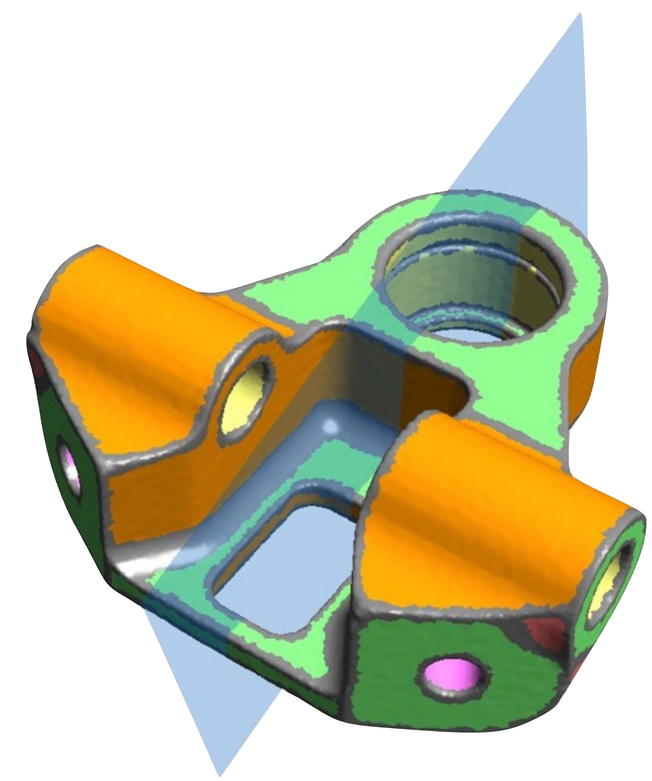
GÖRBÉK ÉS FELÜLETEK ILLESZTÉSE KÉNYSZEREKKEL II.

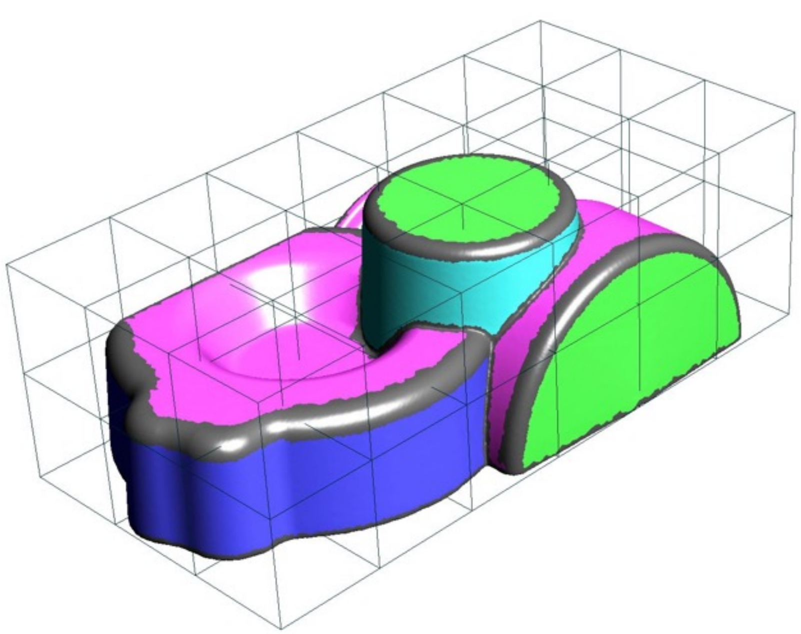
Érdekességek a geometriai modellezésben

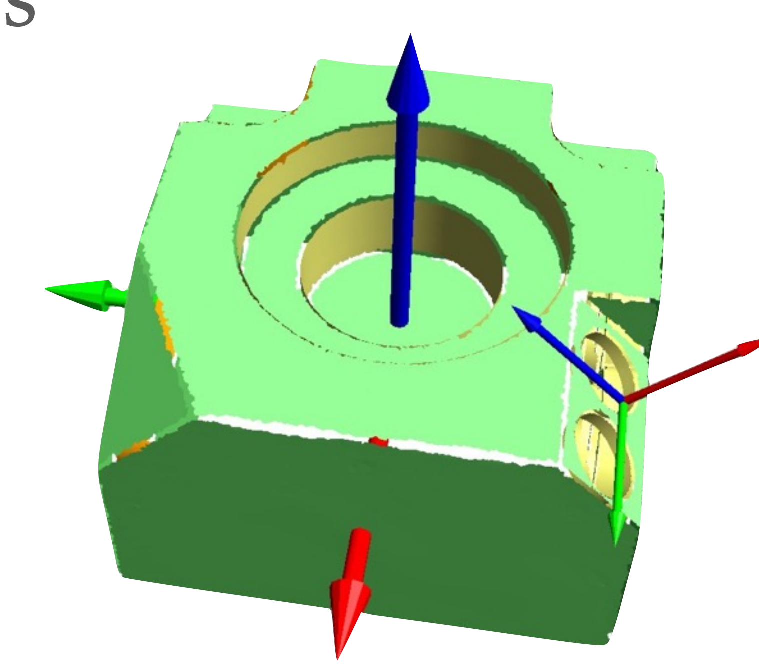
Kovács István

MIRŐL LESZ SZÓ?

- Kényszerek automatikus felismerése
  - 1. Lokális kényszerek (merőlegesség, párhuzamosság, stb.)
  - 2. Globális kényszerek
    - 2.1. Orientáció
    - 2.2. Szimmetria
    - 2.3. Rácsra illeszkedés

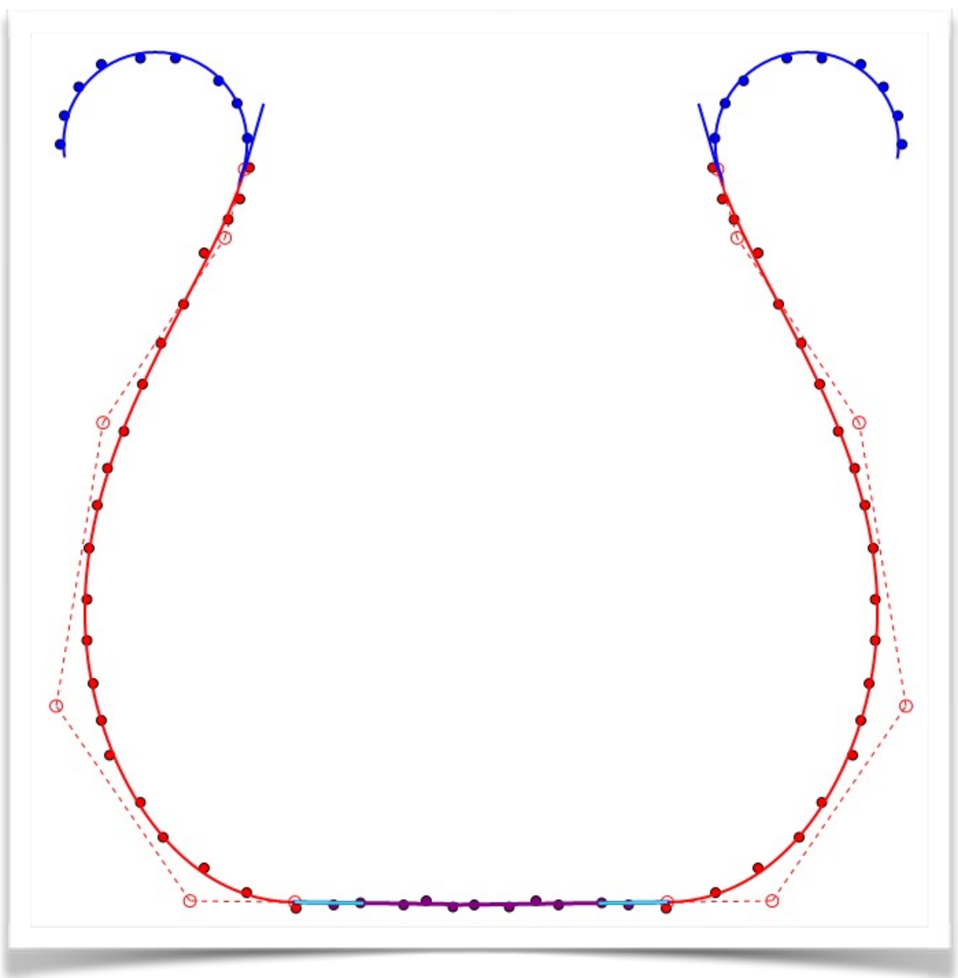


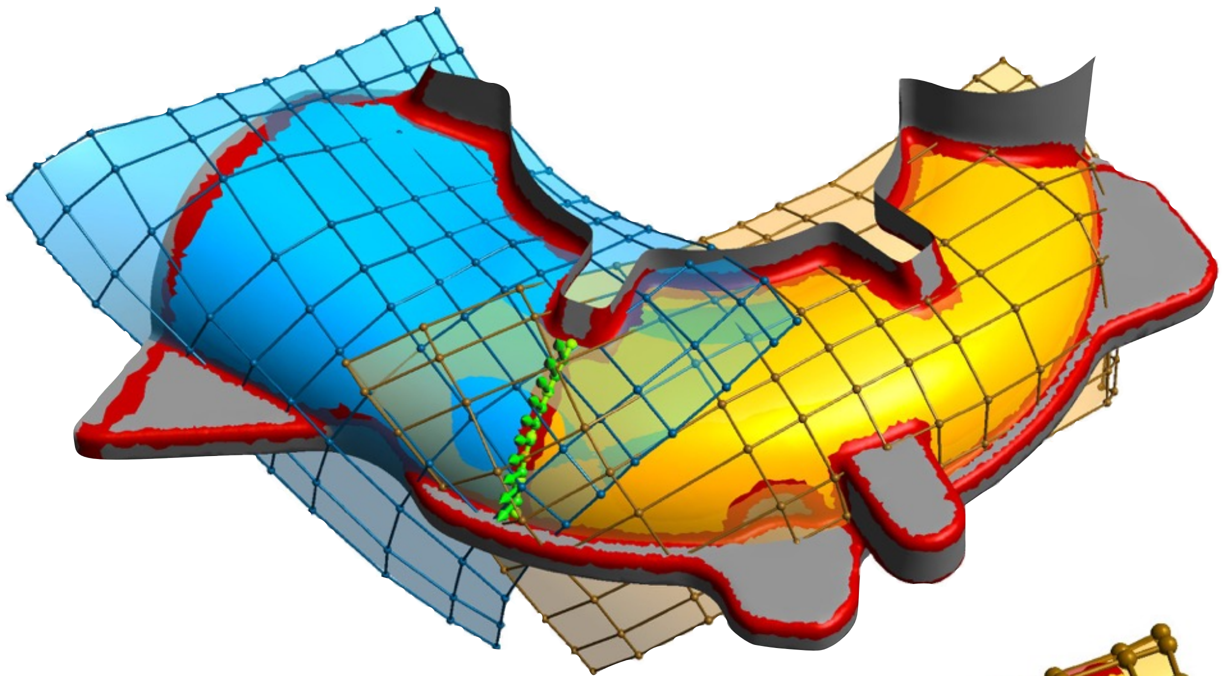


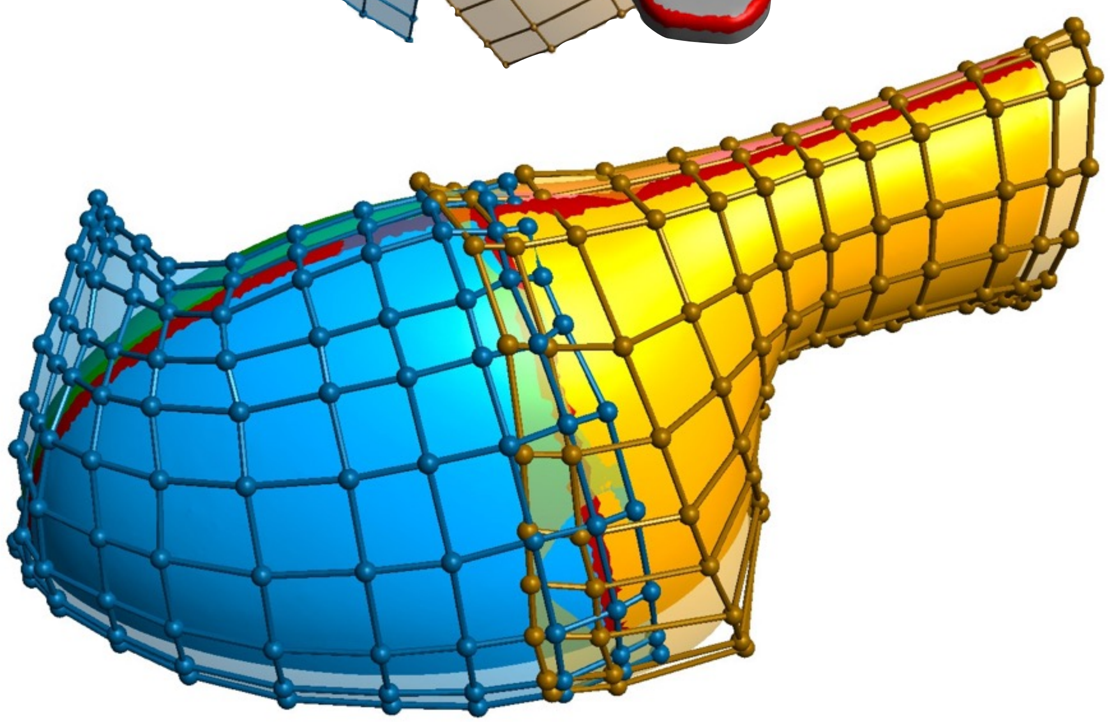


MIRŐL LESZ SZÓ?

