

3D számítógépes geometria 2

Numerikus analízis alapok – újjgyakorlat megoldások

Váradý Tamás, Salvi Péter / BME

September 24, 2018

Ujjgyakorlat 1.1(i)

Feladat: $f(x) = x^2 - 5$ gyöke kettéosztással ($x_{\text{low}} = 2$, $x_{\text{high}} = 3$)

Megoldás:

$$x_{\text{try}} = \frac{x_{\text{low}} + x_{\text{high}}}{2}$$

	0	1	2	3
x_{low}	2			
$f(x_{\text{low}})$				
x_{high}	3			
$f(x_{\text{high}})$				

Ujjgyakorlat 1.1(i)

Feladat: $f(x) = x^2 - 5$ gyöke kettéosztással ($x_{\text{low}} = 2$, $x_{\text{high}} = 3$)

Megoldás:

$$x_{\text{try}} = \frac{x_{\text{low}} + x_{\text{high}}}{2}$$

	0	1	2	3
x_{low}	2			
$f(x_{\text{low}})$				
x_{high}	3	2.5		
$f(x_{\text{high}})$		1.25		

Ujjgyakorlat 1.1(i)

Feladat: $f(x) = x^2 - 5$ gyöke kettéosztással ($x_{\text{low}} = 2$, $x_{\text{high}} = 3$)

Megoldás:

$$x_{\text{try}} = \frac{x_{\text{low}} + x_{\text{high}}}{2}$$

	0	1	2	3
x_{low}	2			
$f(x_{\text{low}})$				
x_{high}	3	2.5	2.25	
$f(x_{\text{high}})$		1.25	0.0625	

Ujjgyakorlat 1.1(i)

Feladat: $f(x) = x^2 - 5$ gyöke kettéosztással ($x_{\text{low}} = 2$, $x_{\text{high}} = 3$)

Megoldás:

$$x_{\text{try}} = \frac{x_{\text{low}} + x_{\text{high}}}{2}$$

	0	1	2	3
x_{low}	2			2.125
$f(x_{\text{low}})$				-0.484
x_{high}	3	2.5	2.25	
$f(x_{\text{high}})$		1.25	0.0625	

Az utolsó érték nem a legpontosabb!

⇒ számon lehet tartani az eddigi legjobb tippet

(de több iterációnál a hibaintervallum tetszőlegesen kicsire vihető)

Ujjgyakorlat 1.1(ii)

Feladat: $f(x) = x^2 - 5$ gyöke hamis pozícióval ($x_{\text{low}} = 2$, $x_{\text{high}} = 3$)

Megoldás:

$$x_{\text{try}} = x_{\text{high}} - \frac{x_{\text{low}} - x_{\text{high}}}{f(x_{\text{low}}) - f(x_{\text{high}})} f(x_{\text{high}})$$

	0	1	2	3
x_{low}	2			
$f(x_{\text{low}})$	-1			
x_{high}	3			
$f(x_{\text{high}})$	4			

Ujjgyakorlat 1.1(ii)

Feladat: $f(x) = x^2 - 5$ gyöke hamis pozícióval ($x_{\text{low}} = 2$, $x_{\text{high}} = 3$)

Megoldás:

$$x_{\text{try}} = x_{\text{high}} - \frac{x_{\text{low}} - x_{\text{high}}}{f(x_{\text{low}}) - f(x_{\text{high}})} f(x_{\text{high}})$$

	0	1	2	3
x_{low}	2	2.2		
$f(x_{\text{low}})$	-1	-0.16		
x_{high}	3			
$f(x_{\text{high}})$	4			

Ujjgyakorlat 1.1(ii)

Feladat: $f(x) = x^2 - 5$ gyöke hamis pozícióval ($x_{\text{low}} = 2$, $x_{\text{high}} = 3$)

Megoldás:

$$x_{\text{try}} = x_{\text{high}} - \frac{x_{\text{low}} - x_{\text{high}}}{f(x_{\text{low}}) - f(x_{\text{high}})} f(x_{\text{high}})$$

	0	1	2	3
x_{low}	2	2.2	2.231	
$f(x_{\text{low}})$	-1	-0.16	-0.023	
x_{high}	3			
$f(x_{\text{high}})$	4			

Ujjgyakorlat 1.1(ii)

Feladat: $f(x) = x^2 - 5$ gyöke hamis pozícióval ($x_{\text{low}} = 2$, $x_{\text{high}} = 3$)

Megoldás:

$$x_{\text{try}} = x_{\text{high}} - \frac{x_{\text{low}} - x_{\text{high}}}{f(x_{\text{low}}) - f(x_{\text{high}})} f(x_{\text{high}})$$

	0	1	2	3
x_{low}	2	2.2	2.231	2.235
$f(x_{\text{low}})$	-1	-0.16	-0.023	-0.005
x_{high}	3			
$f(x_{\text{high}})$	4			

Ujjgyakorlat 1.2(i)

Feladat: $f(x) = x^2 - 5$ gyöke fixpont iterációval ($x_0 = 2$ és $x_0 = 3$)

