaitkus Márton
BME, Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Irányítástechnika és Informatika Tanszék



Tervezési paradigmák

N-oldalú parametrikus felületek
(GB, S-patch)

Kényszerek
(felületcsoportok, deformáció,
labelled fitting, Generative Design)

Komplex felületek poliéderek alapján
(GB patch-ek, I-patch-ek, deformáció)

Algoritmusok
(ponthalmazok (ICP), felületmetszés,
lekerekítések, folytonos kapcsolódás,
felületapproximáció)

Görbék
(racionális, proximity, esztétikus)

Implicit felületek
(Dupin cyclides, I-patch-ek)

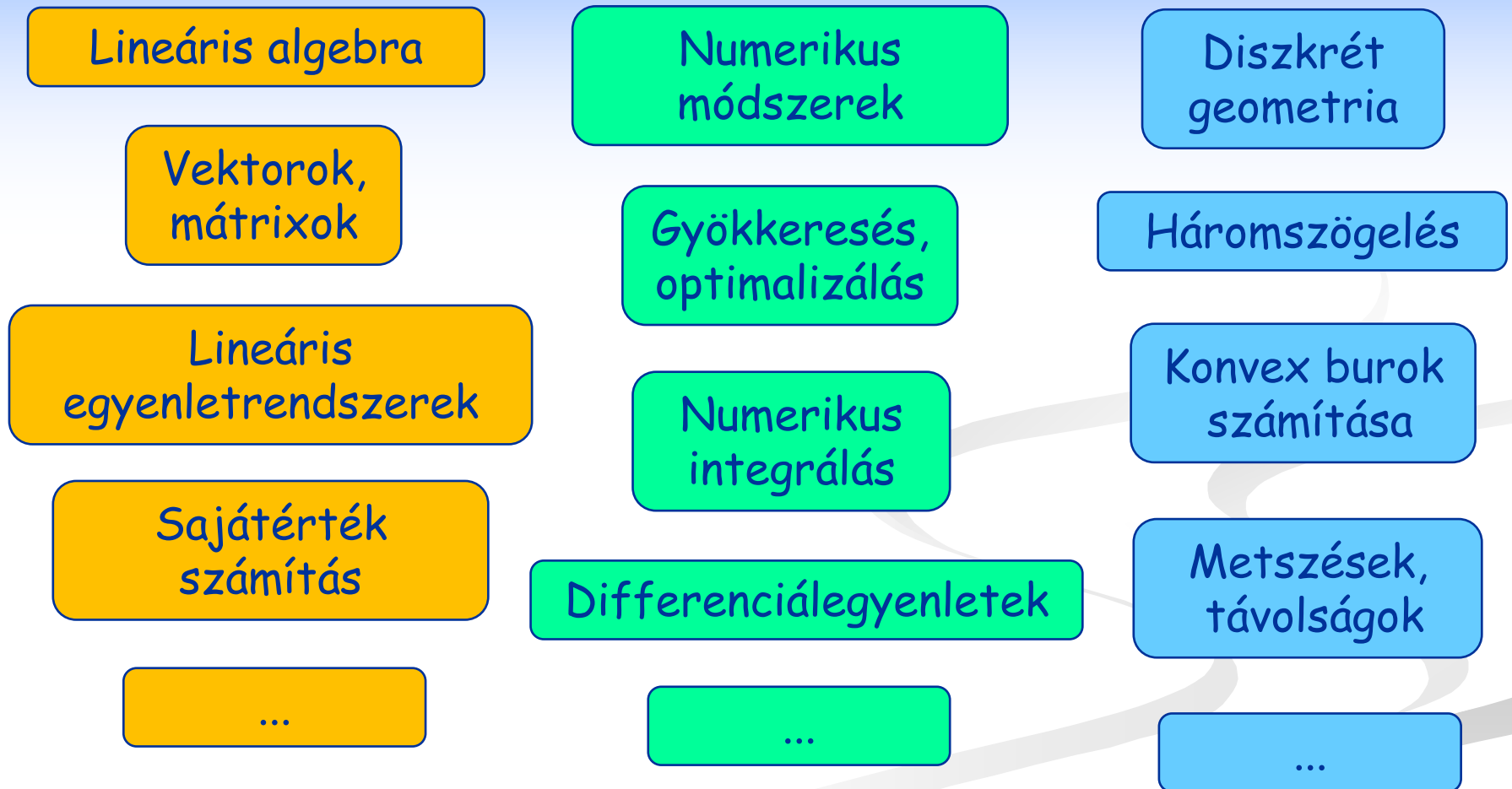
Baricentrikus koordináták
(GB patch-ek, S-patch-ek,
paraméterezés, deformáció)

Struktúrák építése
(háromszöghálók, paraméterezés,
quadmesh, Generative Design)

3D printing

3D sketching

Hasznos gyakorlati algoritmusok

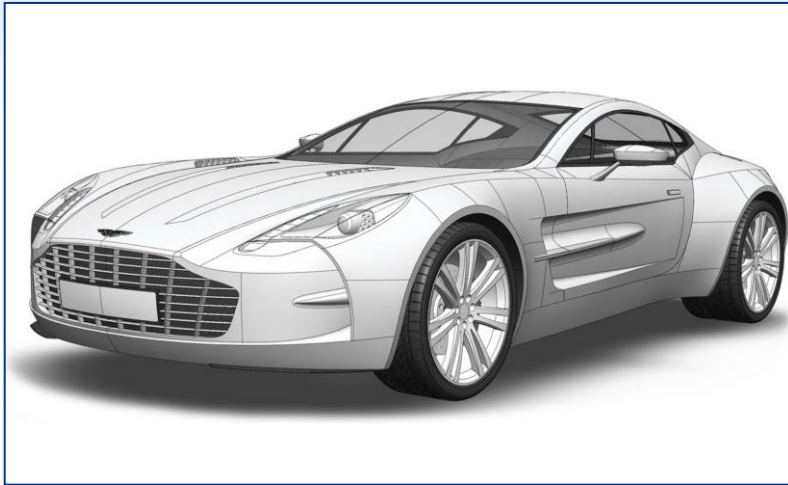


3D geometriai modellezés

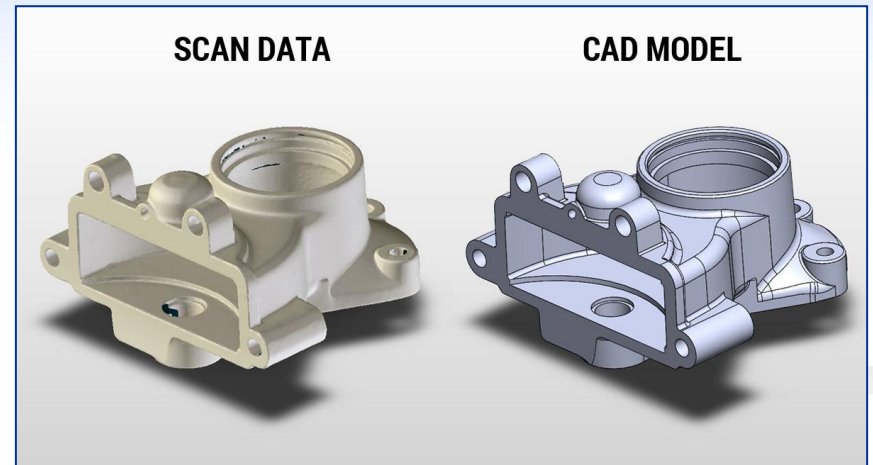
- alapkérdések

- tervezünk vagy rekonstruálunk ?
- „organikus” ? - „művészi” ? - „mérnöki” ?
- milyen célból építjük a digitális modellt ?
- „szabályos” vagy „szabadformájú” geometria?
- diszkrét vagy folytonos reprezentáció ?
- esztétikus ? - sima? - változtatható ?
- a számítások hatékonyak ?
- ...