- 3. Kényszeres illesztés szabadformájú elemekkel
  - 3.1. Görbék
  - 3.2. Felületek







1. LOKÁLIS KÉNYSZEREK FELISMERÉSE

- Célunk a **legvalószínűbb** kényszerek felismerése, és érvényesítése
- Minden illesztés után változnak az értékek, új kényszerek jöhetnek szóba
- **Dinamikus** megoldás kell
- **Toleranciaszintek** kellenek
- Megoldás: **módosított kényszeregyenletek** minden objektumpárhoz

$$s_\varepsilon(x) := \begin{cases} x & \text{ha } |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \qquad s_\varepsilon(c(x)) = 0$$

1. MIÉRT JÓK A MÓDOSÍTOTT EGYENLETEK?

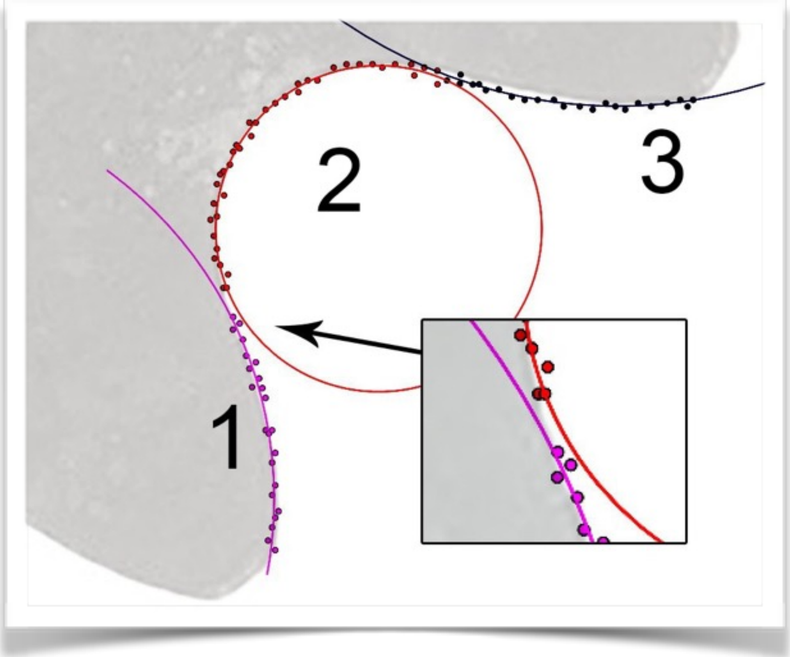
- Toleranciaszinten belül megegyezik az eredetivel, tehát **ugyanúgy hat**
- Toleranciaszinten kívül konstans 0, azaz **nincs hatása**
- Ha ezeket használjuk, az iteráció során **automatikusan** beállnak a kényszerek

$$s_\varepsilon(x) := \begin{cases} x & \text{ha } |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$s_\varepsilon(c(x)) = 0$$

1. LOKÁLIS KÉNYSZEREK FELISMERÉSE

- **Példa: fogaskerék**



- Három kör, egyenleteik:

$$F_i(x,y) = A_i(x^2+y^2) + B_i x + C_i y + D_i = 0$$

- Érintési kényszerek:

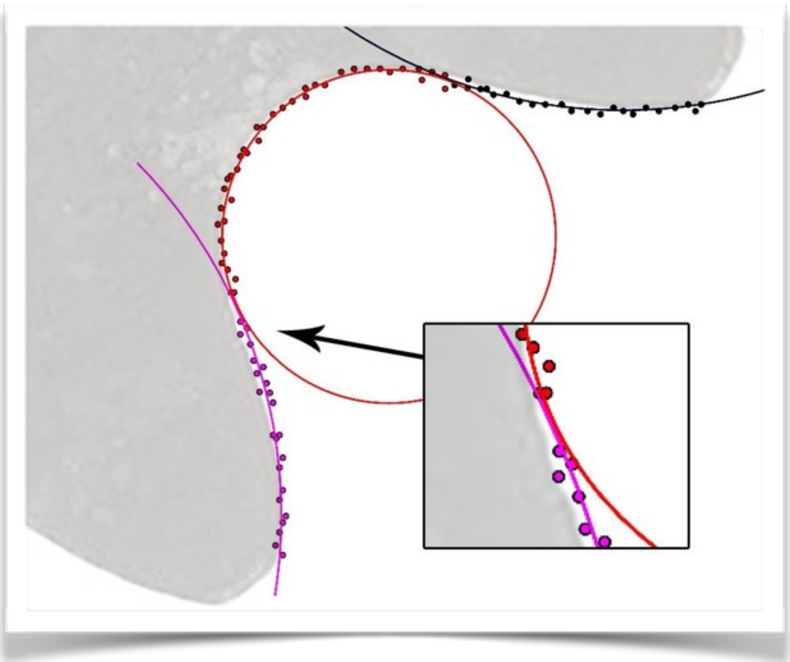
$$c_{i,j}(\mathbf{x}) = 2A_jD_i + 2A_iD_j - B_iB_j - C_iC_j \pm 1 = 0$$

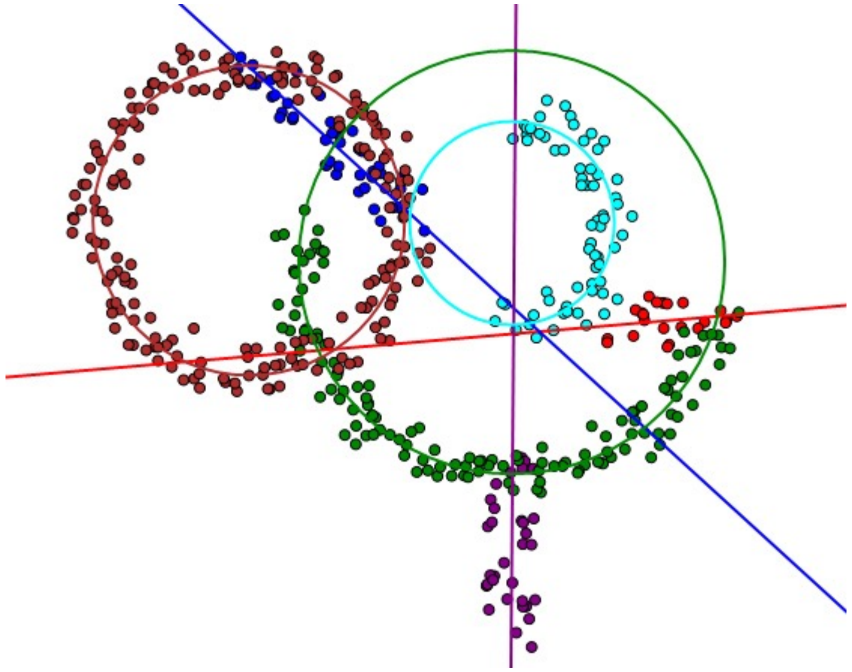
- Toleranciaszint: 5.0

$$c_{1,2}(\mathbf{x}) = 2.142 \rightarrow s_\varepsilon(c_{1,2}(\mathbf{x})) = 2.142$$

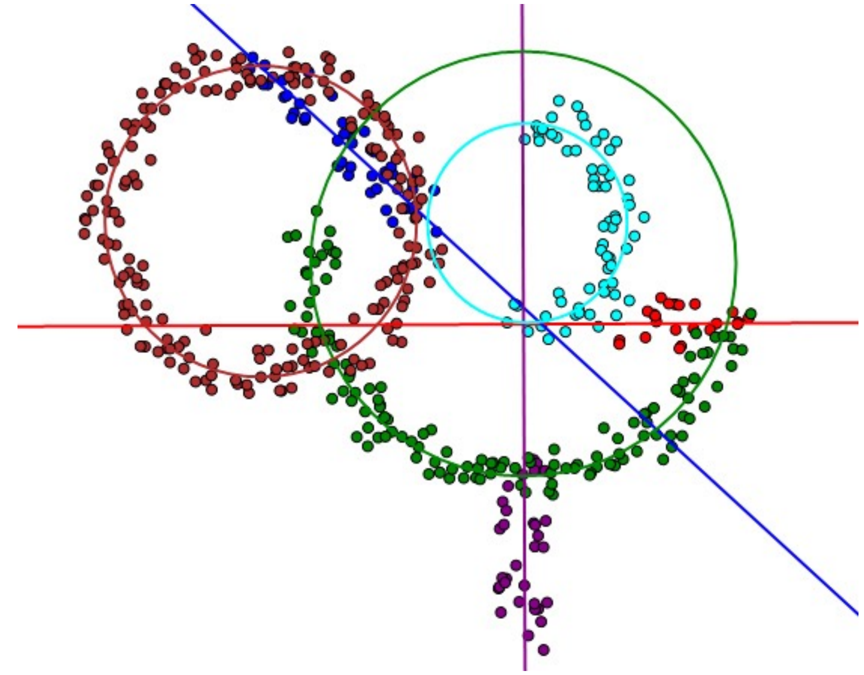
$$c_{1,3}(\mathbf{x}) = 134.925 \rightarrow s_\varepsilon(c_{1,3}(\mathbf{x})) = 0$$

$$c_{2,3}(\mathbf{x}) = 1.010 \rightarrow s_\varepsilon(c_{2,3}(\mathbf{x})) = 1.010$$