Megoldás:

$$x_{k+1} = x_k^2 + x_k - 5$$

	0	1	2	3	Konvergencia
x_k	2				
x_k	3				

Ujjgyakorlat 1.2(i)

Feladat: $f(x) = x^2 - 5$ gyöke fixpont iterációval ($x_0 = 2$ és $x_0 = 3$)

Megoldás:

$$x_{k+1} = x_k^2 + x_k - 5$$

	0	1	2	3	Konvergencia
x_k	2	1			
x_k	3	7			

Ujjgyakorlat 1.2(i)

Feladat: $f(x) = x^2 - 5$ gyöke fixpont iterációval ($x_0 = 2$ és $x_0 = 3$)

Megoldás:

$$x_{k+1} = x_k^2 + x_k - 5$$

	0	1	2	3	Konvergencia
x_k	2	1	-3		
x_k	3	7	51		

Ujjgyakorlat 1.2(i)

Feladat: $f(x) = x^2 - 5$ gyöke fixpont iterációval ($x_0 = 2$ és $x_0 = 3$)

Megoldás:

$$x_{k+1} = x_k^2 + x_k - 5$$

	0	1	2	3	Konvergenca
x_k	2	1	-3	1	$\Rightarrow$ oszcillál
x_k	3	7	51	2647	$\Rightarrow$ divergál

Ujjgyakorlat 1.2(ii)

Feladat: $f(x) = x^2 - 5$ gyöke Newton iterációval ($x_0 = 2$ és $x_0 = 3$)

Megoldás:

$$f'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 5}{2x_k}$$

	0	1	2	3	Konvergencia
x_k	2				
x_k	3				

Ujjgyakorlat 1.2(ii)

Feladat: $f(x) = x^2 - 5$ gyöke Newton iterációval ($x_0 = 2$ és $x_0 = 3$)
Megoldás:

$$f'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 5}{2x_k}$$

	0	1	2	3	Konvergencia
x_k	2	2.25			
x_k	3	2.333			

Ujjgyakorlat 1.2(ii)

Feladat: $f(x) = x^2 - 5$ gyöke Newton iterációval ($x_0 = 2$ és $x_0 = 3$)
Megoldás:

$$f'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 5}{2x_k}$$

	0	1	2	3	Konvergencia
x_k	2	2.25	2.236		
x_k	3	2.333	2.238		

Ujjgyakorlat 1.2(ii)

Feladat: $f(x) = x^2 - 5$ gyöke Newton iterációval ($x_0 = 2$ és $x_0 = 3$)
Megoldás:

$$f'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 5}{2x_k}$$

	0	1	2	3	Konvergencia
x_k	2	2.25	2.236	2.236	$\Rightarrow$ konvergál
x_k	3	2.333	2.238	2.236	$\Rightarrow$ konvergál

Ujjgyakorlat 1.3

Feladat: $f(x) = x^2 - 5$ gyöke metszővonallal ($x_0 = 2$, $x_1 = 3$)

Megoldás:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_{k-1} - x_k}{f(x_{k-1}) - f(x_k)} f(x_k)$$

	0	1	2	3	4
x_k	2				
$f(x_k)$	-1				

Ujjgyakorlat 1.3

Feladat: $f(x) = x^2 - 5$ gyöke metszővonallal ($x_0 = 2$, $x_1 = 3$)

Megoldás:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_{k-1} - x_k}{f(x_{k-1}) - f(x_k)} f(x_k)$$

	0	1	2	3	4
x_k	2	3			
$f(x_k)$	-1	4			

Ujjgyakorlat 1.3

Feladat: $f(x) = x^2 - 5$ gyöke metszővonallal ($x_0 = 2$, $x_1 = 3$)

Megoldás:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_{k-1} - x_k}{f(x_{k-1}) - f(x_k)} f(x_k)$$

	0	1	2	3	4
x_k	2	3	2.2		
$f(x_k)$	-1	4	-0.16		

Ujjgyakorlat 1.3

Feladat: $f(x) = x^2 - 5$ gyöke metszővonallal ($x_0 = 2$, $x_1 = 3$)

Megoldás:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_{k-1} - x_k}{f(x_{k-1}) - f(x_k)} f(x_k)$$