Modellezési paradigmák 1



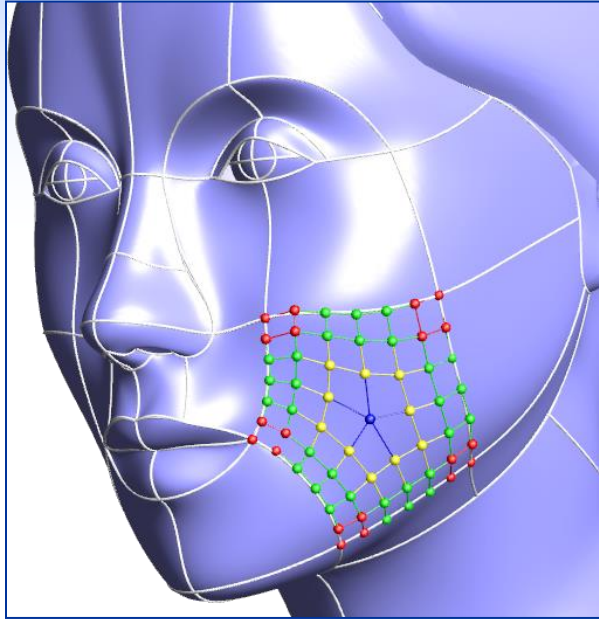
1. felületmodellezés



2. tömör testek modellezése

- áthatások, halmazműveletek, lekerekítések

Modellezési paradigmák 2



3. görbeháló alapú tervezés,
ribbonok (peremfelületek)



4. kontrollpoliéder alapú tervezés



5. Generative Design, optimalizálás,
AI módszerek

Görbék 1

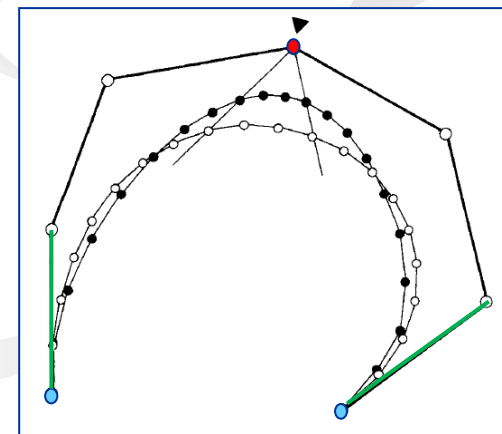
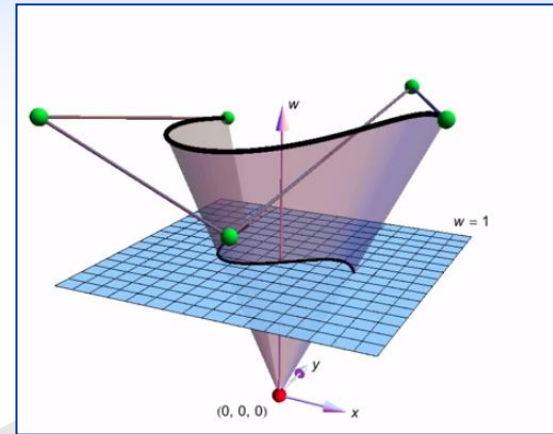
Racionális kiterjesztés

- homogén koordináták
- projektív vetítés
- racionális súlyfüggvények
- kúpszeletek, forgásfelületek

$$\{\mathbf{b}_i\} \Rightarrow \{\mathbf{b}_i, w_i\}$$

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i \bar{B}_i^n(t)$$

$$\bar{B}_i^n(t) = \frac{w_i B_i^n(t)}{w_0 B_0^n(t) + w_1 B_1^n(t) + \dots + w_n B_n^n(t)}$$

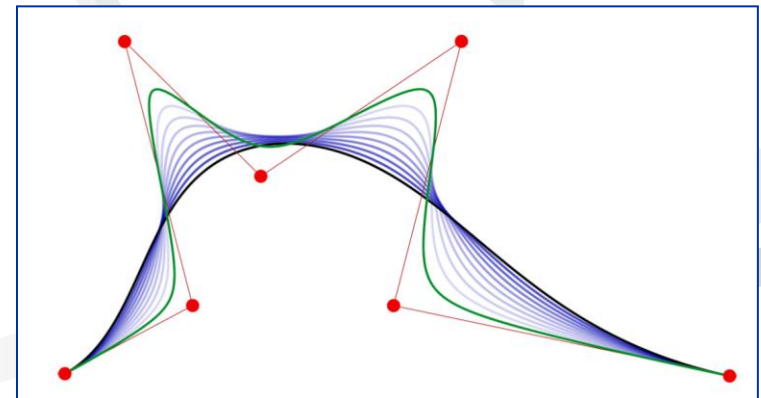
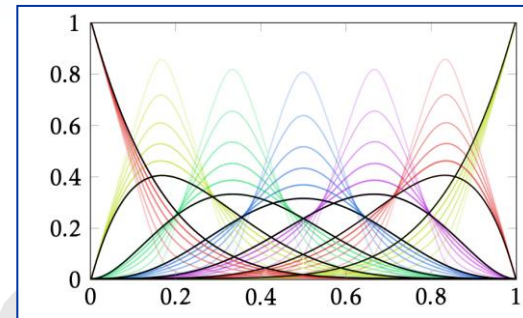
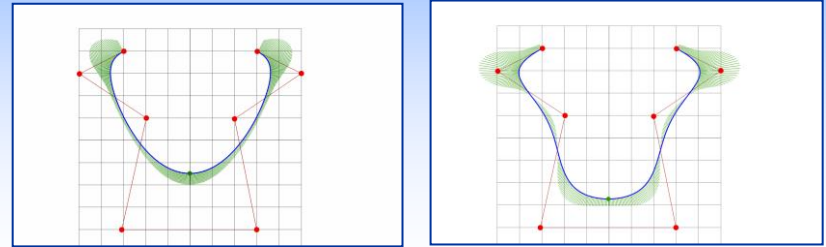


Görbék 2 -Proximity görbék

- a kontroll pontok gyakran „gyengén” hatnak a görbe alakjára
- a proximity (teltségi) paraméter szabályozza, hogy a görbe milyen közel menjen a kontrollpoligonhoz

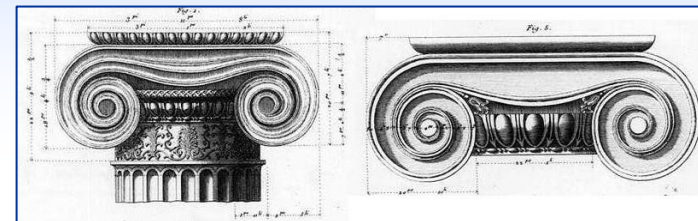
$$r_{\gamma}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i M_i^{n,\gamma}(t).$$

- határesetben - Bézier és B-spline görbék
- tenzorszorzat felületek – hasonlóképpen

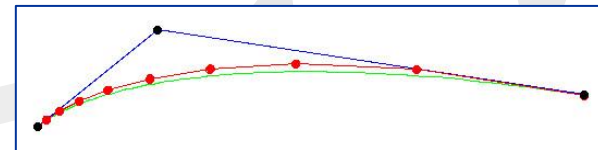
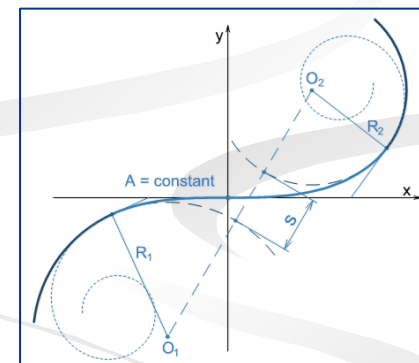


Görbék 3

Esztétikus görbék



- esztétikus görbereprezentáció -
monoton görbületi szakaszok
- log-esztétikus görbék
 - explicit monoton görbület
 - Euler spirál általánosítása (lineáris görbület)
- diszkrét interpoláció - log-esztétikus
spline-t közelít

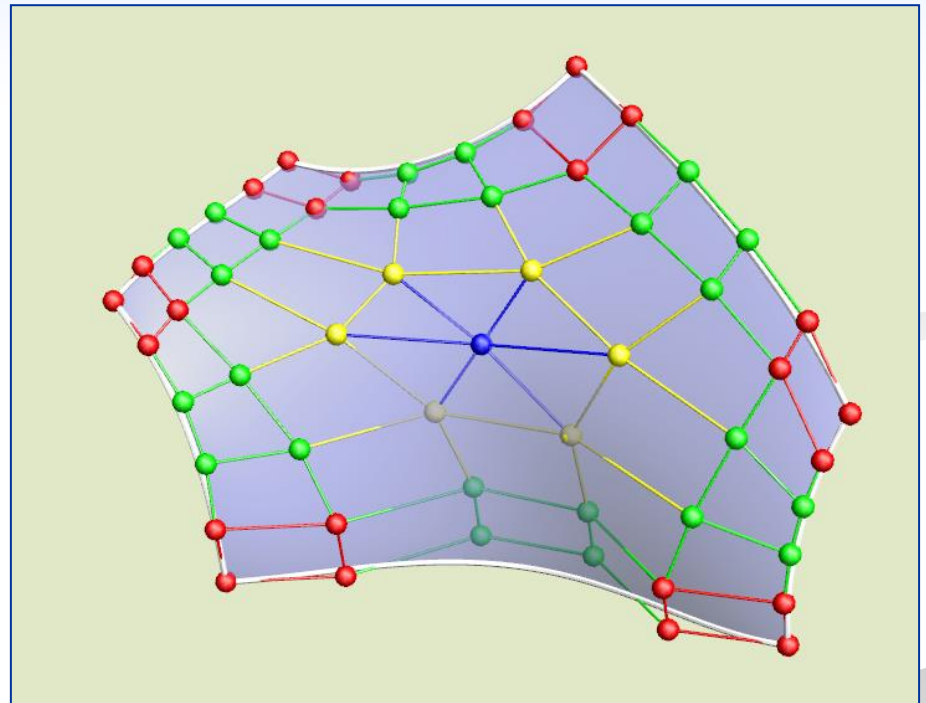


Folytonos felületek modellezése - alapkérdések

- implicit vagy parametrikus ?
- súlyozott kontrollpontok vagy súlyozott ribbonok (peremfelületek) kombinációja?
- 4-oldalú vagy n -oldalú ?
- hogyan módosítható/szerkeszthető ?
- hogyan illeszthető szomszédos felületekhez ?
- ...

