3D számítógépes geometria 2

Numerikus analízis alapok – ujjgyakorlat 2 megoldások

Várady Tamás, Salvi Péter / BME

October 2, 2018

Ujjgyakorlat 1

Feladat: $\int_0^1 \cos(x)\,\mathrm{d}x$ kiszámítása trapéz-módszerrel

Megoldás:

Ujjgyakorlat 1

Feladat: $\int_0^1 \cos(x)\,\mathrm{d}x$ kiszámítása trapéz-módszerrel

Megoldás:

- 1. iteráció: $f(0) = 1$, $f(1) = 0.54 \Rightarrow$
  $S_1 = 1\left[\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 0.54\right] = 0.77$

Ujjgyakorlat 1

Feladat: $\int_0^1 \cos(x)\,\mathrm{d}x$ kiszámítása trapéz-módszerrel

Megoldás:

- 1. iteráció: $f(0) = 1$, $f(1) = 0.54 \Rightarrow$
  $S_1 = 1\left[\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 0.54\right] = 0.77$

- 2. iteráció: $f(0.5) = 0.878 \Rightarrow$
  $S_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot 1 + 0.878 + \frac{1}{2}\cdot 0.54\right] = \frac{1}{2}\left[S_1 + 1\cdot 0.878\right] = 0.824$
  - Ebből a javított érték $\frac{4}{3}\cdot 0.824 - \frac{1}{3}\cdot 0.77 = 0.842$

Ujjgyakorlat 1

Feladat: $\int_0^1 \cos(x)\,\mathrm{d}x$ kiszámítása trapéz-módszerrel

Megoldás:

- 1. iteráció: $f(0) = 1$, $f(1) = 0.54 \Rightarrow$
  $S_1 = 1\left[\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0.54\right] = 0.77$
- 2. iteráció: $f(0.5) = 0.878 \Rightarrow$
  $S_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} \cdot 1 + 0.878 + \frac{1}{2} \cdot 0.54\right] = \frac{1}{2}\left[S_1 + 1 \cdot 0.878\right] = 0.824$
  - Ebből a javított érték $\frac{4}{3} \cdot 0.824 - \frac{1}{3} \cdot 0.77 = 0.842$
- 3. iteráció: $f(0.25) = 0.969$, $f(0.75) = 0.732 \Rightarrow$
  $$S_3 = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} \cdot 1 + 0.969 + 0.878 + 0.732 + \frac{1}{2} \cdot 0.54\right]$$
  $$= \frac{1}{2}\left[S_2 + \frac{1}{2}(0.969 + 0.732)\right] = 0.837$$
  - Ebből a javított érték $\frac{4}{3} \cdot 0.837 - \frac{1}{3}0.824 = 0.841$

... ami pontos 3 tizedesjegyre.

A függvényt összesen 5x kellett kiértékelni.

Ujjgyakorlat 2(a)

Feladat: $\int_0^1 \cos(x)\,\mathrm{d}x$ kiszámítása Gauss–Legendre kvadratúrával:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Megoldás:

Ujjgyakorlat 2(a)

Feladat: $\int_0^1 \cos(x)\,\mathrm{d}x$ kiszámítása Gauss–Legendre kvadratúrával:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Megoldás:

- A függvényt át kell alakítani a megfelelő formára:

$$\int_0^1 \cos(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{y+1}{2}\right)\frac{1}{2}\mathrm{d}y$$

  - Ebből $f(y) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{y+1}{2}\right)$

Ujjgyakorlat 2(a)

Feladat: $\int_0^1 \cos(x)\,\mathrm{d}x$ kiszámítása Gauss–Legendre kvadratúrával:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Megoldás:

- A függvényt át kell alakítani a megfelelő formára:

$$\int_0^1 \cos(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{y+1}{2}\right)\frac{1}{2}\mathrm{d}y$$

  - Ebből $f(y) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{y+1}{2}\right)$

- Kiértékelések: $f(\sqrt{3}/3) = 0.352$, $f(-\sqrt{3}/3) = 0.489$

$$\int_0^1 \cos(x)\,\mathrm{d}x \approx 0.352 + 0.489 = 0.841$$

Ujjgyakorlat 2(b)

Feladat: $\int_0^1 \cos(x)\,\mathrm{d}x$ kiszámítása Gauss–Csebisev kvadratúrával:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{2}\left[f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

Megoldás:

Ujjgyakorlat 2(b)

Feladat: $\int_0^1 \cos(x)\,\mathrm{d}x$ kiszámítása Gauss–Csebisev kvadratúrával:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{2}\left[f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

Megoldás:

- A függvényt át kell alakítani a megfelelő formára:

$$f(y) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{y+1}{2}\right) \cdot \sqrt{1-y^2}$$

Ujjgyakorlat 2(b)

Feladat: $\int_0^1 \cos(x)\,\mathrm{d}x$ kiszámítása Gauss–Csebisev kvadratúrával:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{2}\left[f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