	0	1	2	3	4
x_k	2	3	2.2	2.231	
$f(x_k)$	-1	4	-0.16	-0.023	

Ujjgyakorlat 1.3

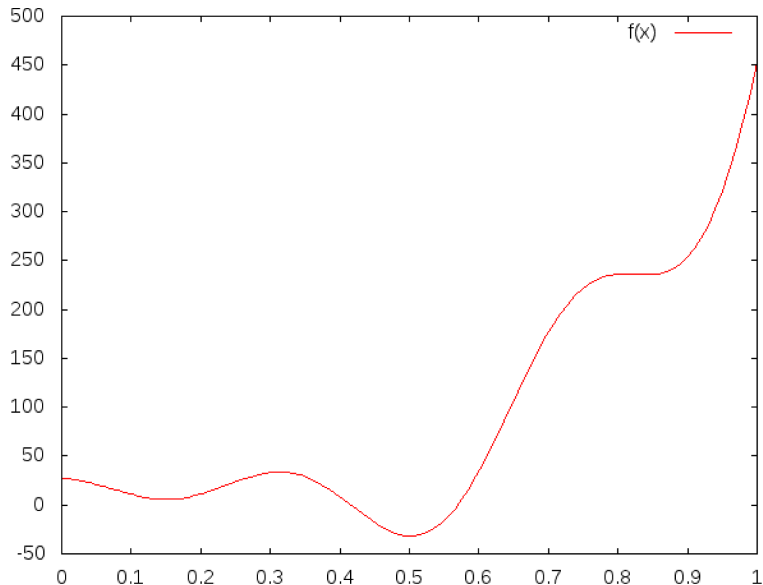
Feladat: $f(x) = x^2 - 5$ gyöke metszővonallal ($x_0 = 2$, $x_1 = 3$)

Megoldás:

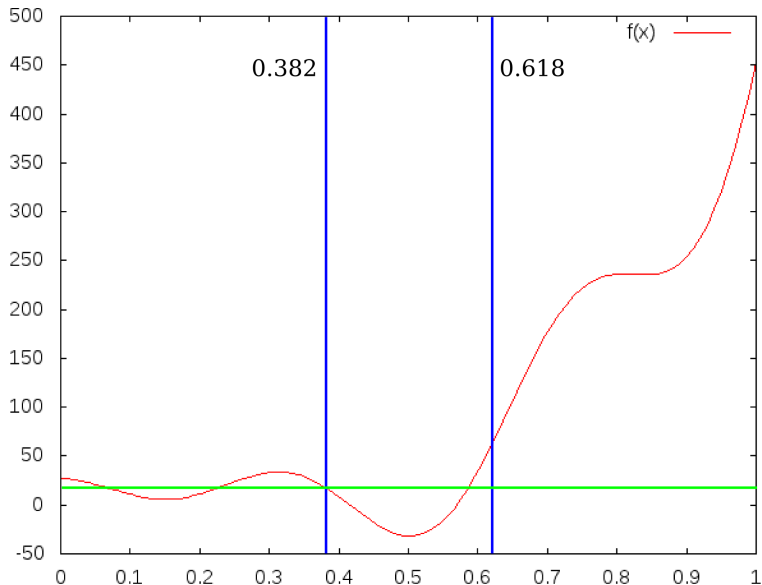
$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_{k-1} - x_k}{f(x_{k-1}) - f(x_k)} f(x_k)$$