Felületek 1 - Generalized Bézier felületek

- a 4-oldalú Bézier felületek általánosítása
- minden oldalhoz - lokális paraméterek $\{s_i, h_i\}$
- speciális súlyfüggvények
- központi CP - súlyhiány
- displacement elv - tetszőleges foksámú határok kombinálása



Felületek 2 – S-patch-ek

- a 3-oldalú Bézier patch általánosítása:

n oldal, d fokszám

- baricentikus koordináták

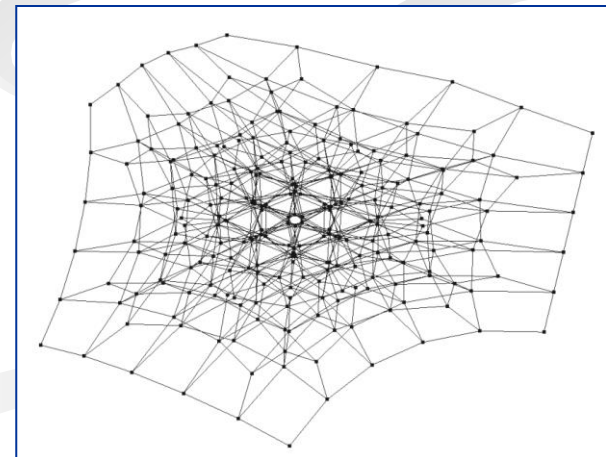
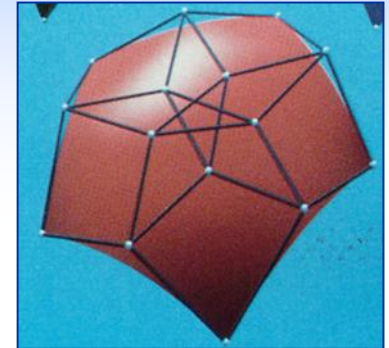
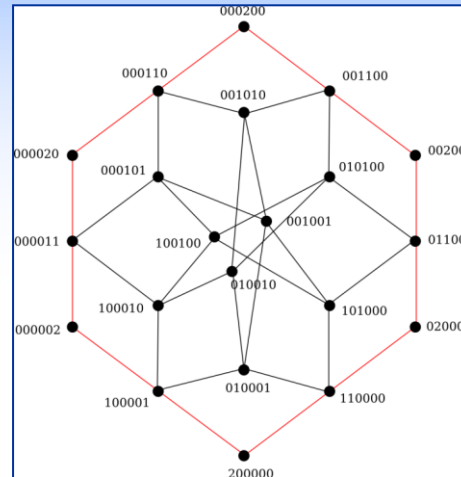
$$\mathbf{u} = (u_1 \dots u_n)$$

- multi-indexelés

$$\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n) \quad i_1 + \dots + i_n = d$$

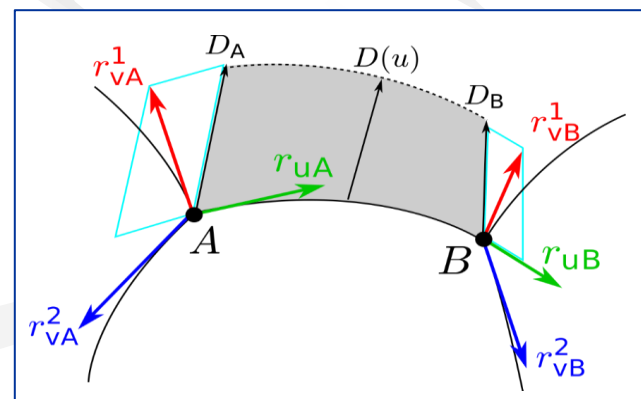
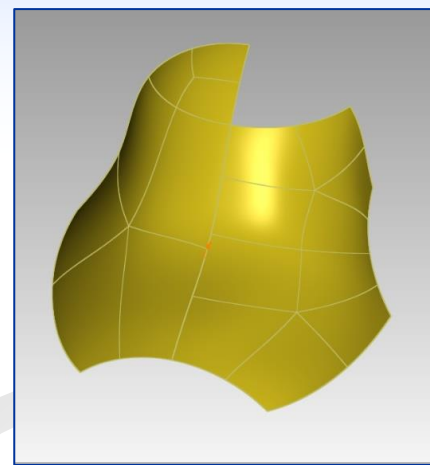
- multi-nomiális súlyfüggvények

$$S(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{i}} P_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^d(\mathbf{u})$$



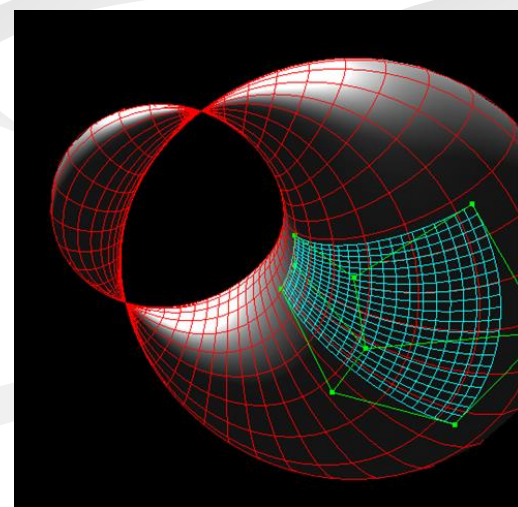
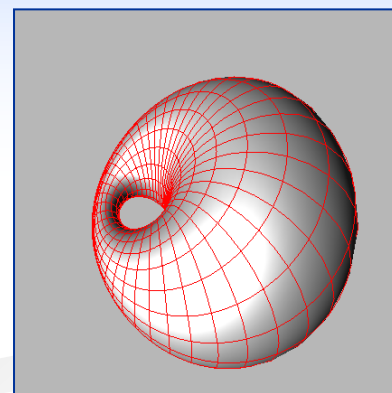
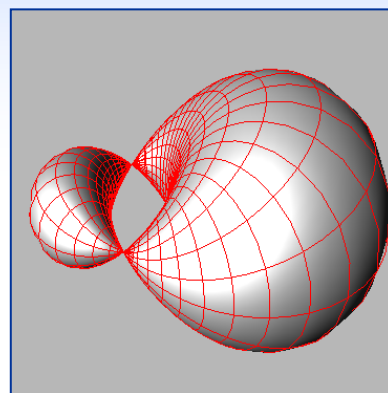
Felületek 3 – Négyoldalú felületek G^1 összekapcsolása

- kompozit felületek 4-oldalú patchek összevarrásával
- G^1 kapcsolódás – lineáris irányblend
- kritikus kérdés – twist kompatibilitás
- legjobb felületi görbület előállítása a csúcsokban



Felületek 4 – hibrid reprezentáció, Dupin cyclide-ok

- implicit $\leftrightarrow$ parametrikus konverzió
- általánosított tórusz
- megadható implicit ÉS parametrikus alakban is
- rational quadratic Bézier patch
- az összes paramétervonal kör