Megoldás:

- A függvényt át kell alakítani a megfelelő formára:

$$f(y) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{y+1}{2}\right)\cdot\sqrt{1-y^2}$$

- Kiértékelések: $f(\sqrt{2}/2) = 0.232$, $f(-\sqrt{2}/2) = 0.35$

$$\int_0^1 \cos(x)\,\mathrm{d}x \approx 1.571\cdot(0.232+0.35) = 0.914$$

- Általános képlet: $x_i = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right)$ és $w_i = \frac{\pi}{n}$, $i \in [1\ldots n]$
  - Vagy: $\int_0^\pi f(\cos\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$ és $x_i = \frac{(2i-1)\pi}{2n}$

Ujjgyakorlat 2(c)

Feladat: $\int_0^1 \cos(x)\,\mathrm{d}x$ kiszámítása Gauss–Hermite kvadratúrával:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

Megoldás:

Ujjgyakorlat 2(c)

Feladat: $\int_0^1 \cos(x)\,\mathrm{d}x$ kiszámítása Gauss–Hermite kvadratúrával:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

Megoldás:

- Az $1/(1+e^{-x})$ szigmoid függvénnyel áttérünk $[-\infty, \infty]$-re:

$$f(y) = \cos\left(\frac{1}{1+e^{-y}}\right) \cdot \frac{e^{y+y^2}}{(1+e^y)^2}$$

Ujjgyakorlat 2(c)

Feladat: $\int_0^1 \cos(x)\,\mathrm{d}x$ kiszámítása Gauss–Hermite kvadratúrával:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

Megoldás:

- Az $1/(1+e^{-x})$ szigmoid függvénnyel áttérünk $[-\infty, \infty]$-re:

$$f(y) = \cos\left(\frac{1}{1+e^{-y}}\right) \cdot \frac{e^{y+y^2}}{(1+e^y)^2}$$

- Kiértékelések: $f(\sqrt{2}/2) = 0.286$, $f(-\sqrt{2}/2) = 0.345$

$$\int_0^1 \cos(x)\,\mathrm{d}x \approx 0.886 \cdot (0.286 + 0.345) = 0.559$$

- Tanulság: akkor használjuk, ha az integrandus hasonló alakú

Ujjgyakorlat 3

Feladat: π kiszámítása Monte–Carlo módszerrel

Megoldás:

- Legyen $f(p) = 1$, ekkor

$$\int_{p \in \text{kör}} f(p)\,\mathrm{d}p = \pi$$

- Kiegészítjük az integrálandó térfogatot $[-1, 1]^2$-re
  - $f(p)$ az egységkörön kívül 0
- Monte–Carlo integrálás:

$$\pi = \int_{p \in [-1,1]^2} f(p)\,\mathrm{d}p \approx 2^2 \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(p_i)$$

  - A körön belülre eső pontok arányának négyszerese
- Kb. 1 millió mintára lesz (várhatóan) 2 tizedesjegyig pontos :)

Ujjgyakorlat 4(a)

Feladat: Pont követése Euler-módszerrel, $h = 2$ lépésközzel.
Vektortér:

$$\left(\frac{\cos(x) + \sin(y)}{5}, \ \frac{\cos(y) + \sin(x)}{5} \right)$$

Megoldás:

Ujjgyakorlat 4(a)

Feladat: Pont követése Euler-módszerrel, $h = 2$ lépésközzel.
Vektortér:

$$\left(\frac{\cos(x)+\sin(y)}{5},\ \frac{\cos(y)+\sin(x)}{5}\right)$$

Megoldás:

- 1. lépés:

$$(0,2)+2\left(\frac{\cos(0)+\sin(2)}{5},\ \frac{\cos(2)+\sin(0)}{5}\right) = (0.764, 1.834)$$

Ujjgyakorlat 4(a)

Feladat: Pont követése Euler-módszerrel, $h = 2$ lépésközzel.
Vektortér:

$$\left(\frac{\cos(x)+\sin(y)}{5},\ \frac{\cos(y)+\sin(x)}{5}\right)$$

Megoldás:

- 1. lépés:

$$(0,2)+2\left(\frac{\cos(0)+\sin(2)}{5},\ \frac{\cos(2)+\sin(0)}{5}\right)=(0.764,1.834)$$

- 2. lépés:

$$(0.764,1.834)+2\left(\frac{\cos(0.764)+\sin(1.834)}{5},\ \frac{\cos(1.834)+\sin(0.764)}{5}\right)$$

$$=(1.439,2.007)$$

Ujjgyakorlat 4(b)

Feladat: Pont követése Runge–Kutta módszerrel, $h = 2$ lépésközzel. Vektortér:

$$f(x, y) = \left(\frac{\cos(x) + \sin(y)}{5}, \ \frac{\cos(y) + \sin(x)}{5} \right)$$

Megoldás:

Ujjgyakorlat 4(b)