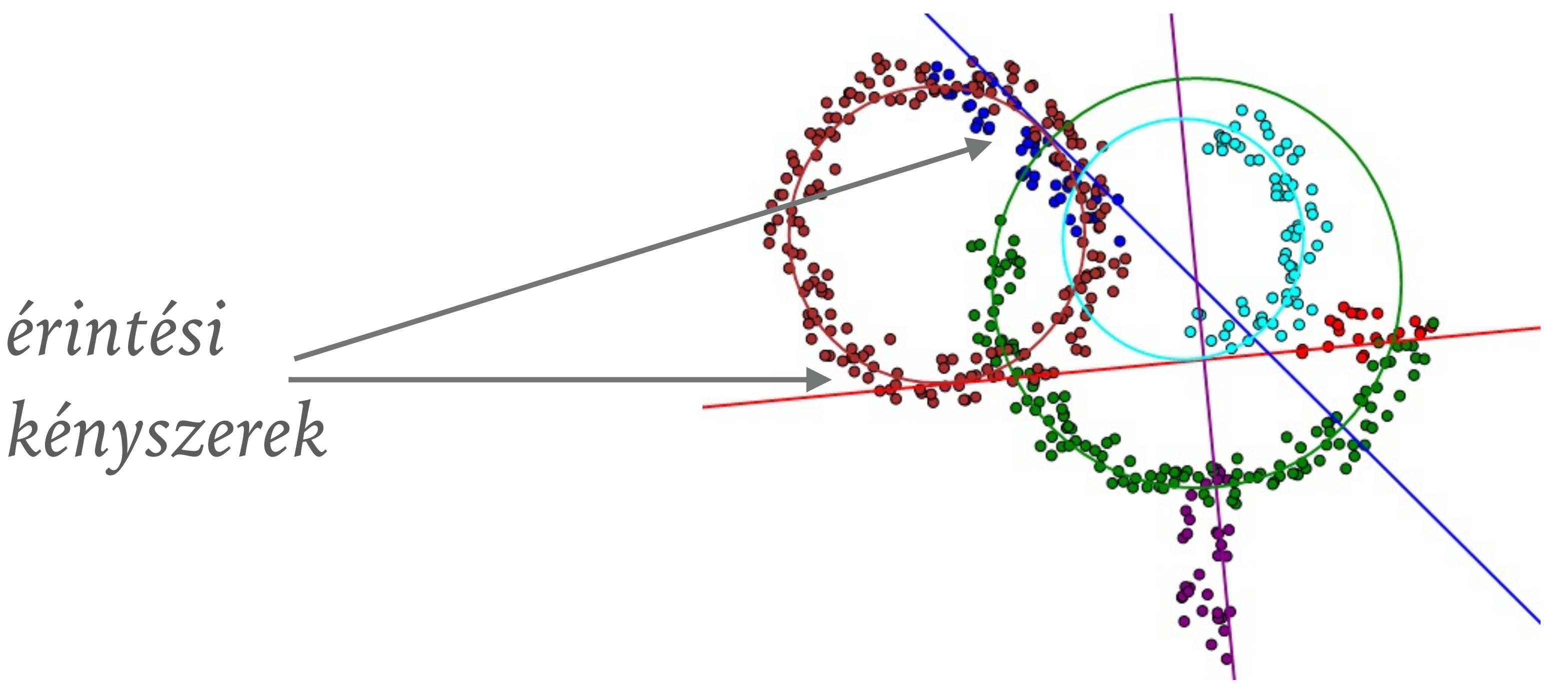




Kényszerek nélkül



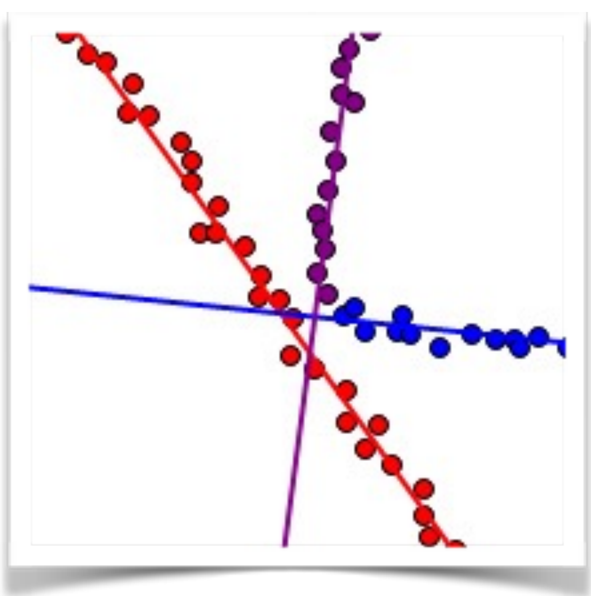
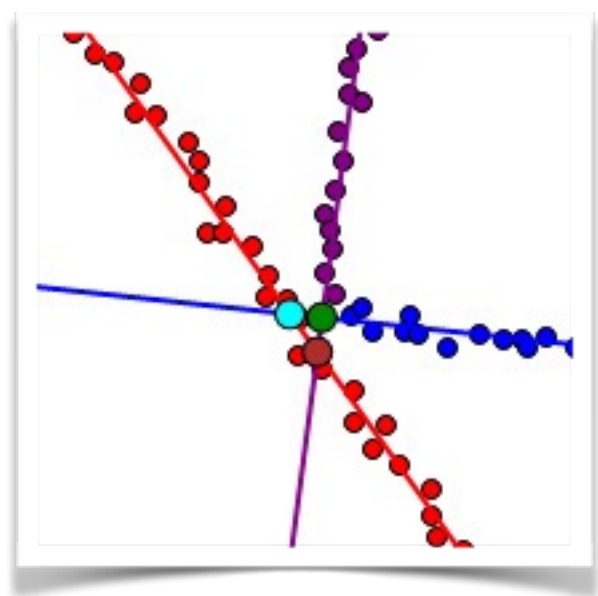
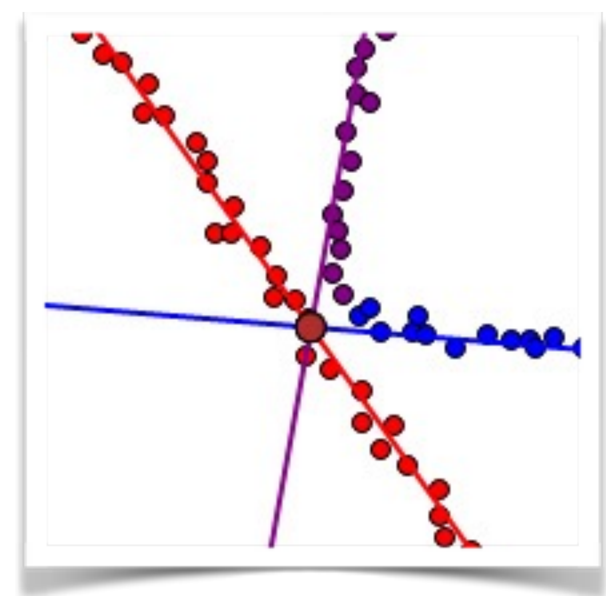
Felismert érintési és merőlegességi kényszerek



Erősebb toleranciaszintekkel

1. LOKÁLIS KÉNYSZEREK FELISMERÉSE

- Mi a helyzet az összetettebb lokális kényszerekkel?
- Segédobjektumok?
- **Nehéz feladat**, segédobjektumokat kell automatikusan felvenni

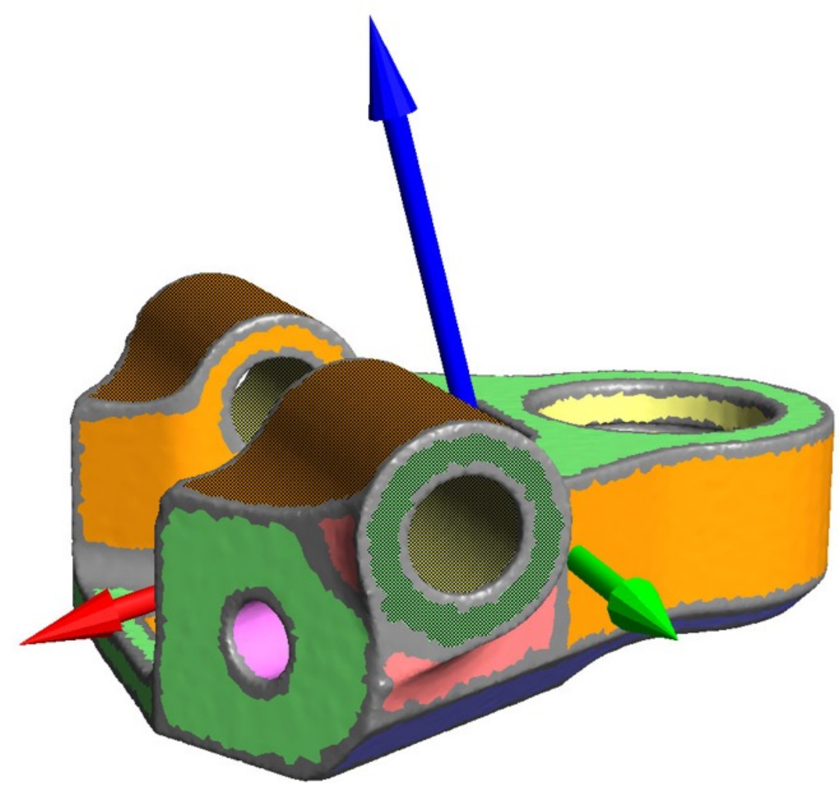
  

2. GLOBÁLIS KÉNYSZEREK FELISMERÉSE

- Felismerésük sokkal **nehezebb** a lokális kényszereknél
- A megfelelő kényszereket **meg kell találni**
- **Globális kényszerek**
  - 2.1. **Orientáció:** a modell megfelelő koordináta-rendszerbe helyezése
  - 2.2. **Szimmetriatengelyek/síkok**
  - 2.3. **Rácsra** illeszkedés

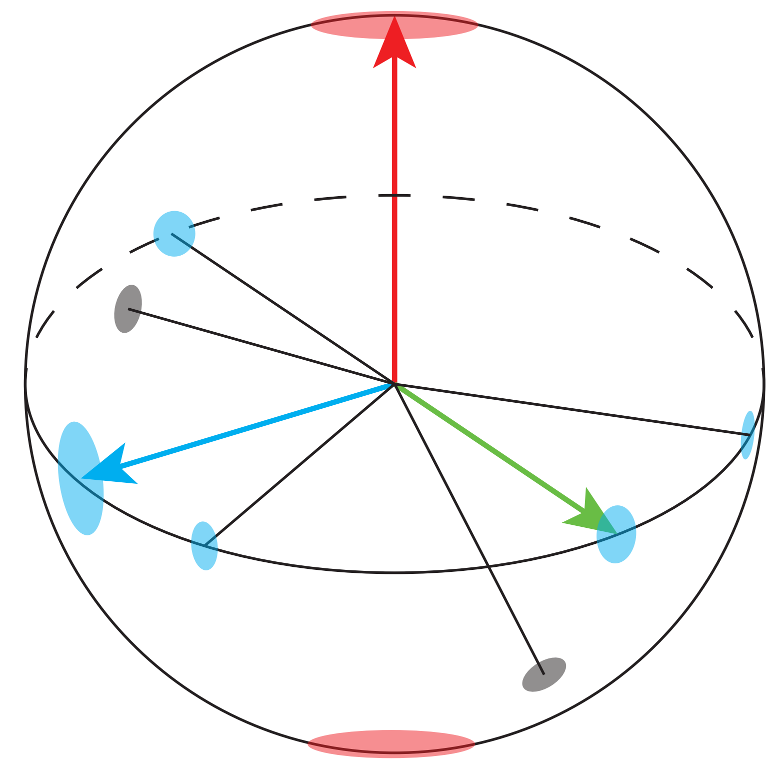
2.1. ORIENTÁCIÓ FELISMERÉSE

- Egy CAD modell szinte mindig egy jól definiált **koordináta-rendszerben** lett megtervezve
- A **mérés** során nyilvánvalóan nem ebbe a koordináta-rendszerbe van helyezve a modell
- A mérési adatok egyéb **pontatlanságot** is behozhatnak
- Feltételezzük, hogy **szegmentált** modellel van dolgunk, a régiókhoz tartozik koordináta-rendszer
- **Lokális** “kis” koordináta-rendszerek



2.1. ORIENTÁCIÓ MEGHATÁROZÁSA

- Minden szegmentált tartományhoz tartozik egy irány
  - Sík: normális
  - Henger, kúp, forgásfelület: tengely
  - Kihúzott felületek: kihúzási irány
- Jó orientáció: **X, Y, Z** irányban is erős
- Megoldás: **klaszterezés** az irányok között
- Legerősebb irányok **minősítése**
- Legerősebb klaszter: **globális** orientáció
- További klaszterek: **lokális** orientáció



2.1. ORIENTÁCIÓ MEGHATÁROZÁSA

➤ Az algoritmus lépései

1. d_i irányvektorok kigyűjtése, hozzájuk tartozó súly A_i
2. Klaszter növesztő algoritmus: minden C klaszterhez hozzárendelünk egy p vektort $p' = \sum_{d_i \in C} A_i d_i, \quad p = \frac{p'}{||p'||}$
3. Vesszük sorban az irányvektorokat, és toleranciaszinten belül *bevesszük* az egyik klaszterbe, vagy *új klasztert* hozunk létre
4. Elsődleges súlyozás (mennyi a p irányhoz tartozó összfelület?)

$$G(p) = \{i : |d_i \times p| < \varepsilon\}, \quad W_1(p) = \sum_{i \in G(p)} A_i.$$

2.1. ORIENTÁCIÓ MEGHATÁROZÁSA

5. Másodlagos súlyozás (mennyi a felületre merőleges klaszterek összsúlya?)

$$H(p) = \{k : |\langle p_k, p \rangle| < \varepsilon\}, \quad W_2(p) = \sum_{k \in H(p)} A_k$$

6. Sorba rendezés $W_1 + W_2$ szerint

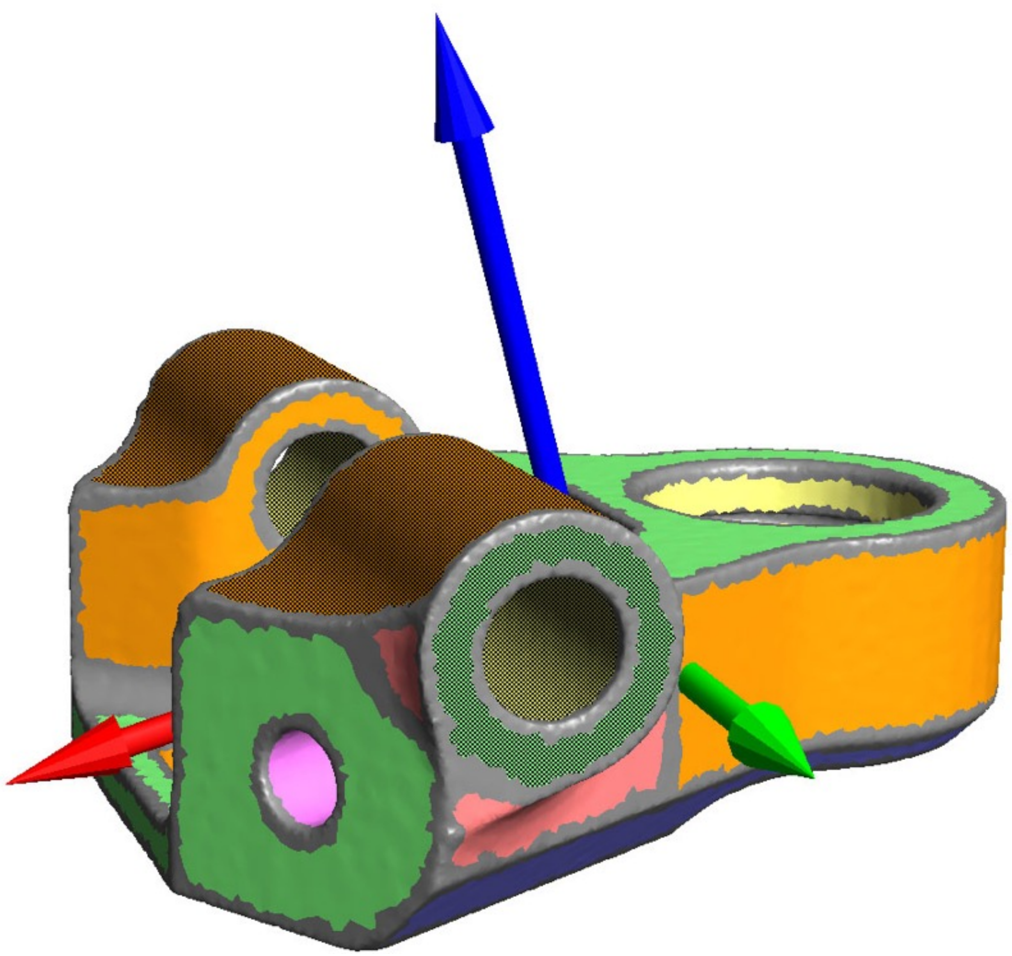
7. Harmadlagos súlyozás, merőleges klaszterek közül melyik a legerősebb?

$$L(p_k) = \{l : |\langle p_l, p_k \rangle| < \varepsilon, l \in H(n_z)\}, \quad W_3(p_k) = \sum_{l \in L(p_k)} A_l$$