Felületek 5 – Implicit N-oldalú felületek, I-patch-ek

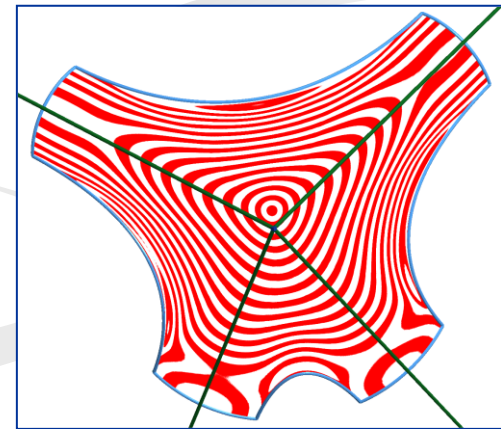
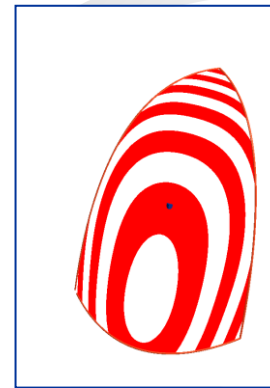
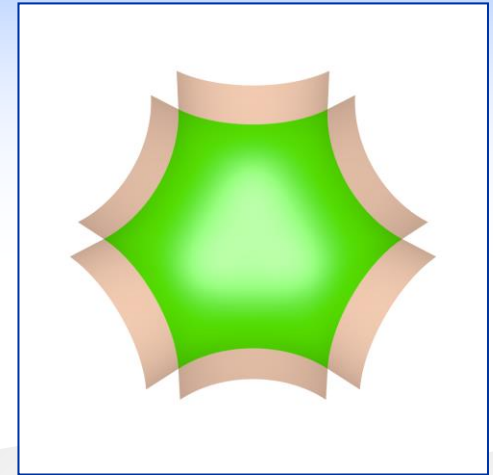
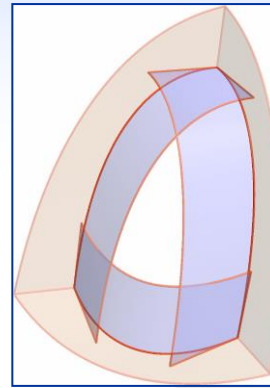
- a határgörbék implicit elsődleges felületek és vágófelületek metszéséből adódnak
- a patch simul az elsődleges felületekhez

$$n = 3$$

$$P_i(x, y, z) = 0, B_i(x, y, z) = 0$$

$$I(x, y, z) = w_1 P_1 B_2^2 B_3^2 + w_2 P_2 B_3^2 B_1^2 + w_3 P_3 B_1^2 B_2^2 + w_0 B_1^2 B_2^2 B_3^2 = 0$$

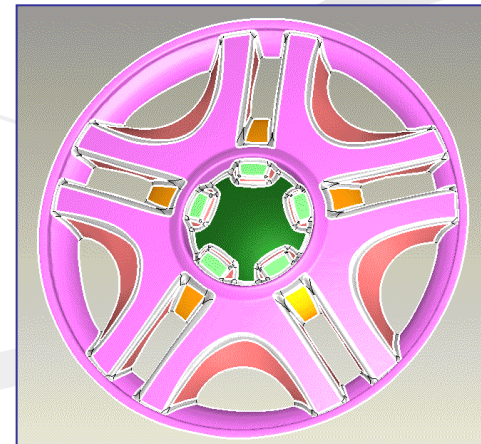
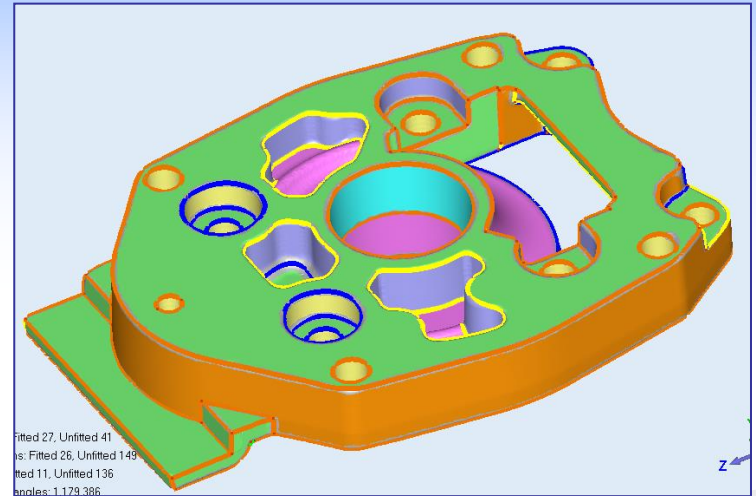
$$I(x, y, z) = \frac{w_1 P_1}{B_1^2} + \frac{w_2 P_2}{B_2^2} + \frac{w_3 P_3}{B_3^2} + w_0 = 0$$



Kényszerek 1 – általában

Digitális alakzat rekonstrukció

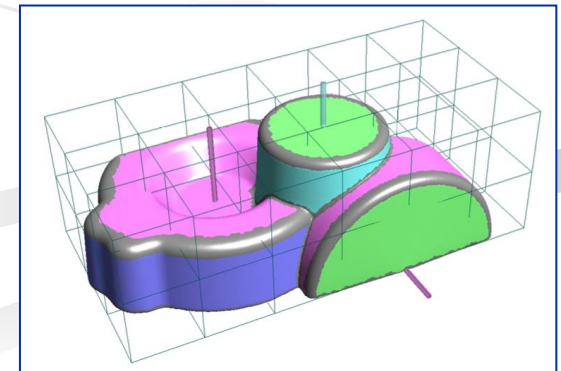
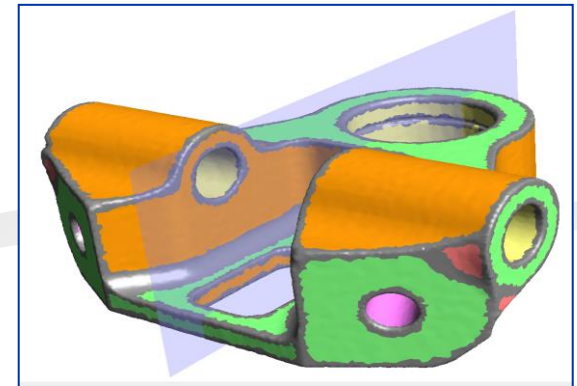
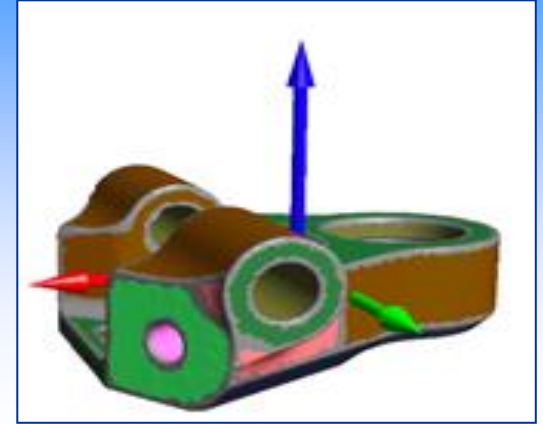
- input: szegmentált és klasszifikált pontthalmazok
- görbék és felületek illesztése **külön-külön**
→ pontatlan CAD model
- tökéletesítés mérnöki kényszerekkel
 - merőleges, párhuzamos, érintőleges, koncentrikus, kerekített érték, stb.
- bonyolult algebrai egyenletrendszer - több görbe és felület **együttes** illesztése
- constrained fitting - iteratív megoldás



Kényszerek 2

Globális jellemzők

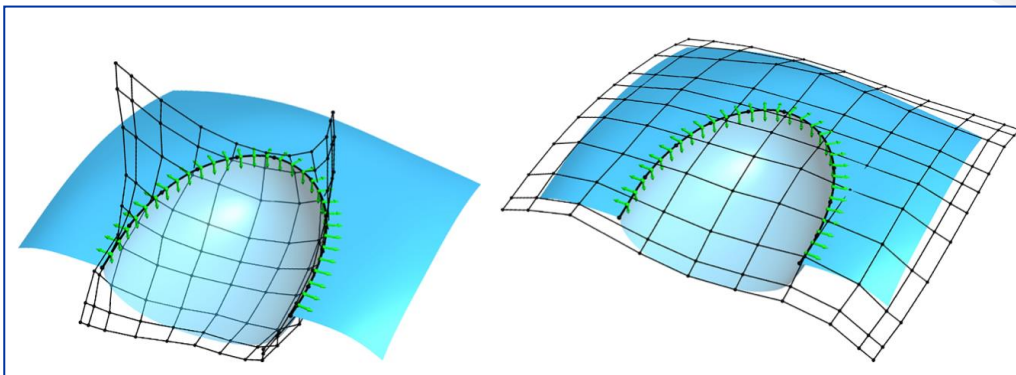
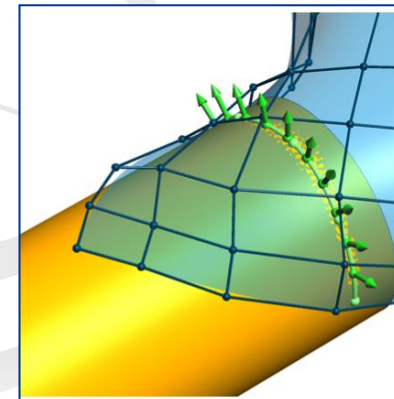
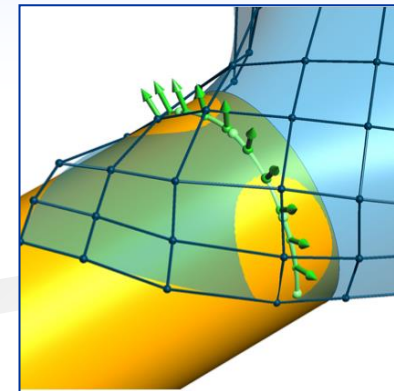
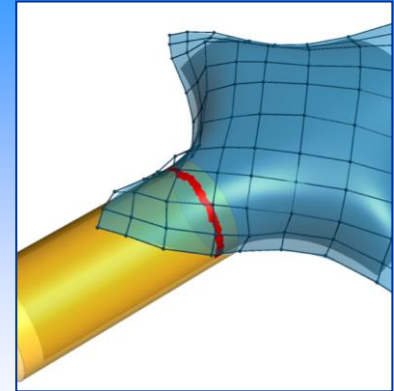
- globális kényszerek felismerése és érvényesítése
 - a) legjobb koordináta-rendszer
 - b) szimmetriasíkok
 - c) legjobb rácsozás