Feladat: Pont követése Runge–Kutta módszerrel, $h = 2$ lépésközzel. Vektortér:

$$f(x, y) = \left(\frac{\cos(x) + \sin(y)}{5}, \ \frac{\cos(y) + \sin(x)}{5} \right)$$

Megoldás:

- 0.5. lépés: $2 \cdot f(0, 2) = (0.764, -0.166)$

Ujjgyakorlat 4(b)

Feladat: Pont követése Runge–Kutta módszerrel, $h = 2$ lépésközzel. Vektortér:

$$f(x, y) = \left(\frac{\cos(x) + \sin(y)}{5}, \ \frac{\cos(y) + \sin(x)}{5} \right)$$

Megoldás:

- 0.5. lépés: $2 \cdot f(0, 2) = (0.764, -0.166)$
- 1. lépés:
  $(0, 2) + 2 \cdot f(0 + 0.764/2, 2 - 0.166/2) = (0.747, 2.013)$

Ujjgyakorlat 4(b)

Feladat: Pont követése Runge–Kutta módszerrel, $h = 2$ lépésközzel. Vektortér:

$$f(x, y) = \left(\frac{\cos(x) + \sin(y)}{5}, \; \frac{\cos(y) + \sin(x)}{5} \right)$$

Megoldás:

- 0.5. lépés: $2 \cdot f(0, 2) = (0.764, -0.166)$
- 1. lépés:
  $(0, 2) + 2 \cdot f(0 + 0.764/2, 2 - 0.166/2) = (0.747, 2.013)$
- 1.5. lépés: $2 \cdot f(0.747, 2.013) = (0.655, 0.101)$

Ujjgyakorlat 4(b)

Feladat: Pont követése Runge–Kutta módszerrel, $h = 2$ lépésközzel. Vektortér:

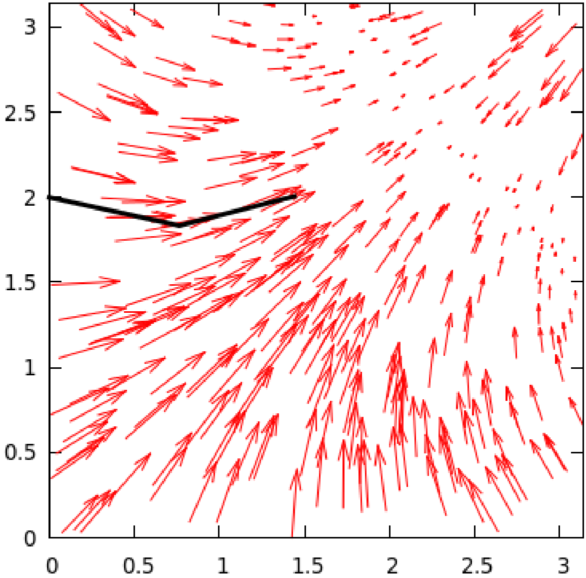
$$f(x,y) = \left(\frac{\cos(x) + \sin(y)}{5}, \ \frac{\cos(y) + \sin(x)}{5} \right)$$

Megoldás:

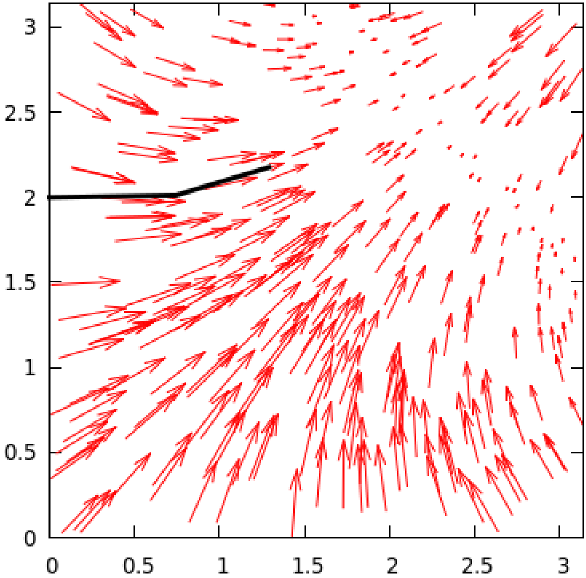
- 0.5. lépés: $2 \cdot f(0,2) = (0.764, -0.166)$
- 1. lépés:
  $(0,2) + 2 \cdot f(0 + 0.764/2, 2 - 0.166/2) = (0.747, 2.013)$
- 1.5. lépés: $2 \cdot f(0.747, 2.013) = (0.655, 0.101)$
- 2. lépés:
  $(0.747, 2.013) + 2 \cdot f(0.747 + 0.655/2, 2.013 + 0.101/2)$

  $$\Rightarrow (0.747, 2.013) + 2 \cdot f(1.075, 2.064) = (1.29, 2.175)$$

Ujjgyakorlat – Euler



Ujjgyakorlat – Runge–Kutta



Ujjgyakorlat – Pontos