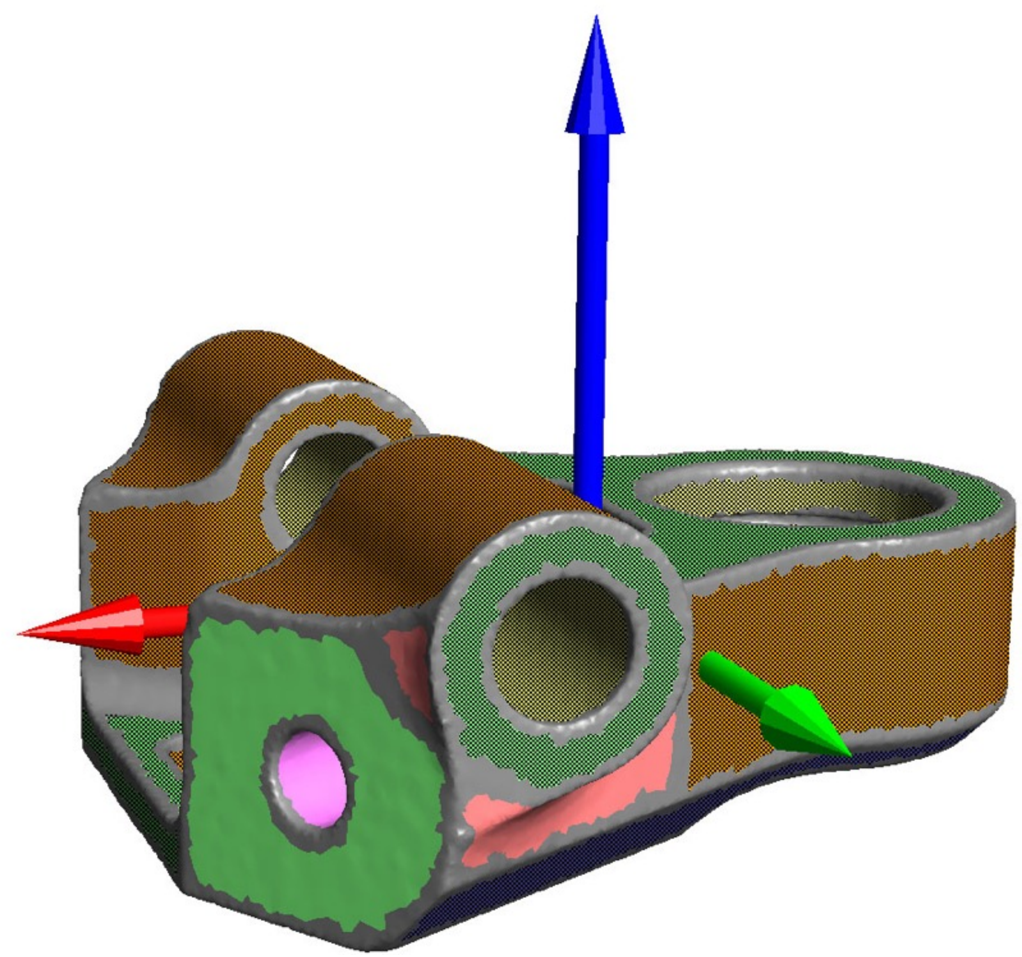
8. A legjobb klaszter: $W_1(p_k) + W_3(p_k) = max$

2.1. ORIENTÁCIÓ MEGHATÁROZÁSA

- **Kijelölt felületek:** az adott orientációhoz tartozó összes felület

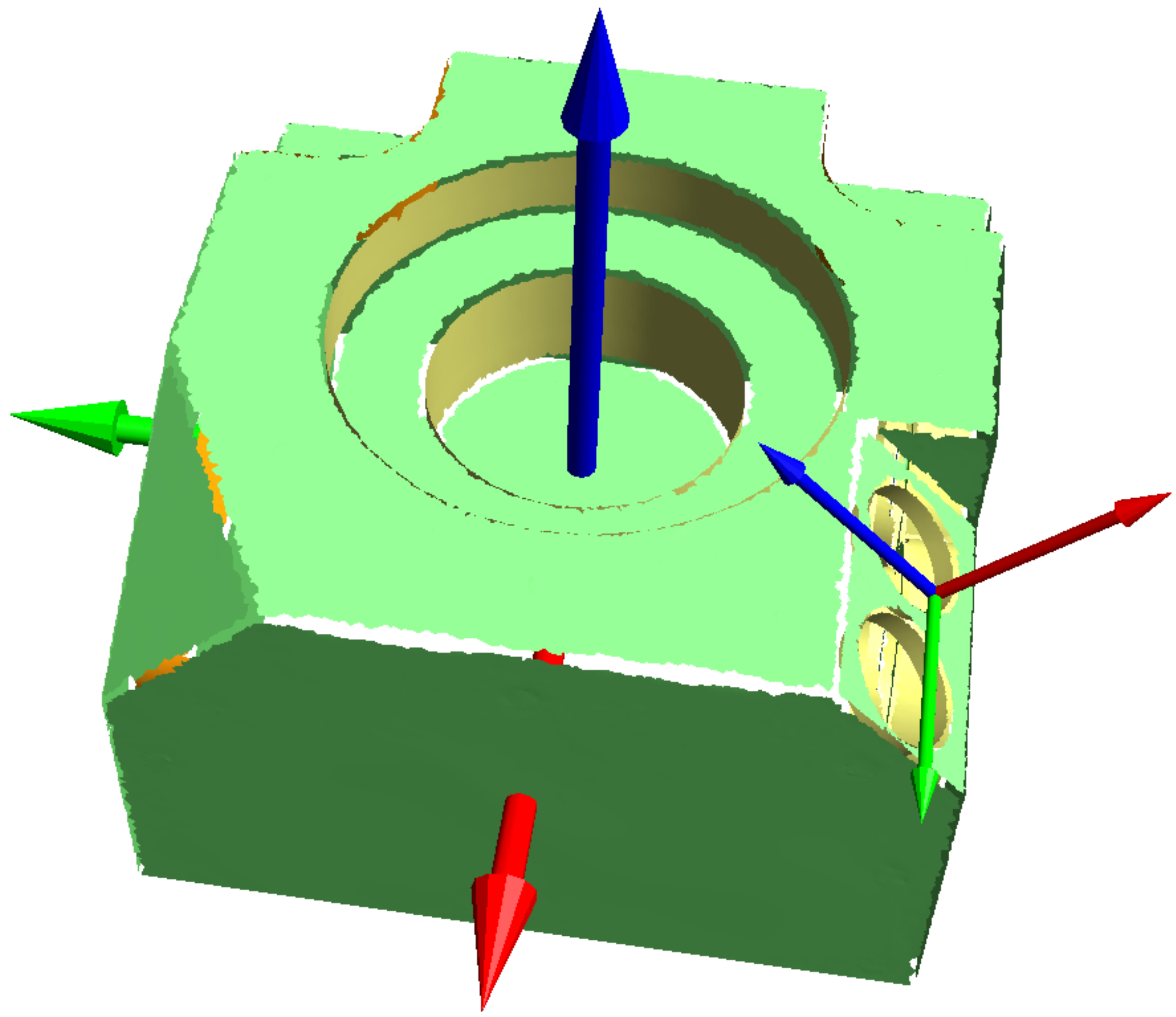


30%



86%

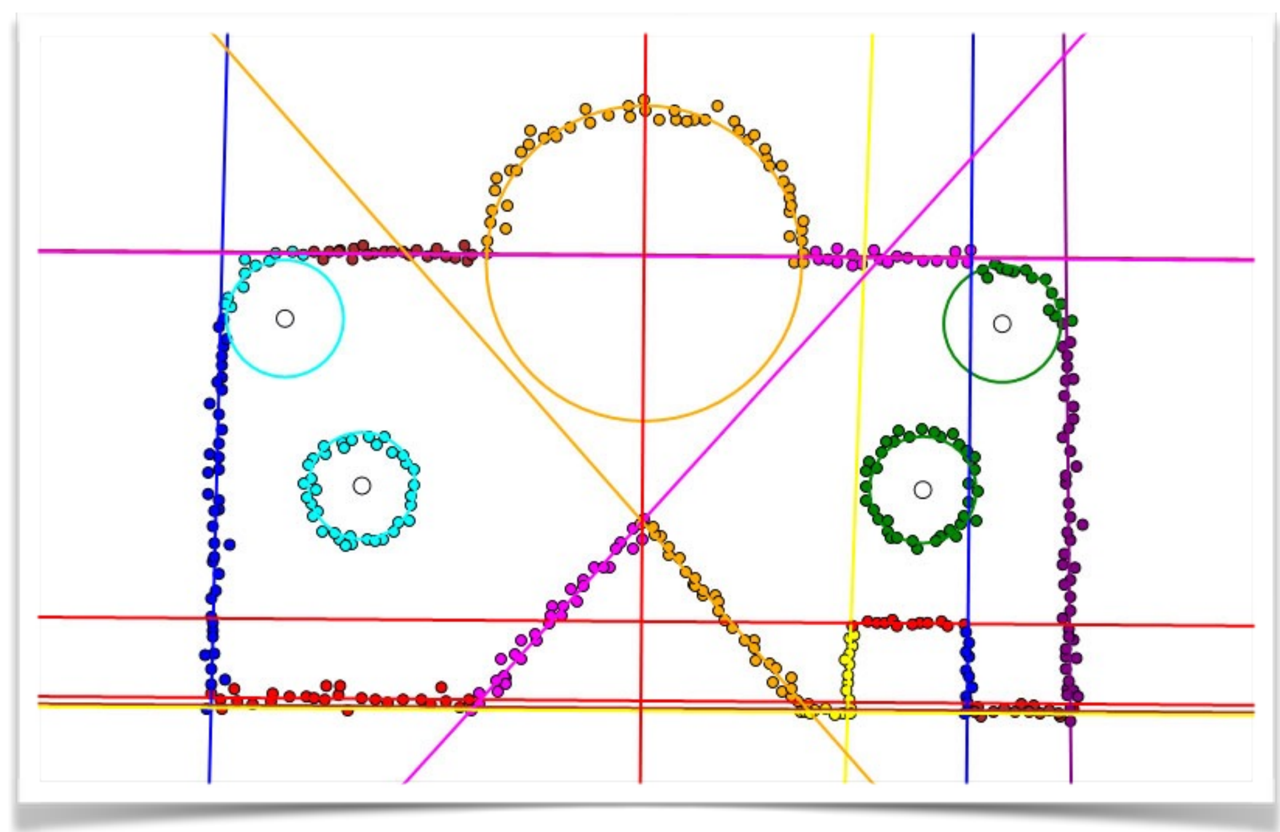
2.1. ORIENTÁCIÓ MEGHATÁROZÁSA



Globális és lokális orientáció

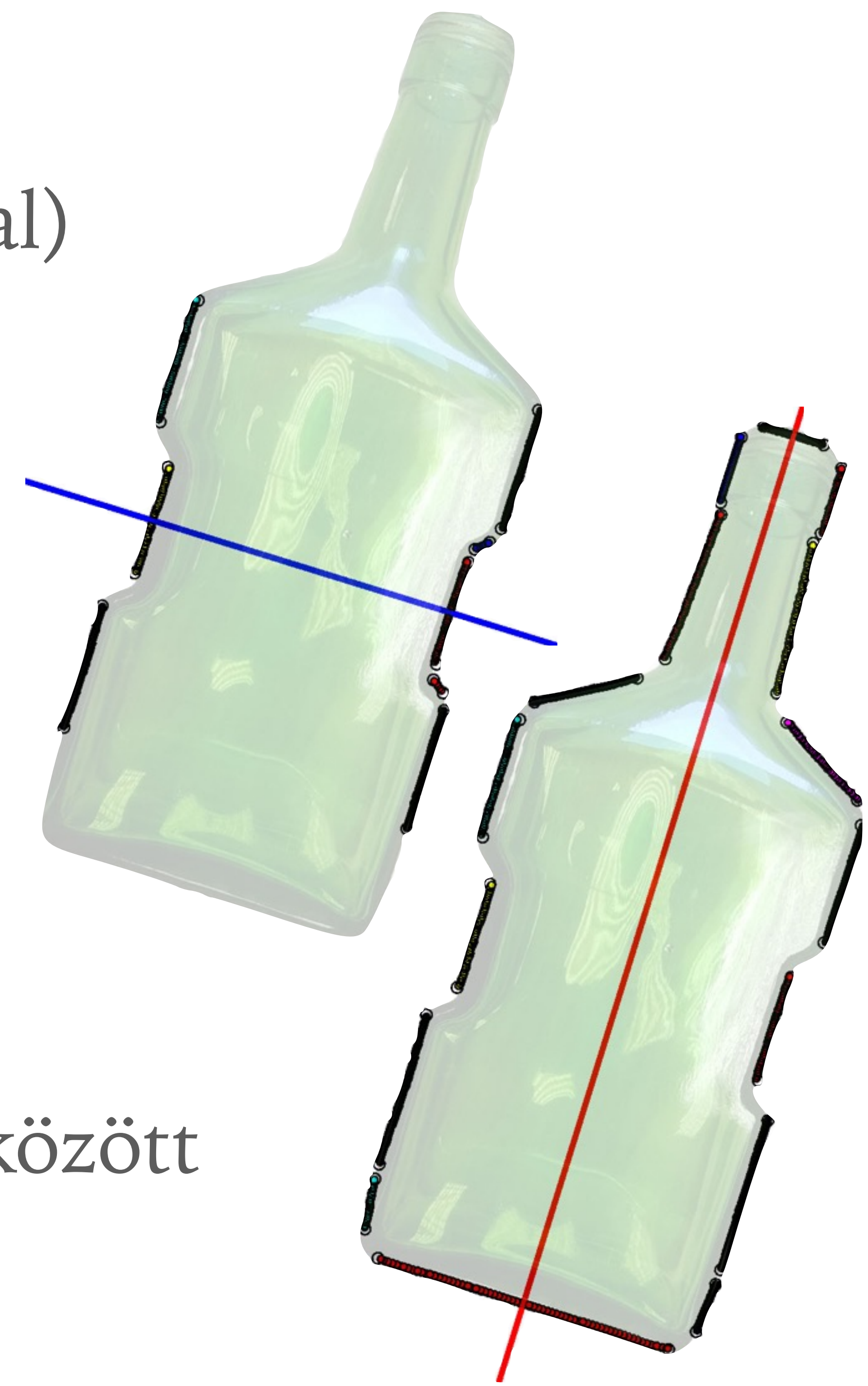
2.2. SZIMMETRIATENGELYEK/SÍKOK

- A CAD modellek általában valamilyen értelemben szimmetrikusak
- Ez lehet teljes, vagy részleges (nem tökéletes szimmetria, lokális hibák)
- Lokális részek is lehetnek szimmetrikusak
- Mért adatok miatt csak approximatív értelemben beszélhetünk szimmetriáról



2.2. SZIMMETRIATENGELYEK/SÍKOK

- **Feladat:** megkeresni a legjobb szimmetriatengelyt/síkot
- Mi alapján a legjobb?
  - Szimmetria mérték (lásd köv. oldal)
- **1.** l_i segédegyenesek/síkok (tippek)
  - Szakaszfelező merőlegesek
  - Szögfelező merőlegesek
  - 3D: tengelyek közötti felező sík
  - 3D: szögfelező síkok
- **2.** Klaszterezés az egyenesek/síkok között klaszternövesztéssel, mint korábban