	0	1	2	3	4
x_k	2	3	2.2	2.231	2.236
$f(x_k)$	-1	4	-0.16	-0.023	0

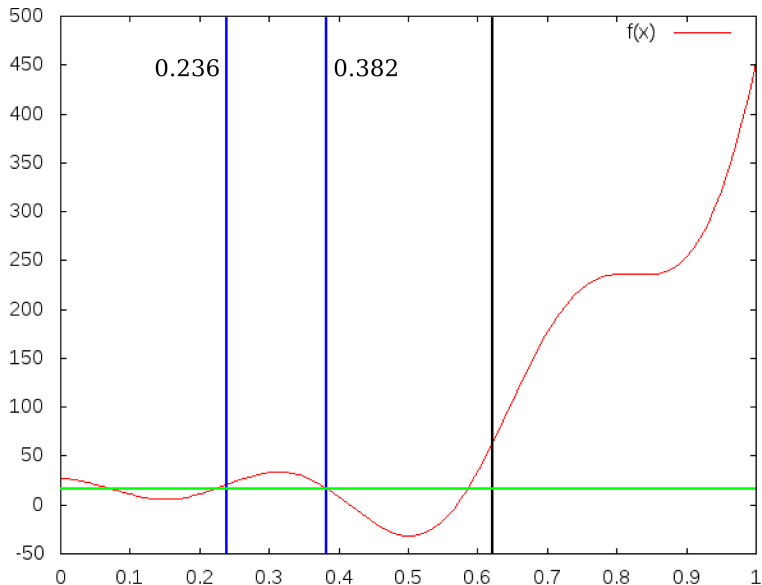
Ujjgyakorlat 2 – feladat



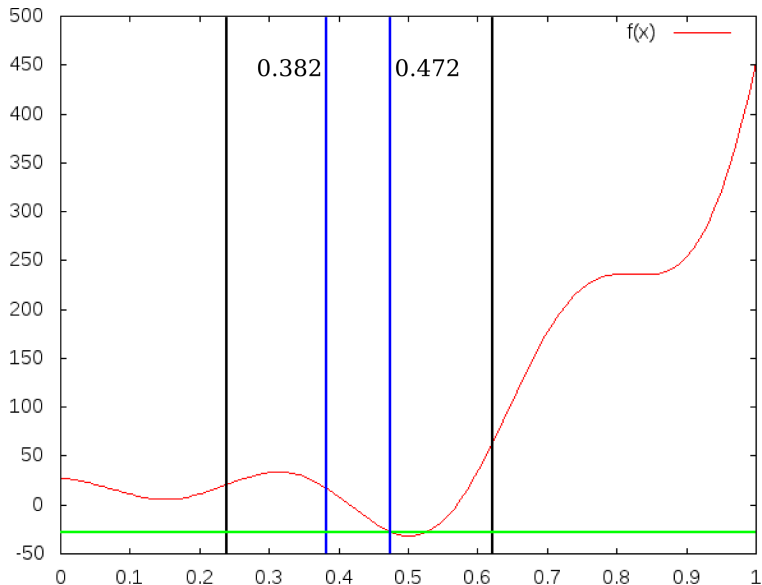
Ujjgyakorlat 2 – 1. iteráció



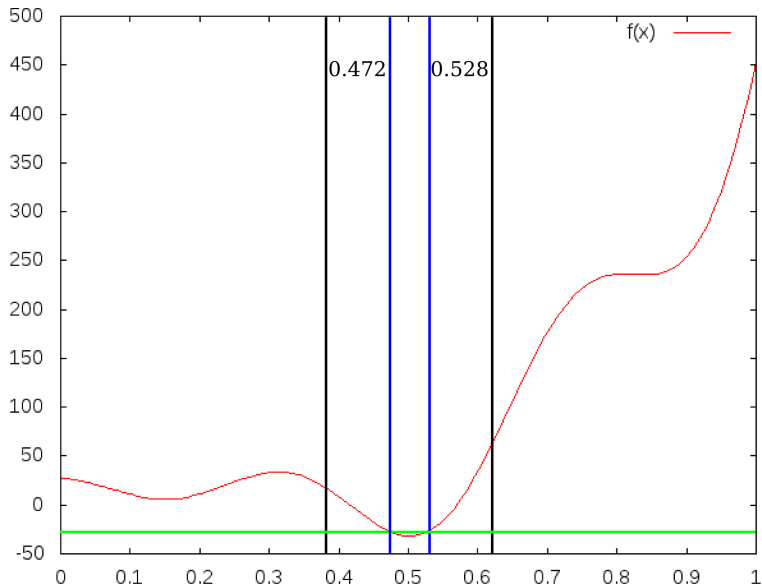
Ujjgyakorlat 2 – 2. iteráció



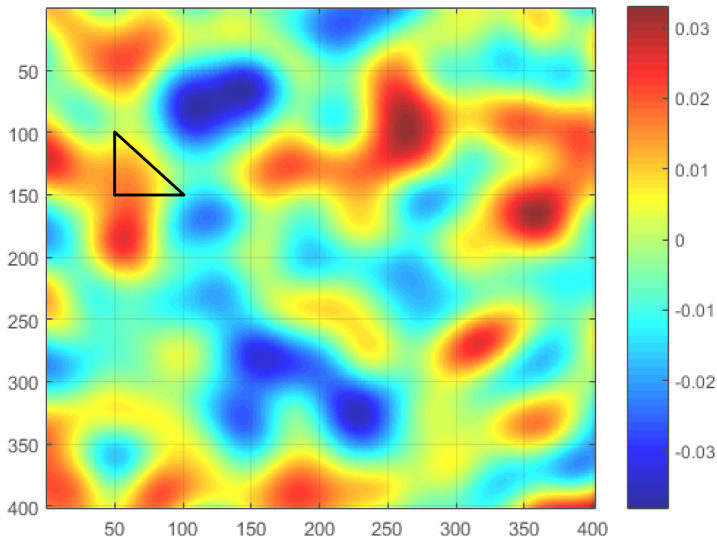
Ujjgyakorlat 2 – 3. iteráció



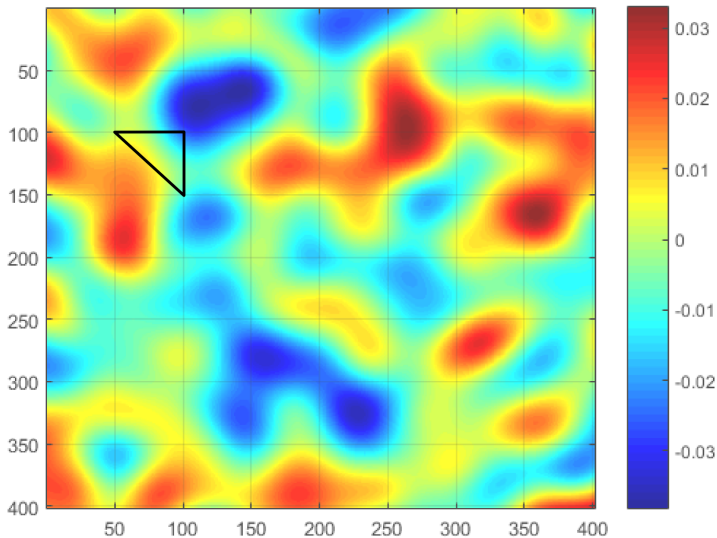
Ujjgyakorlat 2 – 4. iteráció



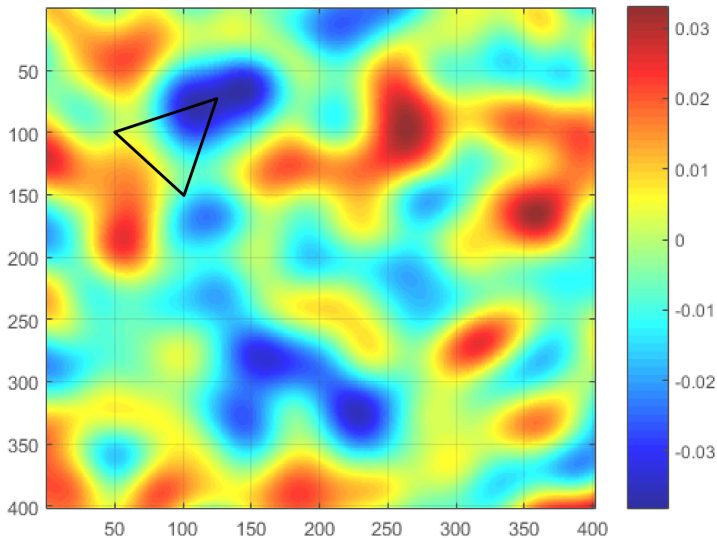
Ujjgyakorlat 3(a) – feladat



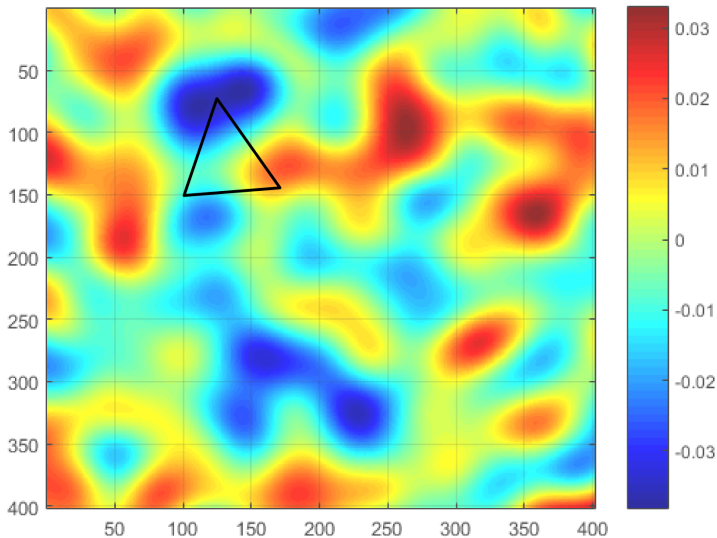
Ujjgyakorlat 3(a) – 1. iteráció



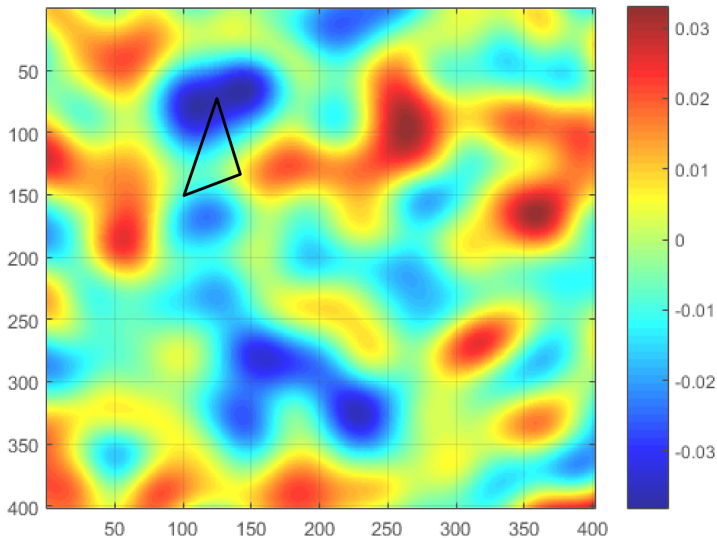