Kényszerek 3

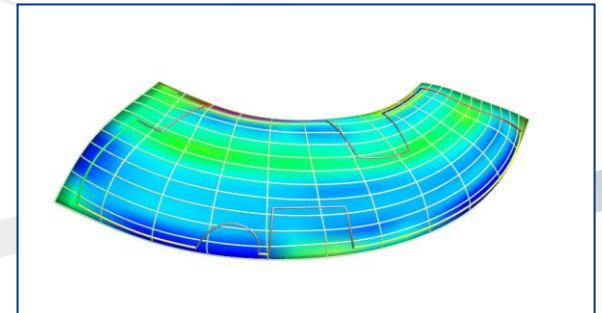
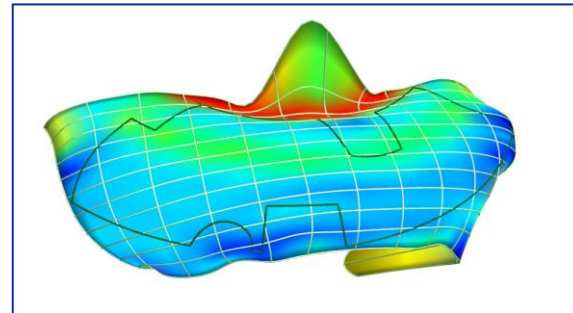
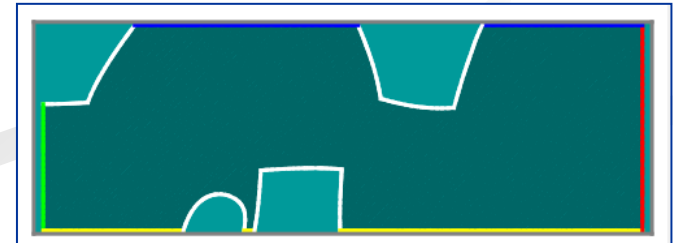
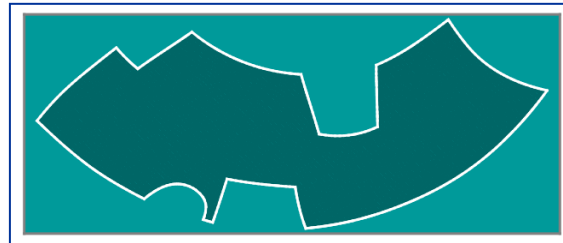
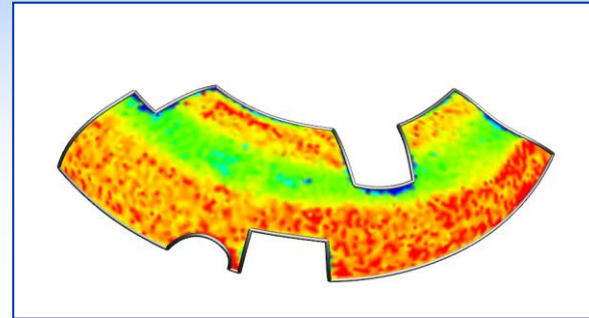
Szabadformájú görbék és felületek

- kényszerek érvényesítése - a kontrollpontok lokális módosítása által
- pl.: sima vagy merőleges kapcsolódás
- az optimális kapcsolódási görbék is kiadódnak



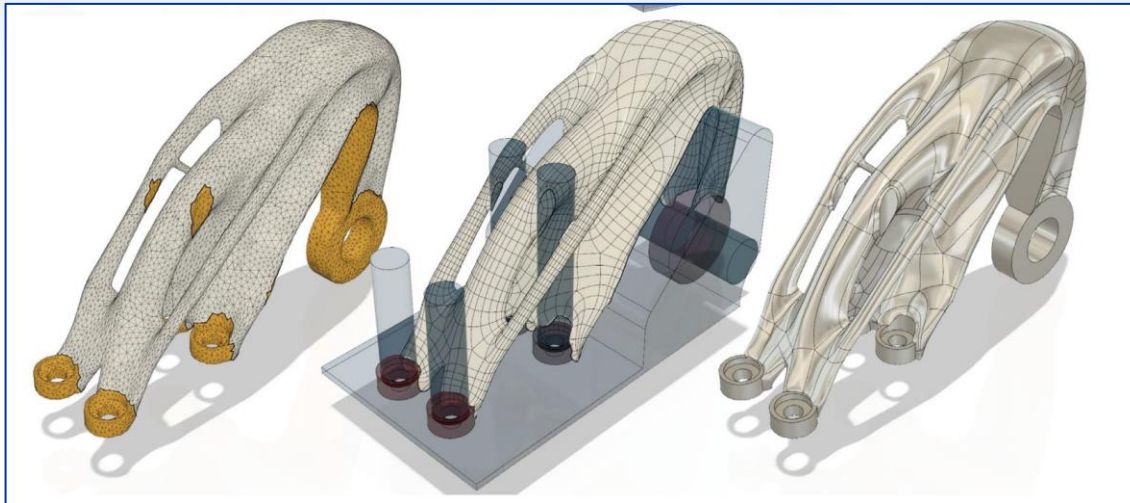
Kényszerek 4 – Labelled fitting

- határgörbék osztályozása:
 - South, West, North, East
 - none (trimmed)
- paraméterezés címke kényszerekkel



Kényszerek 5

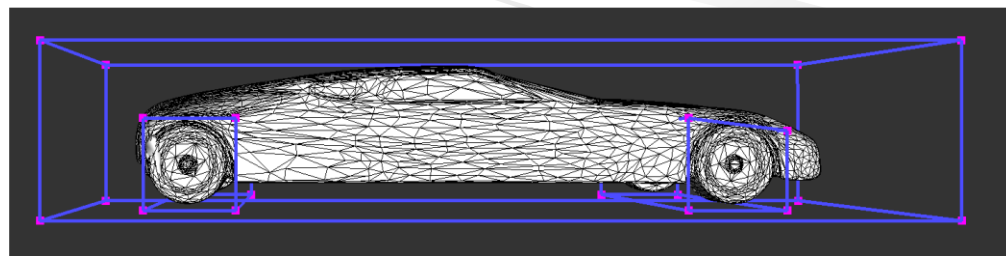
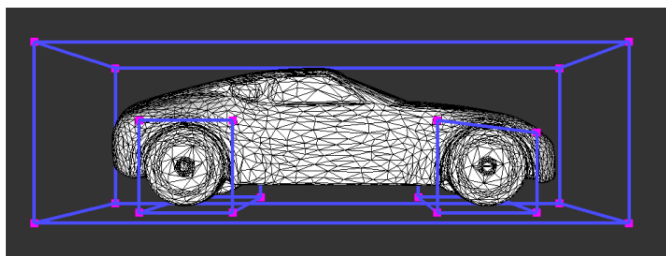
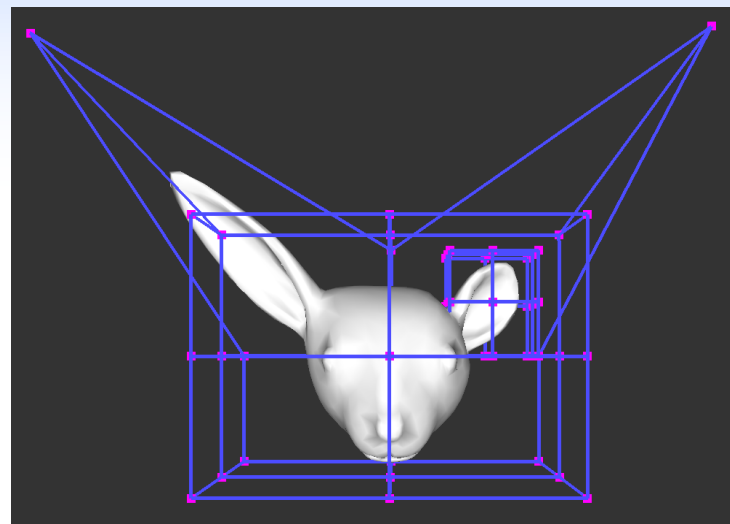
Generative Design



- optimális összekötő szerkezet létrehozása
- geometriai kényszerek - illeszkedés vagy kikerülés

Kényszerek 6 - Deformáció

- kényszerzónák - a deformáció előírt szabályok szerint hajtódik végre
- a belső alakzat megtartása, pozíció őrzés, hasonlósági transzformációk, skálázás, stb.