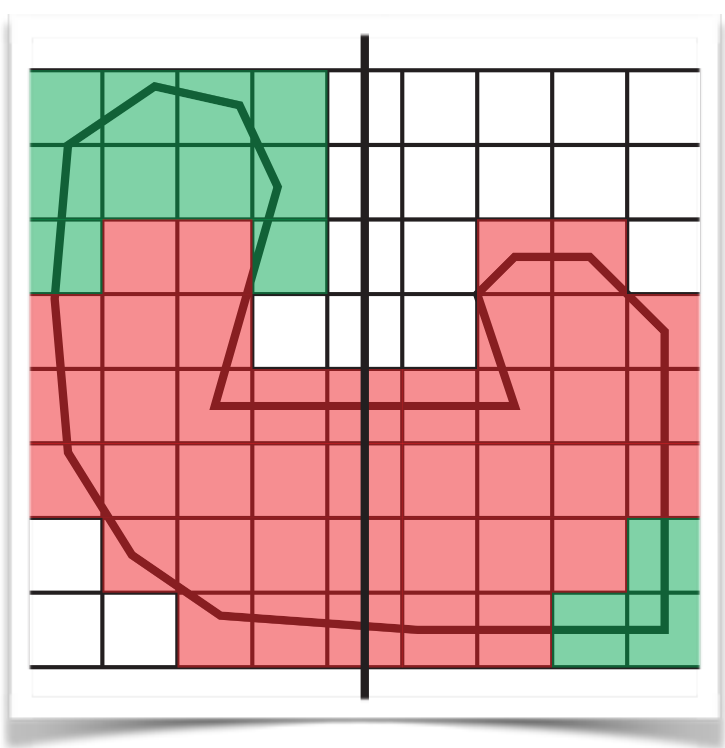


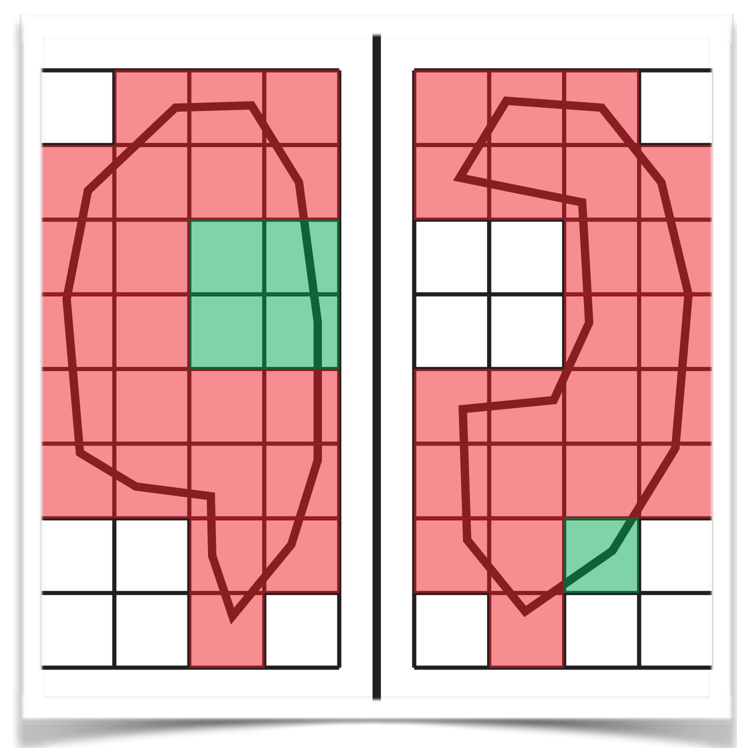
2.2. SZIMMETRIATENGELYEK/SÍKOK

3. Klaszterek kiértékelése: minden klaszterhez hozzárendelünk egy átlagos *P* egyenest (v. síkot), és meghatározzuk a szimmetria mértékét

$$\frac{2Area(s_1 \cap P(s_2))}{Area(s_1) + Area(s_2)}$$

Ez 3D-ben nehezebb: kiértékelés bitmap alapján, és lehet önszimmetria is

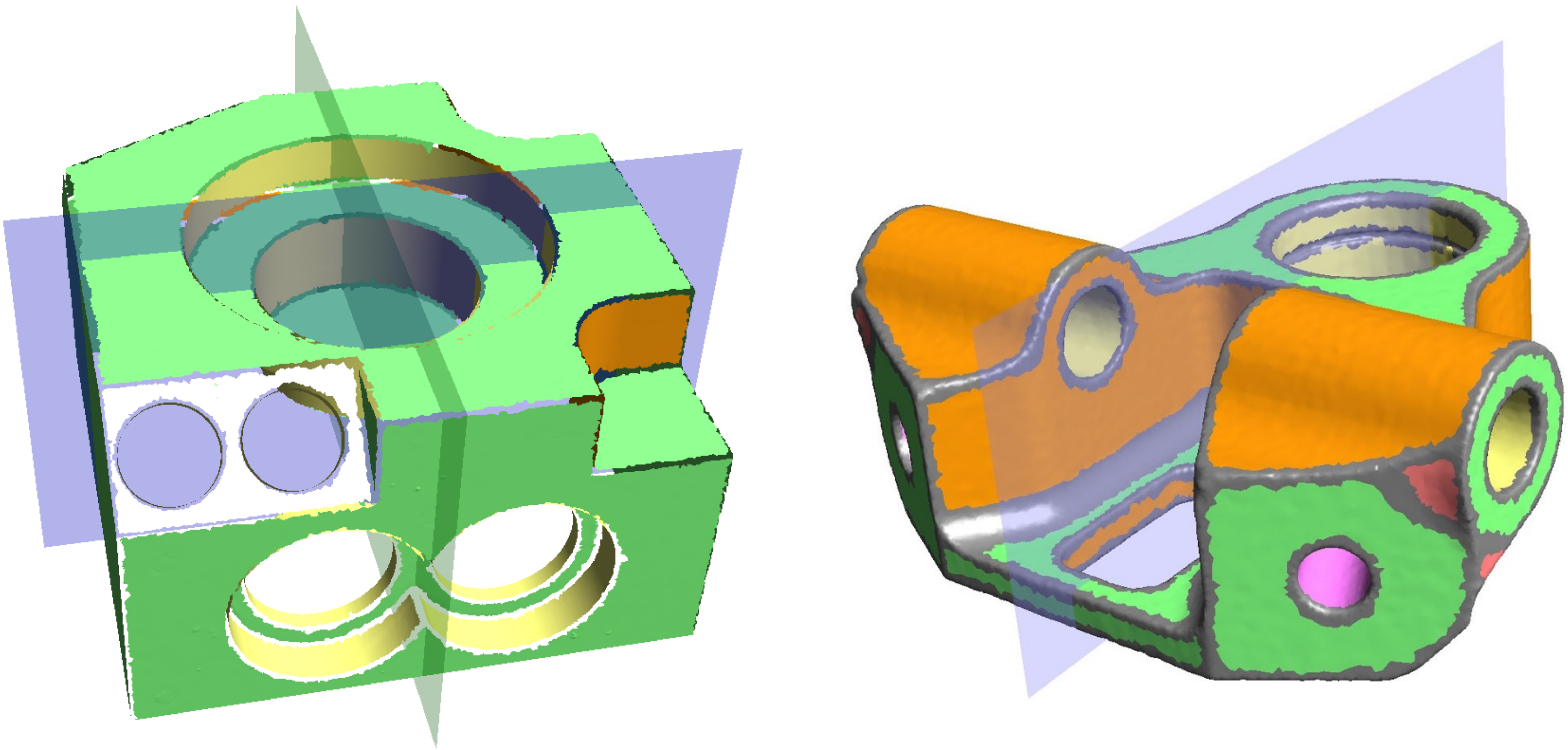




2.2. SZIMMETRIATENGELYEK/SÍKOK

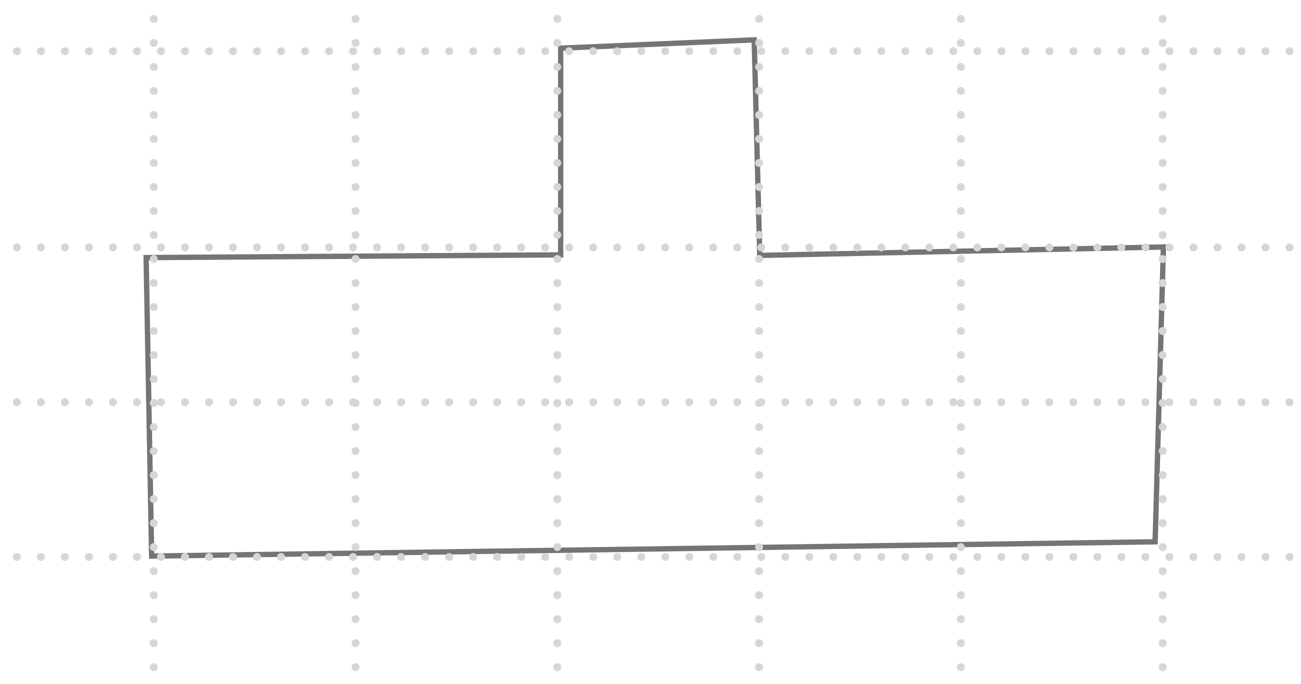
- Példa: a modell a feketével jelölt síkhoz tartozó szimmetrikus része piros