Ujjgyakorlat 3(a) – 1. iteráció



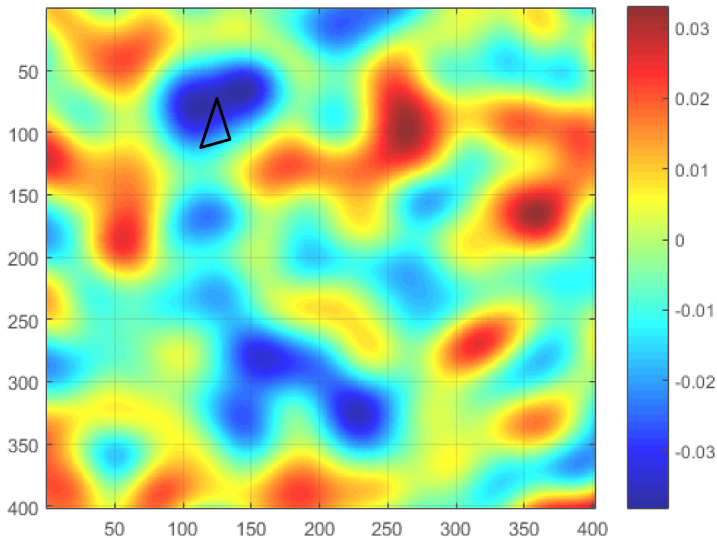
Ujjgyakorlat 3(a) – 2. iteráció



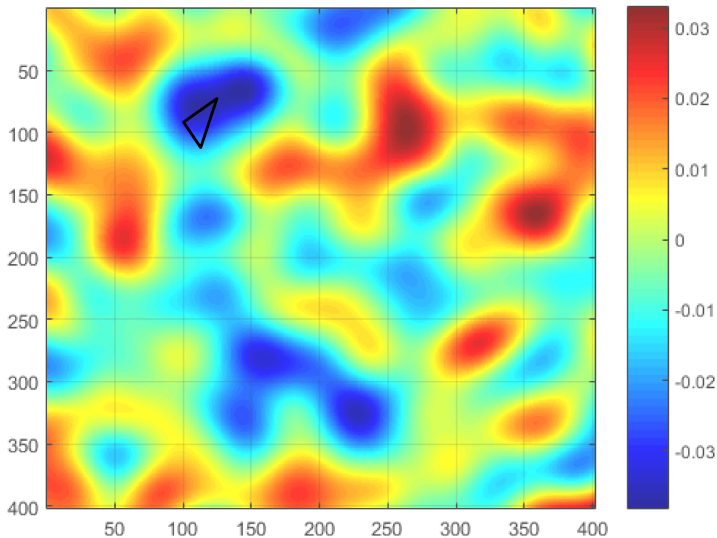
Ujjgyakorlat 3(a) – 2. iteráció



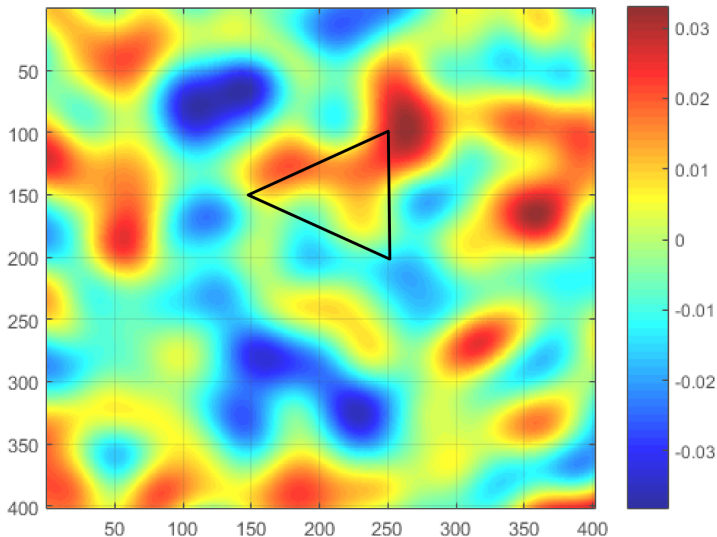
Ujjgyakorlat 3(a) – 2. iteráció



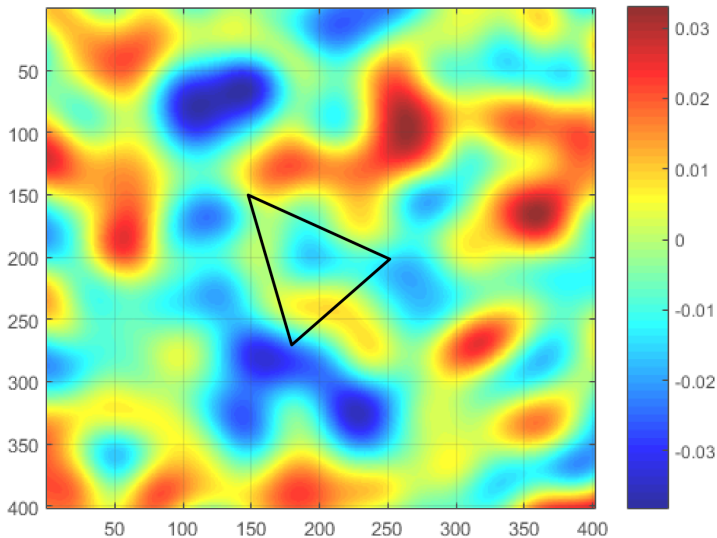
Ujjgyakorlat 3(a) – 3. iteráció



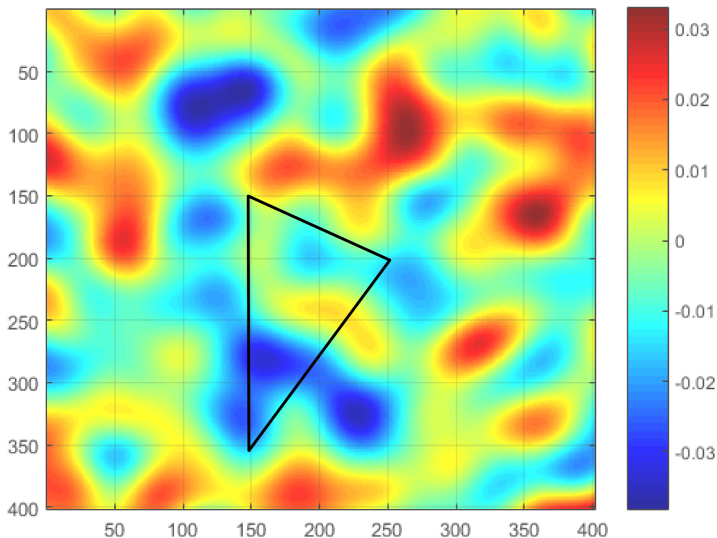
Ujjgyakorlat 3(b) – feladat



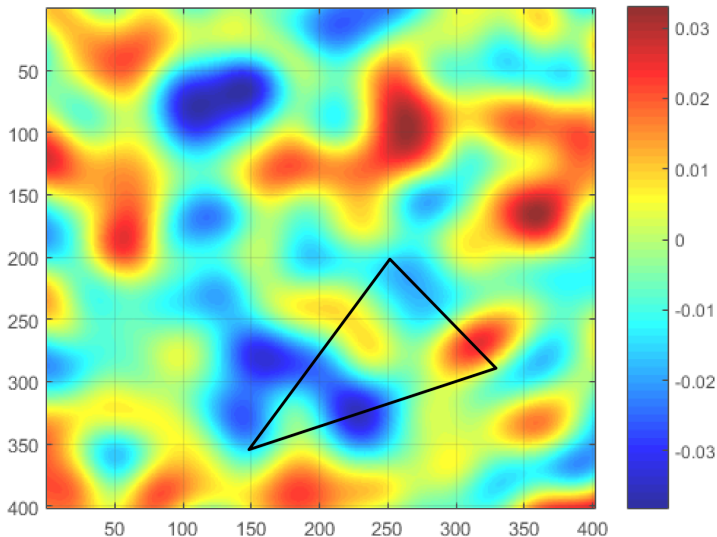
Ujjgyakorlat 3(b) – 1. iteráció



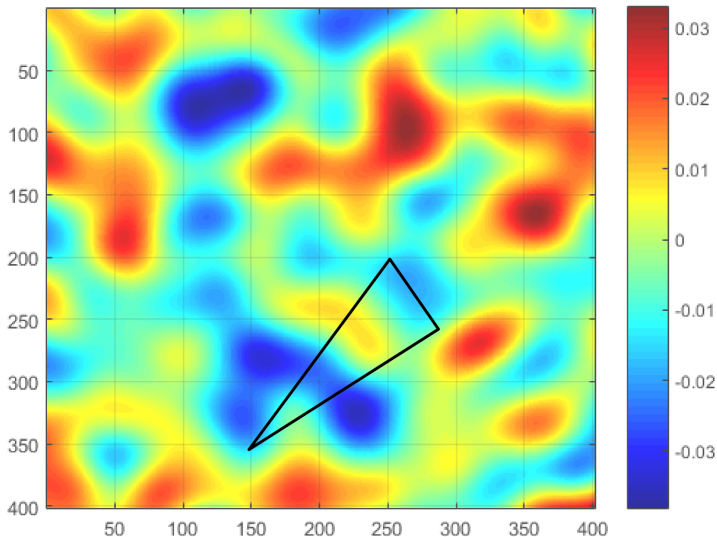
Ujjgyakorlat 3(b) – 1. iteráció



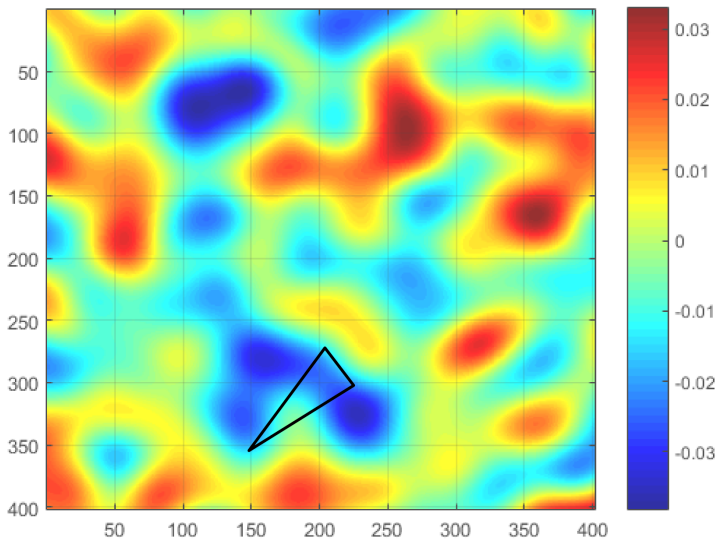