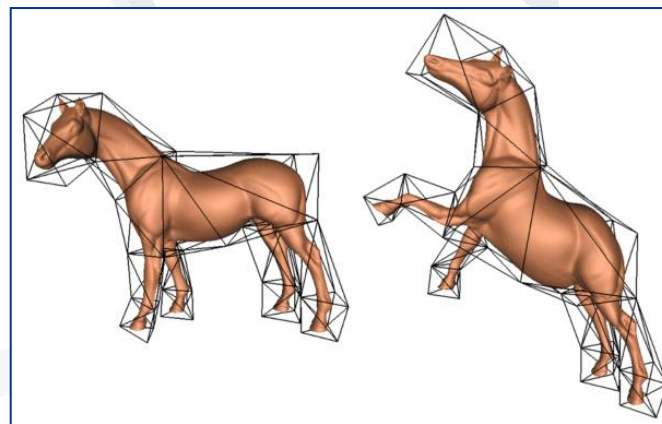
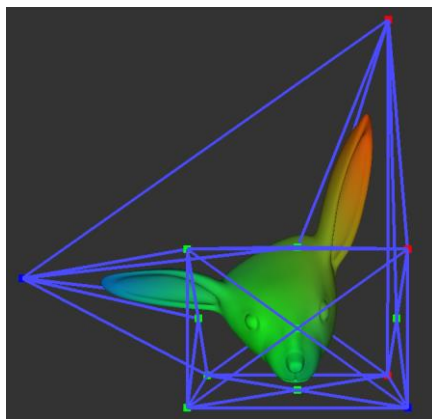
Általános baricentrikus koordináták

- poligonok, poliéderek belsejében értelmezzük – folytonos leképezés - minden belső pont kifejezhető a csúcspontok lineáris kombinációjaként

$$v \Leftrightarrow [\lambda_1, \dots, \lambda_n], \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \quad [\textit{partition of unity}]$$

$$v = \sum_i \lambda_i(v) v_i \quad [\textit{reproduction}]$$

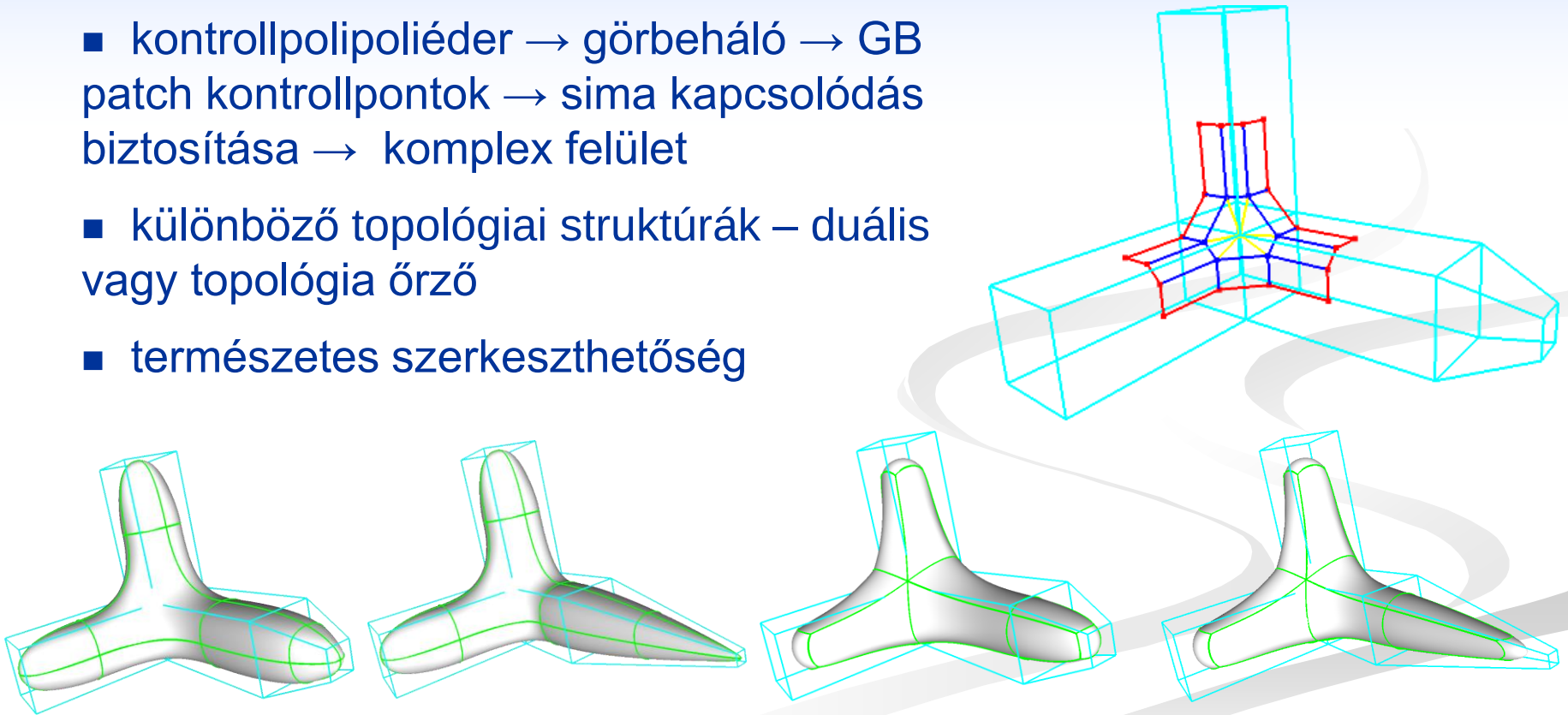
- skalár és vektormezők interpolációja, n -oldalú patchek, paraméterezés, alakzatok deformációja



Kontrollpoliéderek 1

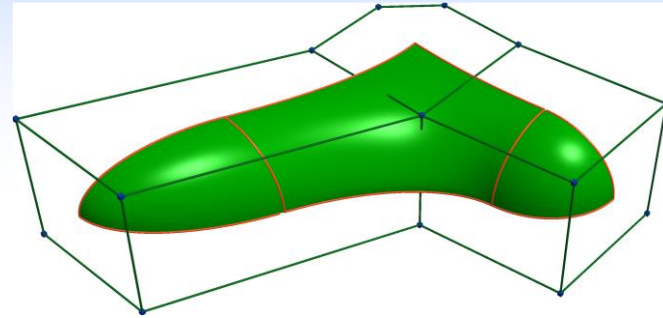
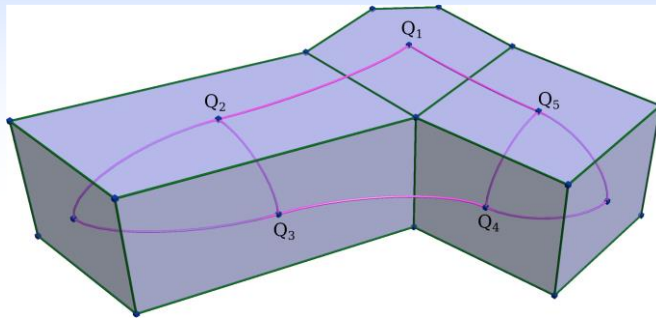
GB-patch-ek összevarrása

- kontrollpolipoliéder $\rightarrow$ görbeháló $\rightarrow$ GB patch kontrollpontok $\rightarrow$ sima kapcsolódás biztosítása $\rightarrow$ komplex felület
- különböző topológiai struktúrák – duális vagy topológia őrző
- természetes szerkeszthetőség