2.2. SZIMMETRIATENGELYEK/SÍKOK

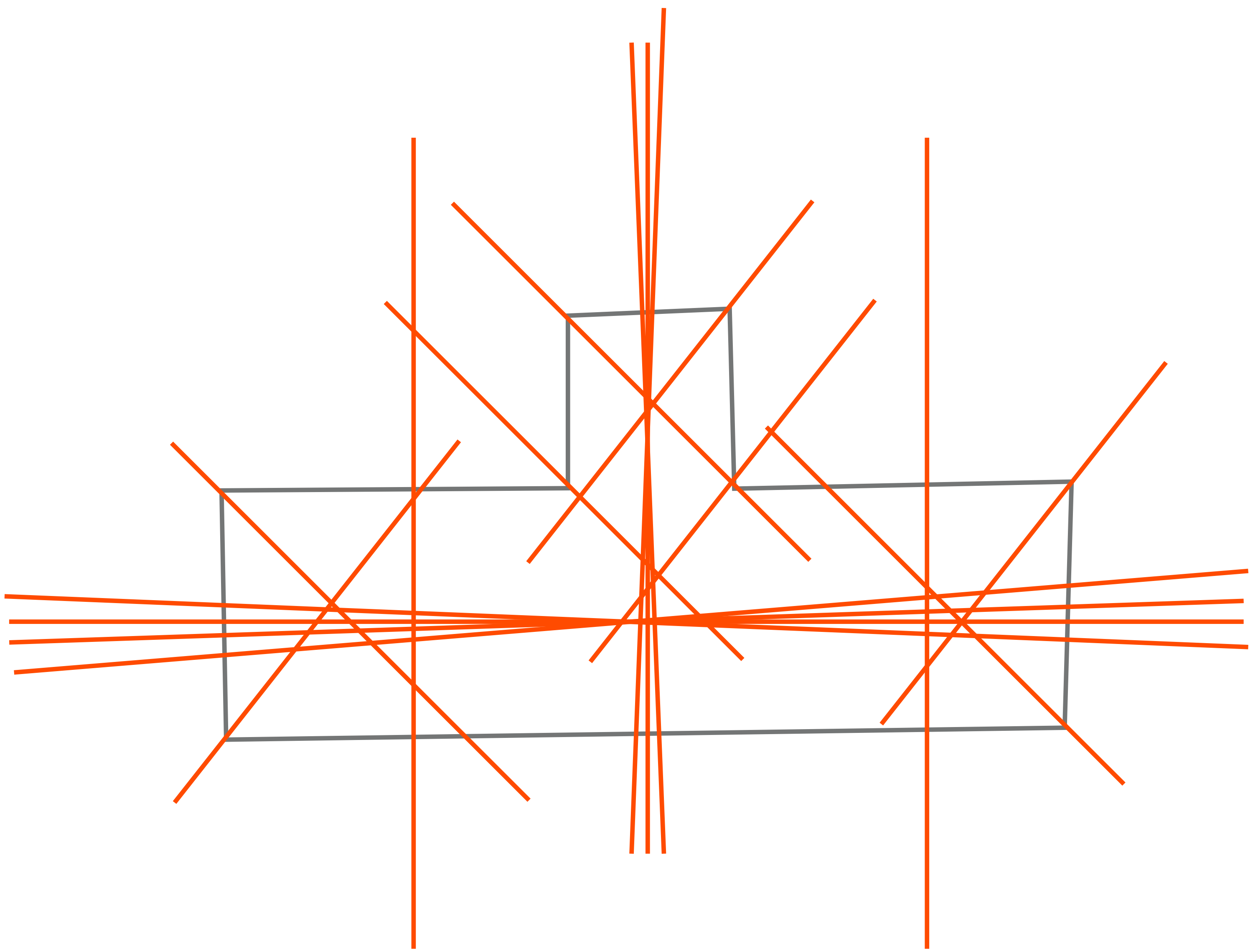


2.2. UJJGYAKORLAT - SZIMMETRIA KERESÉS

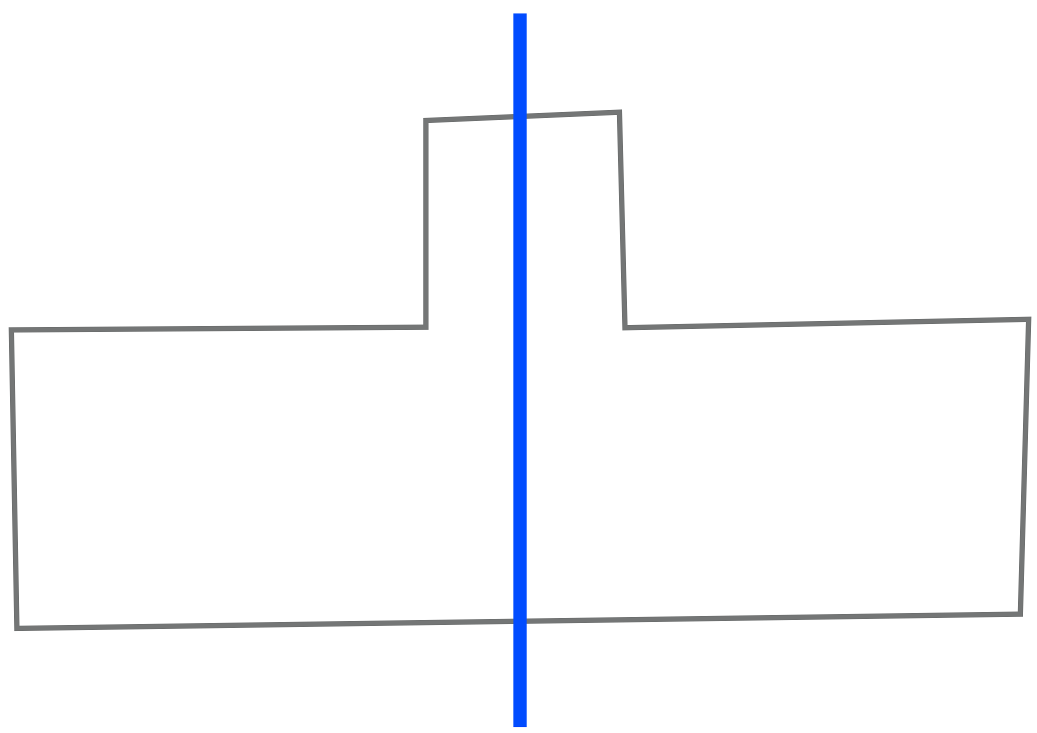
- Határozzuk meg a segédegyeneseket
- Válasszuk ki a legjobb klasztereket
- Mi a szimmetria mértéke az egyes klaszterekhez?



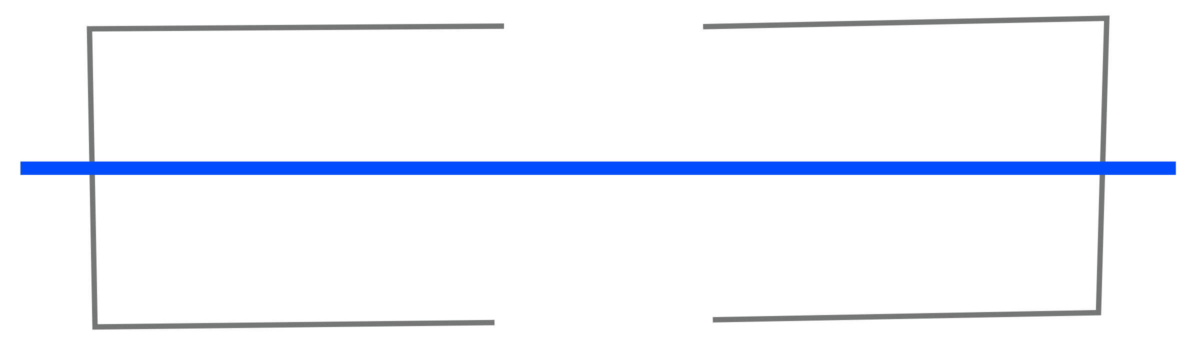
2.2. UJJGYAKORLAT - SZIMMETRIA KERESÉS



2.2. UJJGYAKORLAT - SZIMMETRIA KERESÉS



100%



75%

2.3. RÁCSRA ILLESZKEDÉS FELISMERÉSE

- A tervezői gyakorlatban gyakran rácsra illeszkednek az elemek
- A méterek egész számok valamilyen mértékegység szerint
- 2D és 3D eset lényegében ugyanaz
- Az algoritmus lépései
  1. Orientáció meghatározása (OK)
  2. Cellaméret
  3. Rács igazítása

2.3. CELLAMÉRET MEGHATÁROZÁSA

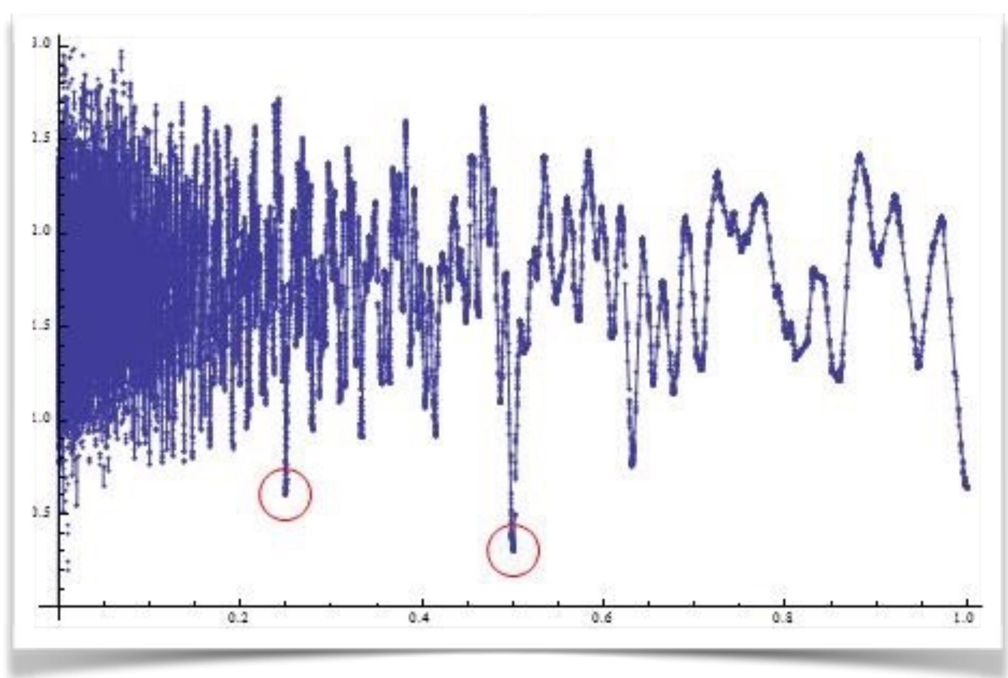
1. Illesszük a megfelelő egyeneseket az orientációhoz

2. Vegyük az összes páronkénti távolságot (párhuzamos egyenesek közötti távolság)

3. Ezek között keresünk legjobb approximatív közös osztót

$$\delta(d) = \sum_l \min\left(\left\{\frac{n_l}{d}\right\}, 1 - \left\{\frac{n_l}{d}\right\}\right)$$

$$\delta(d) \to \min$$



2.3. CELLAMÉRET MEGHATÁROZÁSA

- A nagy variancia miatt numerikus minimum keresés nem jó
- A $\delta(d)$ függvény szakaszonként monoton
- A minimumot a monoton részek végénél veszi fel
- Ezek n_l/k alakúak
- $O(n^2)$ lépésben megtalálható a minimum

- Utolsó lépés: rács pozicionálása

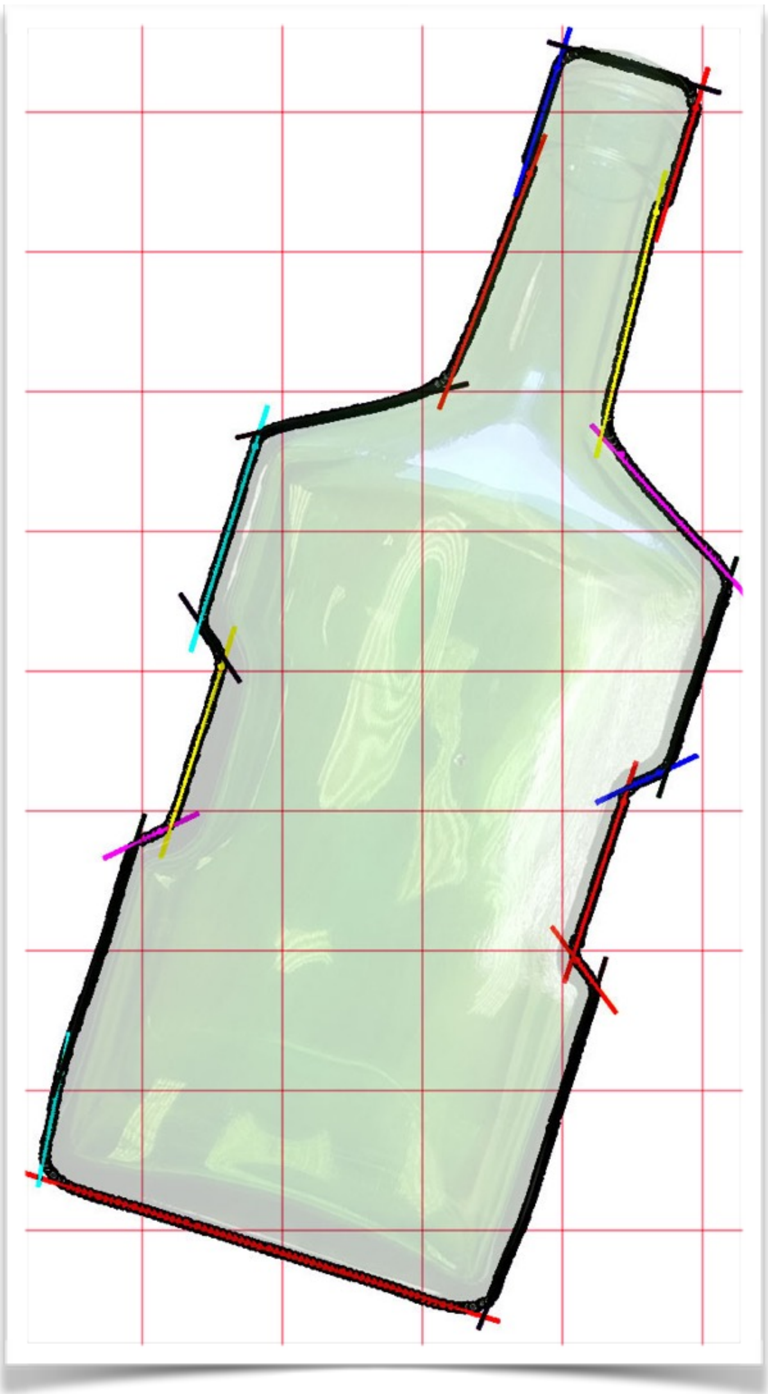
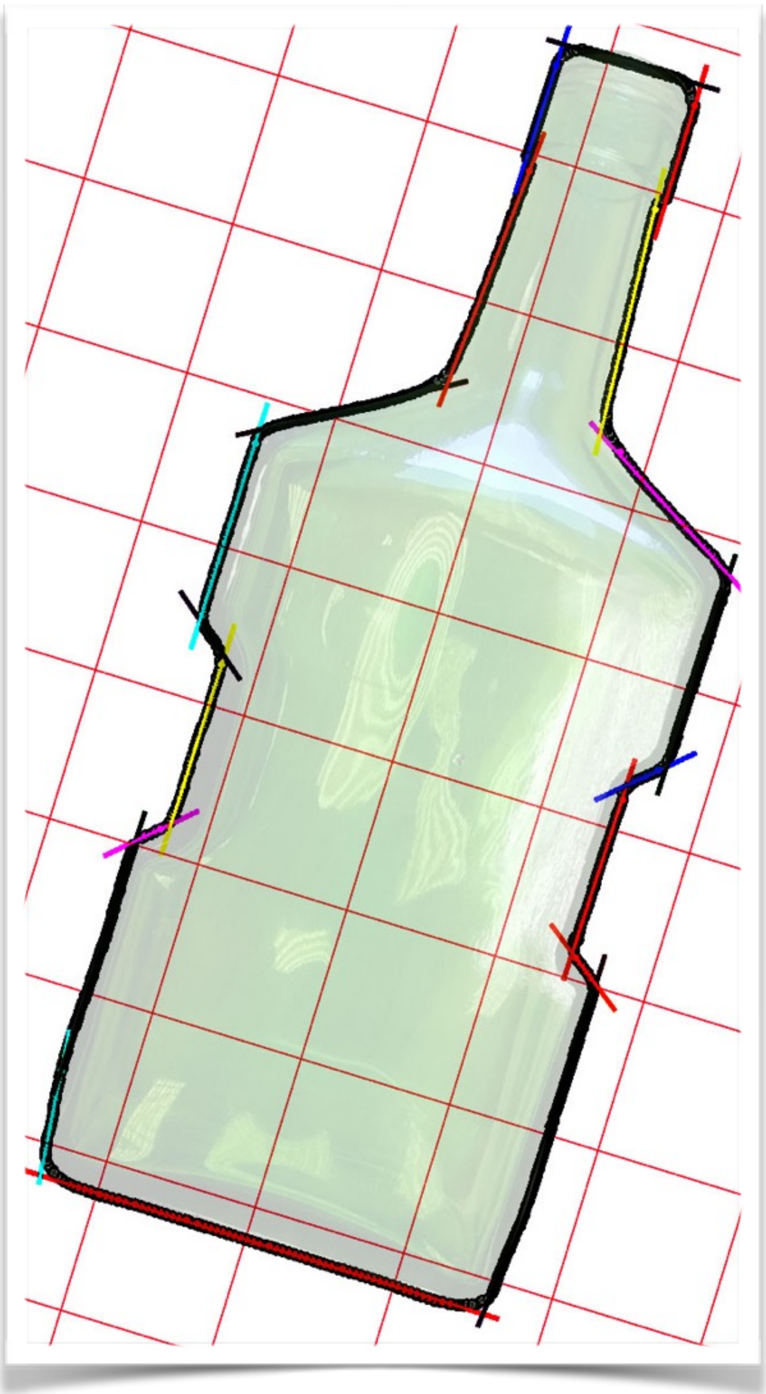
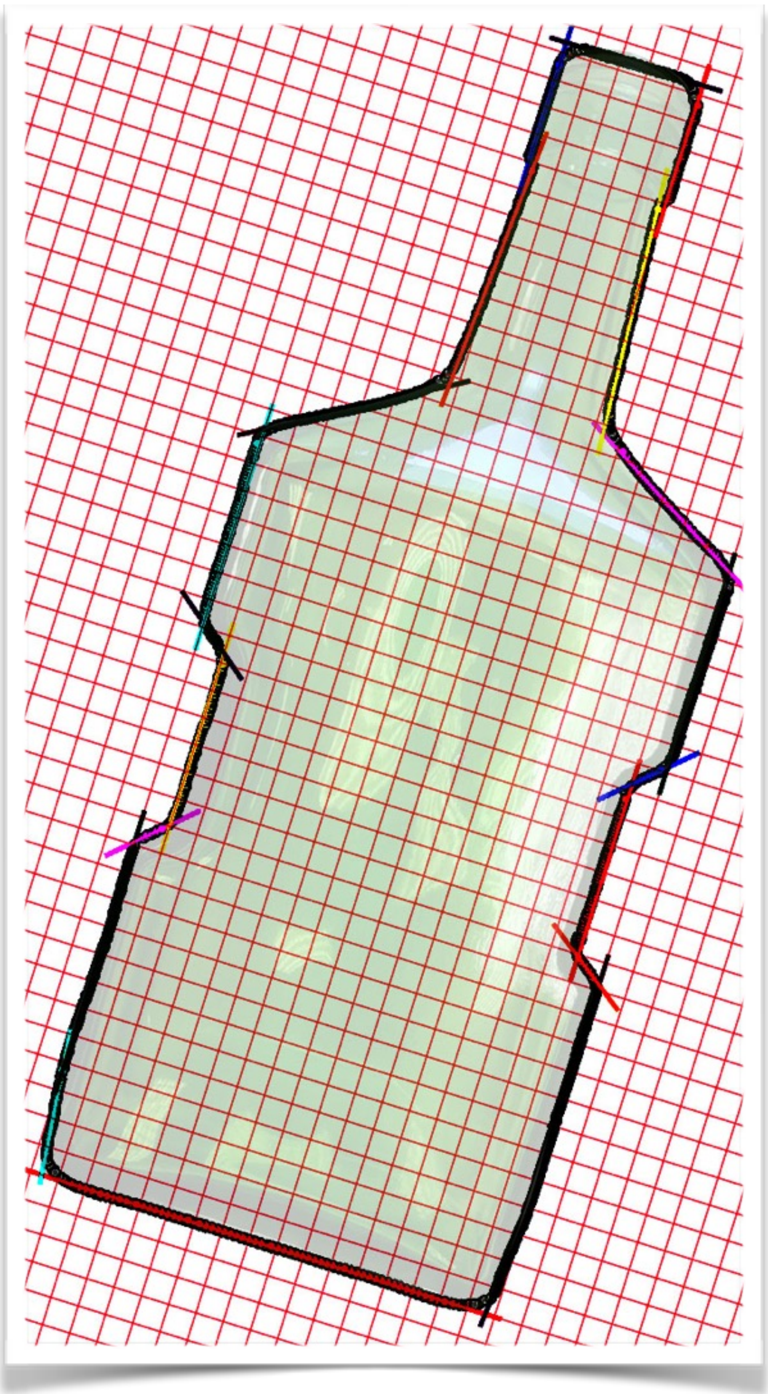
$$\delta(u_0) = \sum_i \frac{w_i}{h} \min\left(\left\{\frac{u_i - u_0}{h}\right\}, 1 - \left\{\frac{u_i - u_0}{h}\right\}\right).$$