Ujjgyakorlat 3(b) – 2. iteráció



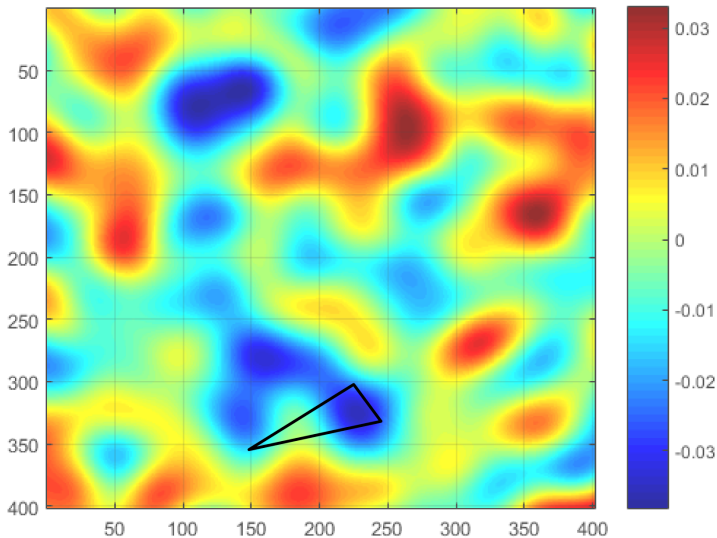
Ujjgyakorlat 3(b) – 2. iteráció



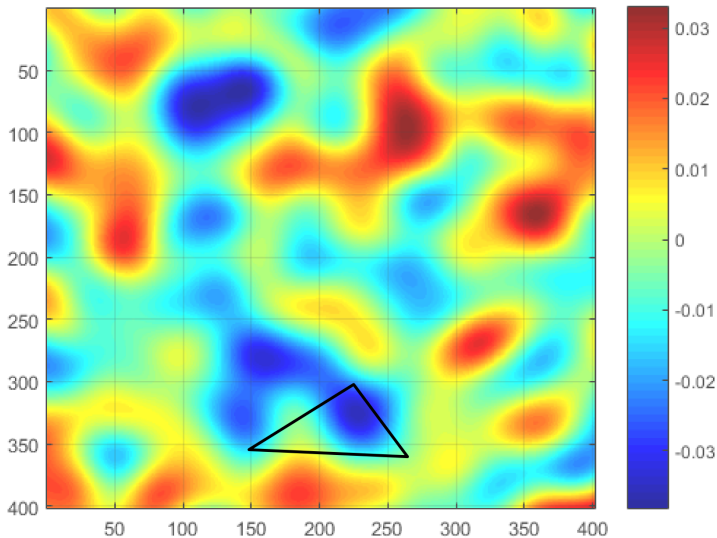
Ujjgyakorlat 3(b) – 2. iteráció



Ujjgyakorlat 3(b) – 3. iteráció



Ujjgyakorlat 3(b) – 3. iteráció



Ujjgyakorlat 4

Feladat:

$$\begin{aligned}4y - 2z &\rightarrow \min \\2x - y - z &= 2 \\x^2 + y^2 &= 1\end{aligned}$$

Ujjgyakorlat 4

Feladat:

$$\begin{aligned}4y - 2z &\rightarrow \min \\2x - y - z &= 2 \\x^2 + y^2 &= 1\end{aligned}$$

Megoldás:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 4y - 2z - \lambda_1(2x - y - z - 2) - \lambda_2(x^2 + y^2 - 1)$$