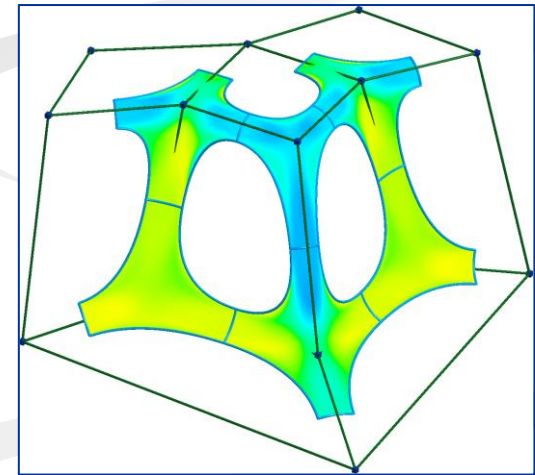


Kontrollpoliéderek 2

I-patch-ek összevarrása



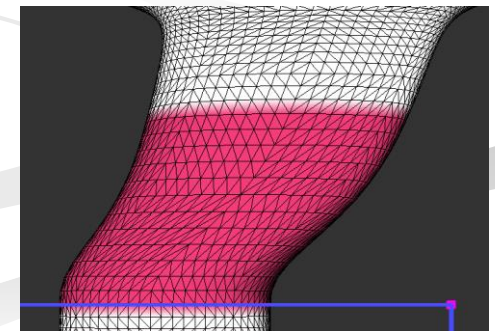
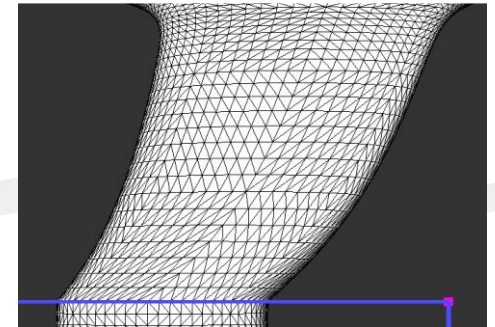
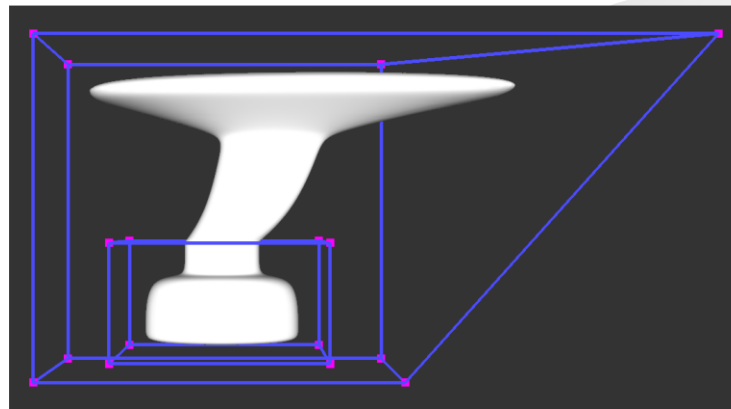
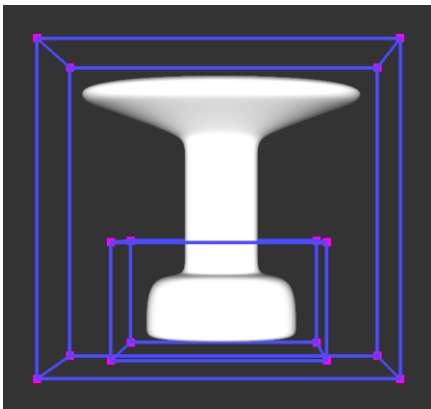
- az elsődleges felületeket és a vágófelületeket a poliéder alapján határozzuk meg
- a szomszédos patch-ekre a határgörbék és a keresztderiváltak megegyeznek $\rightarrow G^n$
- a patch-ek teltsége változtatható



Kontrollpoliéderek 3

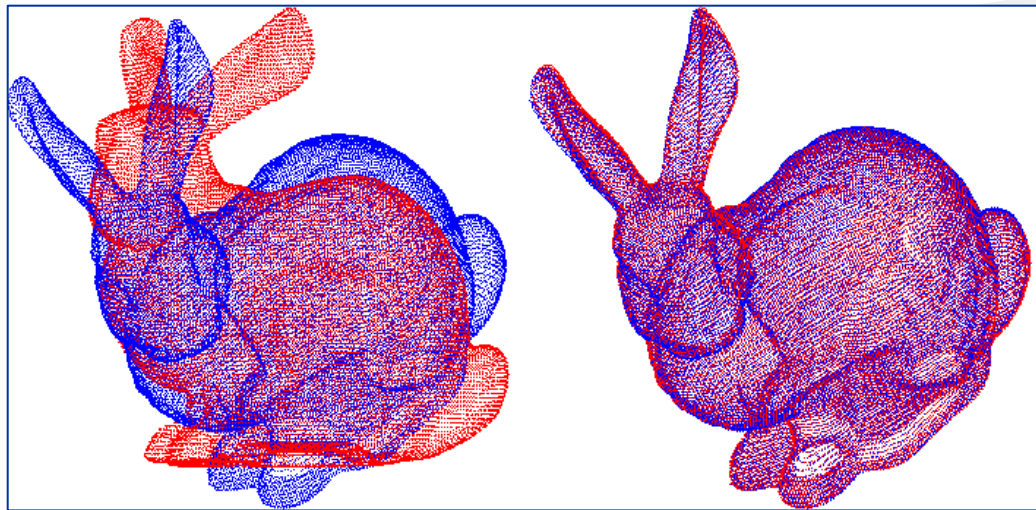
Deformáció

- 3D deformáció kényszerekkel
- törések elkerülése: a globális és a kényszerzőna baricentrikus koordinátáinak összesimítása



Algoritmusok 1 - Mért pontthalmazok összevonása

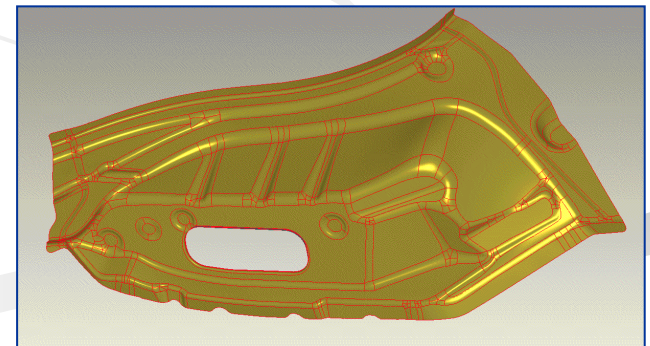
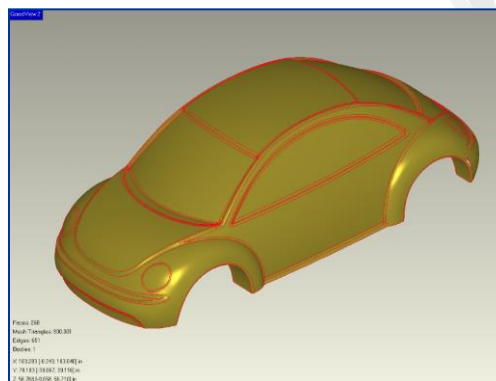
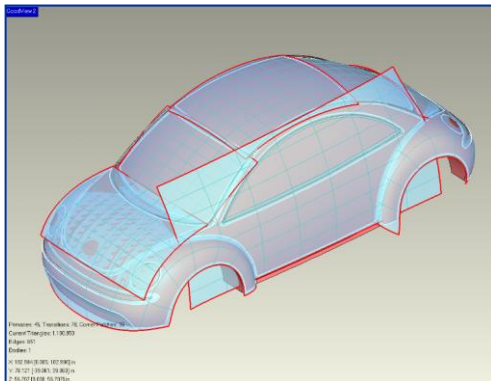
- Input: részben átlapolódó pontfelhők - különböző koordináta-rendszerekben, de azonos méretben
- Output: az összes adatot egyesítő konzisztens pontfelhő
- ICP (Iterative Closest Point) eljárás – a legjobb transzformációs mátrix meghatározása összerendelt pontpárok alapján