2.3. RÁCSRA ILLESZKEDÉS FELISMERÉSE

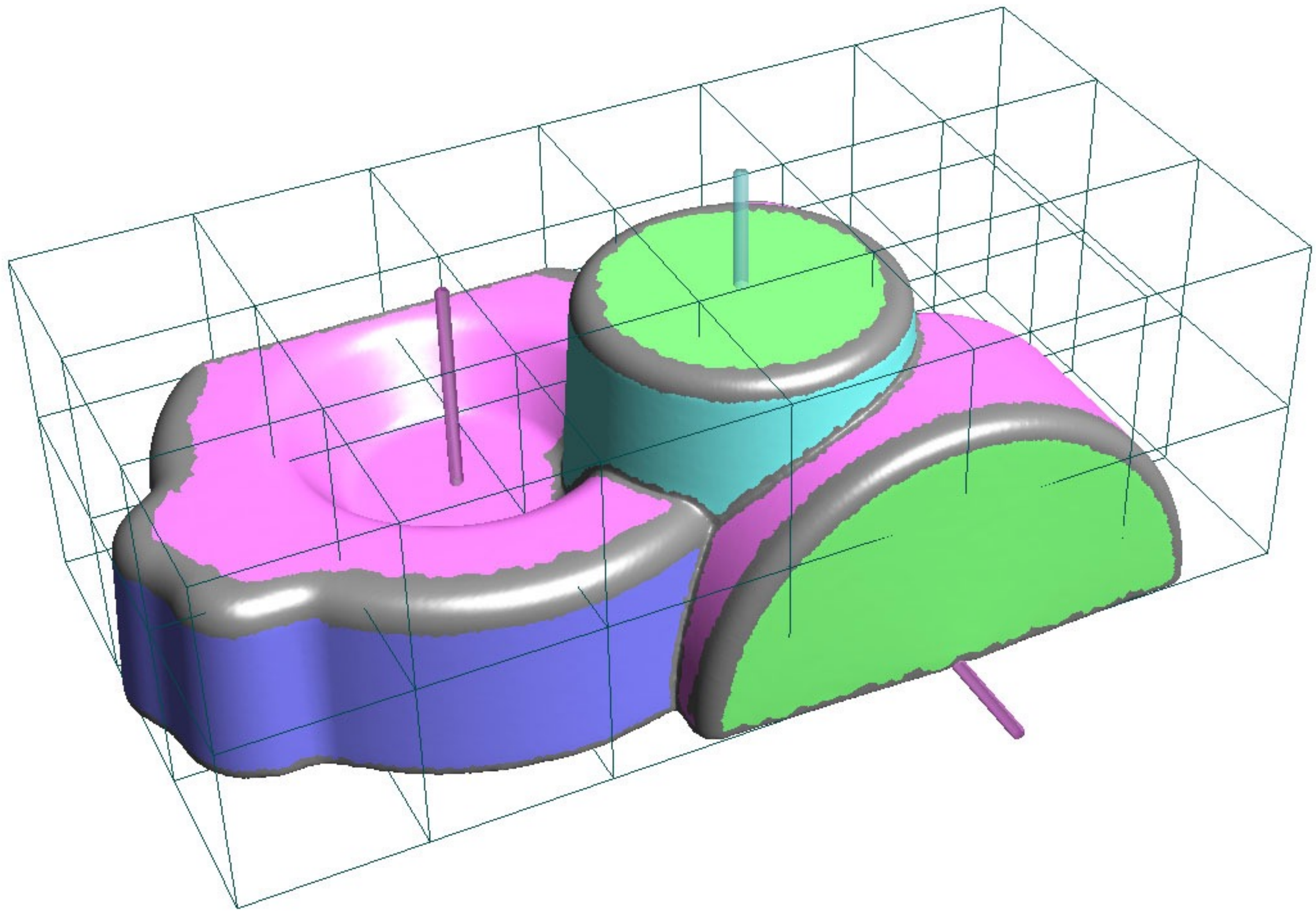
- Egy lépésben is elvégezhető a keresés
- Drágább számítás: $O(n^3)$

$$\delta(x_0, h) = \sum_i \frac{w_i}{h} \min\left(\left\{\frac{x_i - x_0}{h}\right\}, 1 - \left\{\frac{x_i - x_0}{h}\right\}\right)$$

2.3. RÁCSRA ILLESZKEDÉS FELISMERÉSE

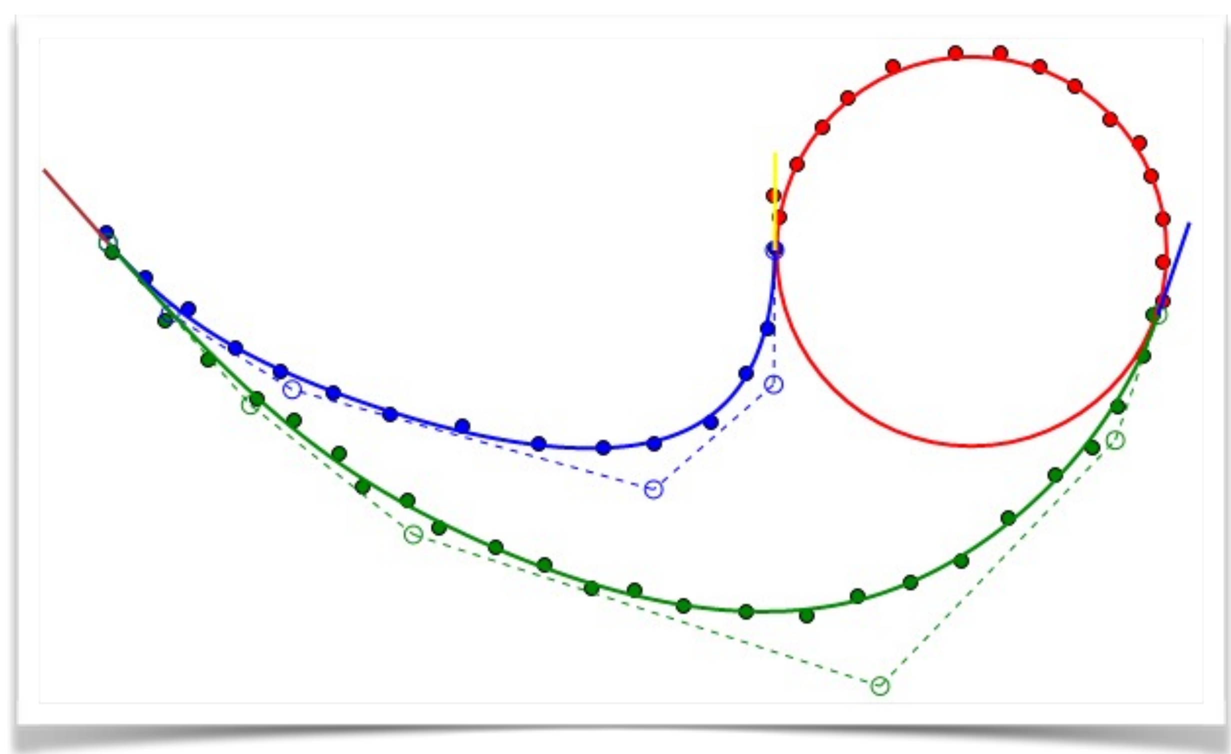




2.3. RÁCSRA ILLESZKEDÉS FELISMERÉSE



3. KÉNYSZERES ILLESZTÉS SZABADFORMÁJÚ GÖRBÉKKEL

- *A kényszereket most előre adottnak tekintjük*
- Feladat: mint eddig, **görbék** mért adatokhoz való illesztése **kényszerekkel**
- **Nehézségek**
  - Klasszikus illesztés csak lineáris kényszerekkel megy
  - Nehéz a kényszerek felírása
  - Segédobjektumokat kell használnunk