Ujjgyakorlat 4

Feladat:

$$\begin{aligned}4y - 2z &\rightarrow \min \\2x - y - z &= 2 \\x^2 + y^2 &= 1\end{aligned}$$

Megoldás:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 4y - 2z - \lambda_1(2x - y - z - 2) - \lambda_2(x^2 + y^2 - 1)$$

Ez alapján

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = -2\lambda_1 - 2\lambda_2 x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 4 + \lambda_1 - 2\lambda_2 y = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = -2 + \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 2x - y - z - 2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_2} \mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Ujjgyakorlat 4

$$\lambda_1 = 2$$

$$x = -\lambda_1/\lambda_2 = -2/\lambda_2$$

$$y = (4 + \lambda_1)/(2\lambda_2) = 3/\lambda_2$$

$$z = 2x - y - 2 = -7/\lambda_2 - 2$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \lambda_2^2 = 4 + 9 \Rightarrow \lambda_2 = \pm\sqrt{13}$$

Ebből tehát

$$x = \mp 2/\sqrt{13}$$

$$y = \pm 3/\sqrt{13}$$

$$z = -2 \mp 7/\sqrt{13}$$

A minimum nyilván

$$4\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right) - 2\left(-2 + \frac{7}{\sqrt{13}}\right) \approx -3.211$$