Algoritmusok 2

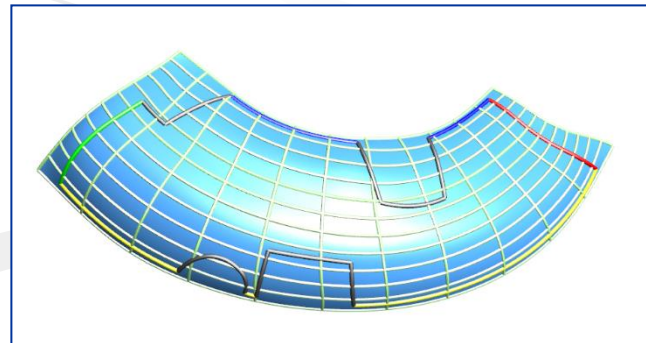
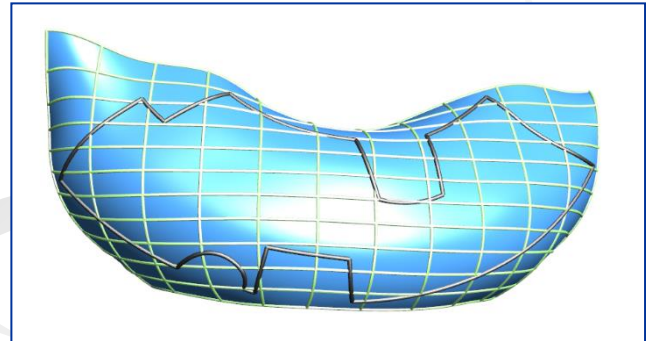
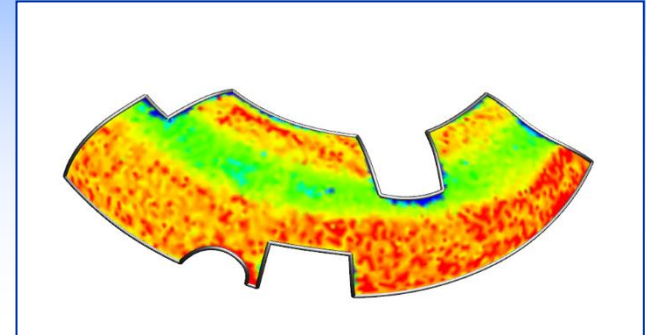
Felület-felület metszés

- komplex probléma – több nyitott vagy zárt görbedarab, szingularitások, hatékony globális tesztek
 - (i) diszkretizált módszerek
 - (ii) algebrai eljárások
 - (iii) metszésgörbe követés (tracing)
- gördülő gömb lekerekítések : offszet felületek metszése



Algoritmusok 3 - Parametrikus felületek illesztése

- input – szabálytalan topológiájú háromszögháló tartomány
- cél – „természetes” orientációjú négyoldalú parametrikus felület, jól kontrollált sima kiterjesztéssel
- kulcskérdés: paraméterezés
- határgörbék címkézése (labelling)
 - manuális
 - automatikus
- paraméterezés kényszerekkel
- mesterséges adatpontok
- illesztés

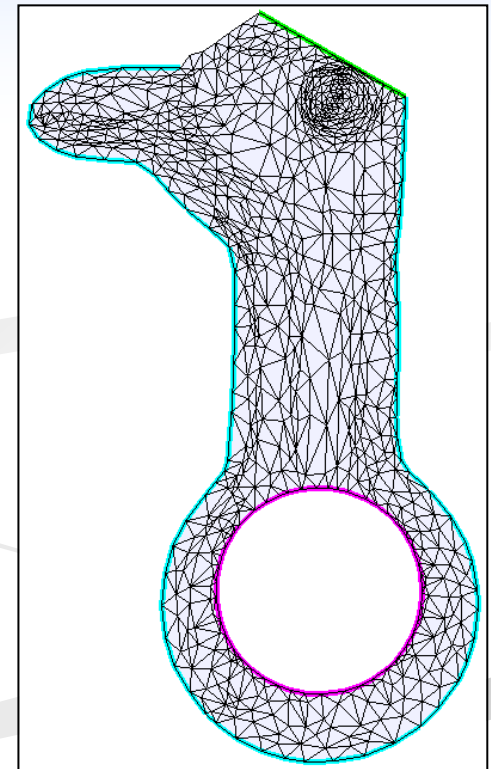
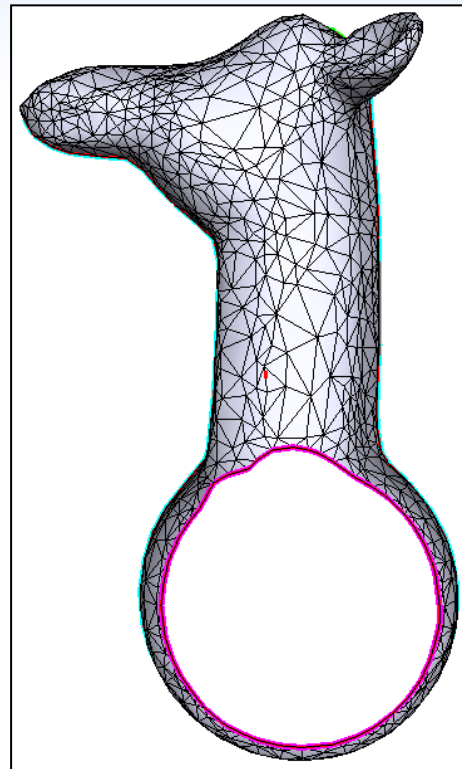


Struktúrák 1

Háromszöghálók paraméterezése

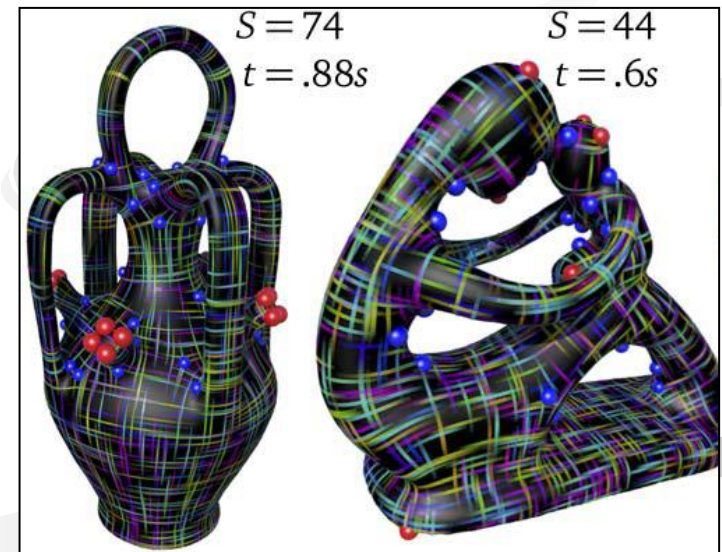
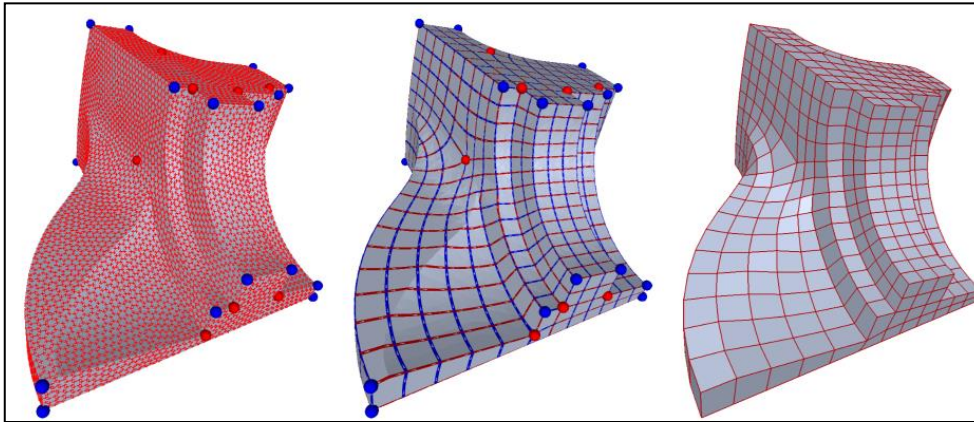
$$(x_i, y_i, z_i) \rightarrow (u_i, v_i)$$

- síkba terítés
- különböző torzítások
- Tutte módszere
- egyenletrendszer
- súlyozás, peremfeltételek
- folytonos analógia
- követelmények



Struktúrák 2 - Quadmesh-ek

- motiváció, elvárások
- paraméterezés szingularitásokkal
- paraméterezés iránymezők segítségével
- mezőgenerálás szingularitásokkal



Struktúrák 3

Generative Design



- (i) pontos kapcsolódás a kényszerelemekhez
- (ii) a szabálytalan összekötő struktúra szegmentálása, és CAD kompatibilis reprezentáció előállítása

3D printing

- additív megmunkálás
- három alaptermék
- érdekes kérdések:
 - gyárthatóság
 - támaszstruktúrák kívül és belül
 - nyomtatható modellek előállítása
- FormLabs
- trendek



Szabadkézi vázlatgörbék

- szimultán (i) szabadkézi rajzolás 2D-ben és (ii) egzakt szerkesztőváz létrehozása 3D-ben
- „laza” vázlatgörbék konvertálása B-spline formátumba
- kényszerezés szerkesztősíkokban és 3D-ben (pozíciók+ érintők; mélységinformáció értelmezése)