3.1. GÖRBEILLESZTÉS ISMÉTLÉS

- Mért adatpontok paraméterértékei fixek egy iteráció során
- Lineáris egyenletrendszer a kontrollpontokra

$$r(t) = \sum_{i=0}^{n} Q_i N_i(t)$$

$$f_{\text{dist}}(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{l} d(r(t_k) - \mathbf{p}_k)^2 = \\ = \sum_{k=0}^{l} \left(\sum_{i=0}^{n} Q_i N_i(t_k) - \mathbf{p}_k \right)^2$$

$$f_{\text{smooth}}(\mathbf{x}) = \int \|r''(t)\|^2 \, \mathrm{d}t$$

3.1. GÖRBEILLESZTÉS KÉNYSZEREKKEL

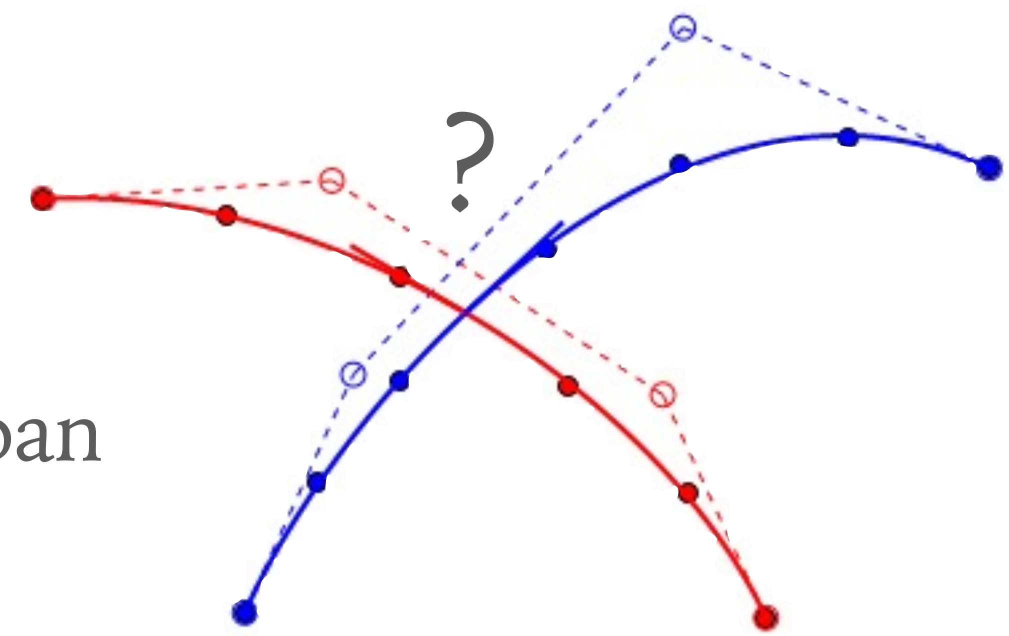
- Szükség van elsődleges illesztésre, a kényszeres illesztés csak **tökéletesít**
- Több görbe **együttes** illesztése
- Paramétervektor: görbék kontrollpontjai

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r_1\left\{Q_n^1\right\} & r_2\left\{Q_n^2\right\} \end{pmatrix}$$

- Megoldás **iterációval**: d korrekciós vektor keresése, új kontrollpontok: $x+d$
- Mire van szükségünk?
  - Hibafüggvény első és második deriváltja $f'(x), f''(x)$
  - Kényszeregyenletek deriváltjai $c'(x)$

3.1. GÖRBEILLESZTÉS KÉNYSZEREKKEL

- A klasszikus módszerrel a nemlineáris kényszeregyenletek nem kezelhetőek
- Mik a lineáris kényszerek?
  - Végpontok **fixálása**
  - Deriváltak **fixálása** a végpontokban
  - Egy belső pont **fixálása**
- Mit nem tudunk így kezelni?
  - Két görbe merőleges egy **ismeretlen** belső pontban
- A kényszeres illesztéssel a nemlineáris egyenletek is használhatók!



3.1. SEGÉDELEMEK (AUXILIARY) ISMÉTLÉS

- Összetettebb kényszerek felírása csak a hozzátartozó két objektummal nehéz vagy lehetetlen
- Segédobjektumok = több ismeretlen, egyszerűbb egyenletek
- Bármi lehet segédobjektum!
  - Pont
  - Vektor
  - Szám (távolság vagy görbe/felület paraméterérték)
  - Egyenes
  - Görbe
  - stb.

3.1. GÖRBEILLESZTÉS KÉNYSZEREKKEL

- **Példa:** két görbe simán kapcsolódik a végpontjaikban

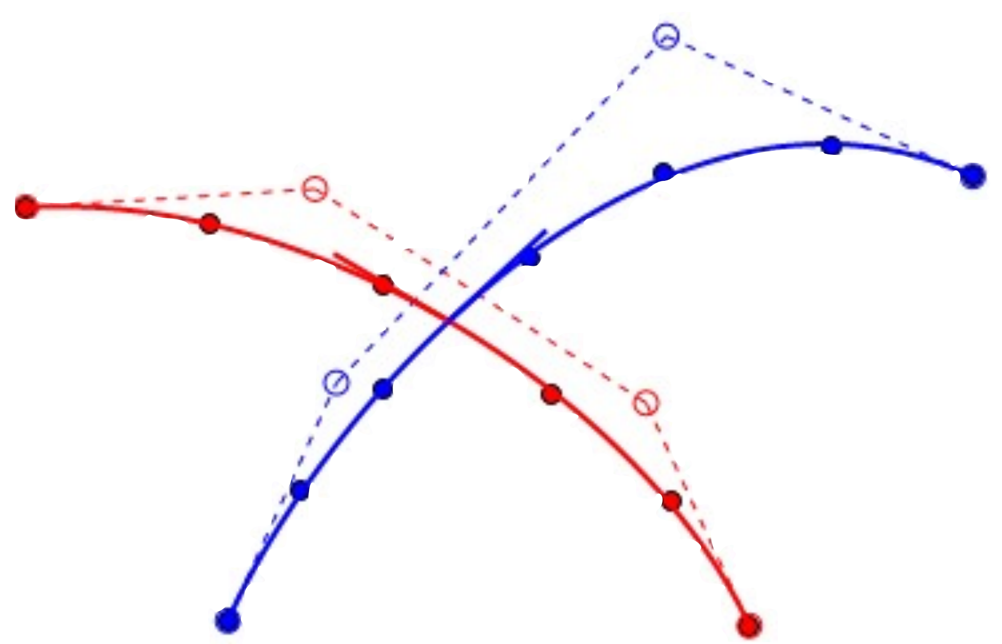
$$\mathbf{x} = \left(\; r_1 \left\{ Q_n^1 \right\} \quad r_2 \left\{ Q_n^2 \right\} \quad \alpha \; \right)$$

- Kényszerek, *c(x)=0*:
  - Végpontok megegyeznek $Q_1^1 - Q_1^2 = 0$
  - Végpontbeli deriváltak megegyeznek

    $$(Q_1^1 - Q_2^1) - \alpha(Q_1^2 - Q_2^2) = 0$$

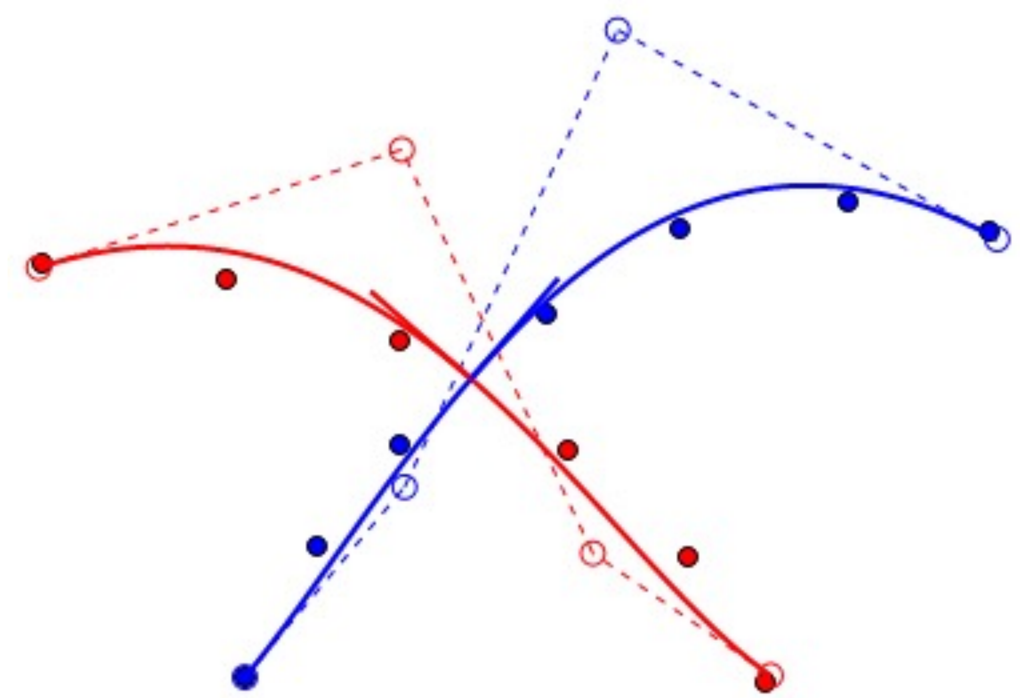
3.1. GÖRBEILLESZTÉS UJJGYAKORLAT

- **Feladat:** két (B-spline) görbe — $r_1(t)$ és $r_2(t)$ — merőleges egy **ismeretlen**(!) belső pontban
- **Tipp:** használjunk segédobjektumokat!
- Írjuk fel a konkrét kényszeregyenleteket is!



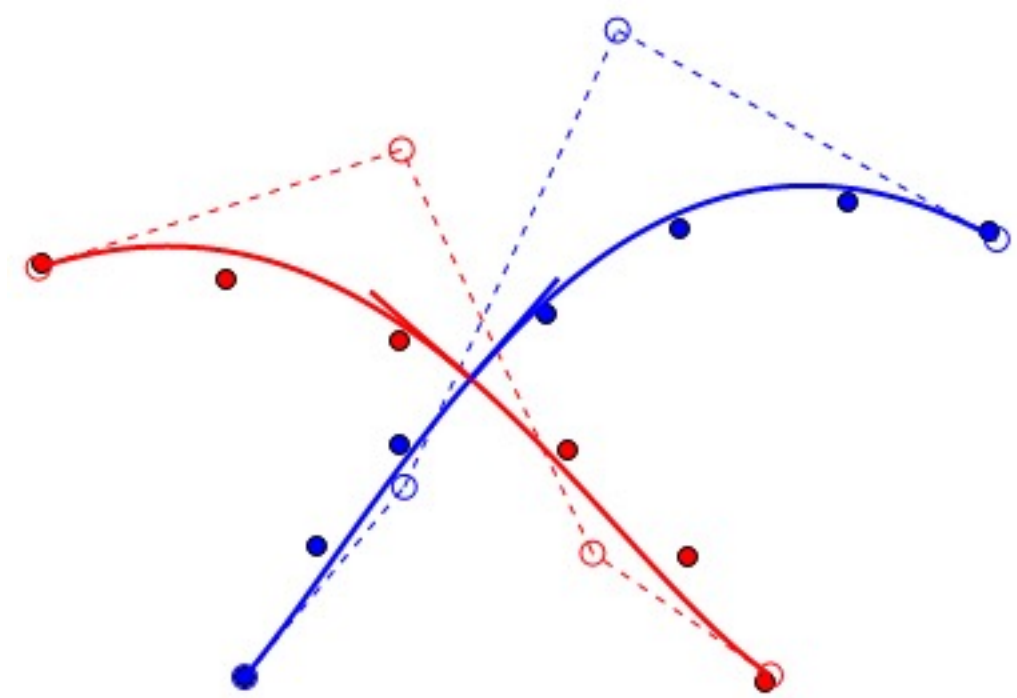
3.1. GÖRBEILLESZTÉS UJJGYAKORLAT

- Megoldás:
  - Segédobjektumok: **P** pont, V_1, V_2 vektorok, t_1, t_2 paraméterértékek



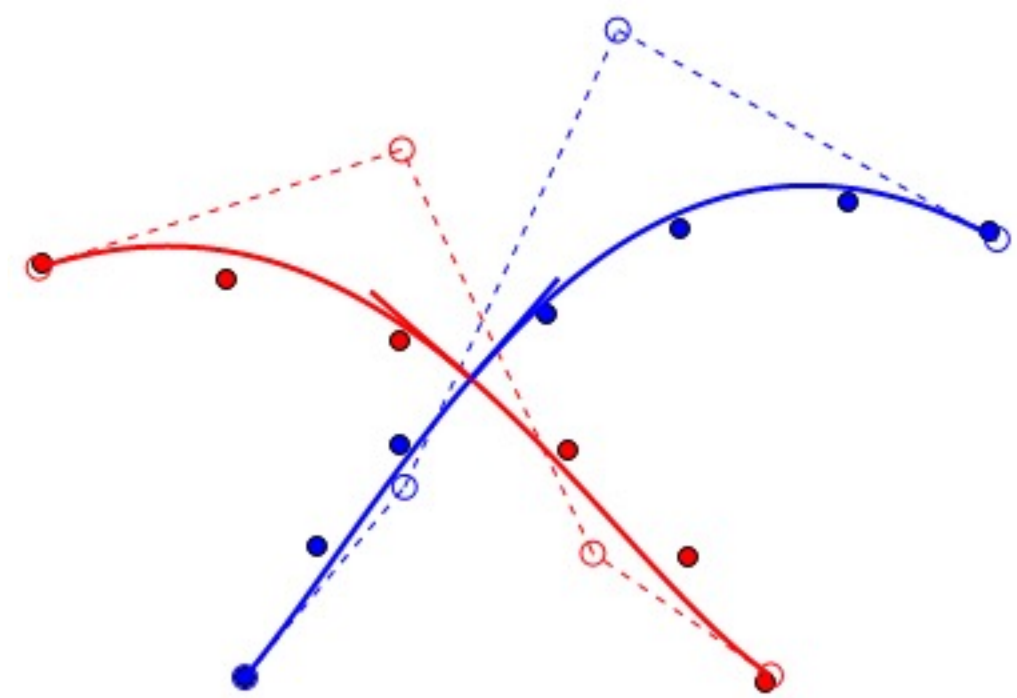
3.1. GÖRBEILLESZTÉS UJJGYAKORLAT

- Megoldás:
  - Segédobjektumok: **P** pont, V_1, V_2 vektorok, t_1, t_2 paraméterértékek
  - Kényszerek:
    - $r_1(t_1) = P$
    - $r_2(t_2) = P$
    - $r_1'(t_1) = V_1$
    - $r_2'(t_2) = V_2$
    - V_1 és V_2 merőlegesek
  - A segédobjektumok optimalizálódnak!



3.1. GÖRBEILLESZTÉS UJJGYAKORLAT

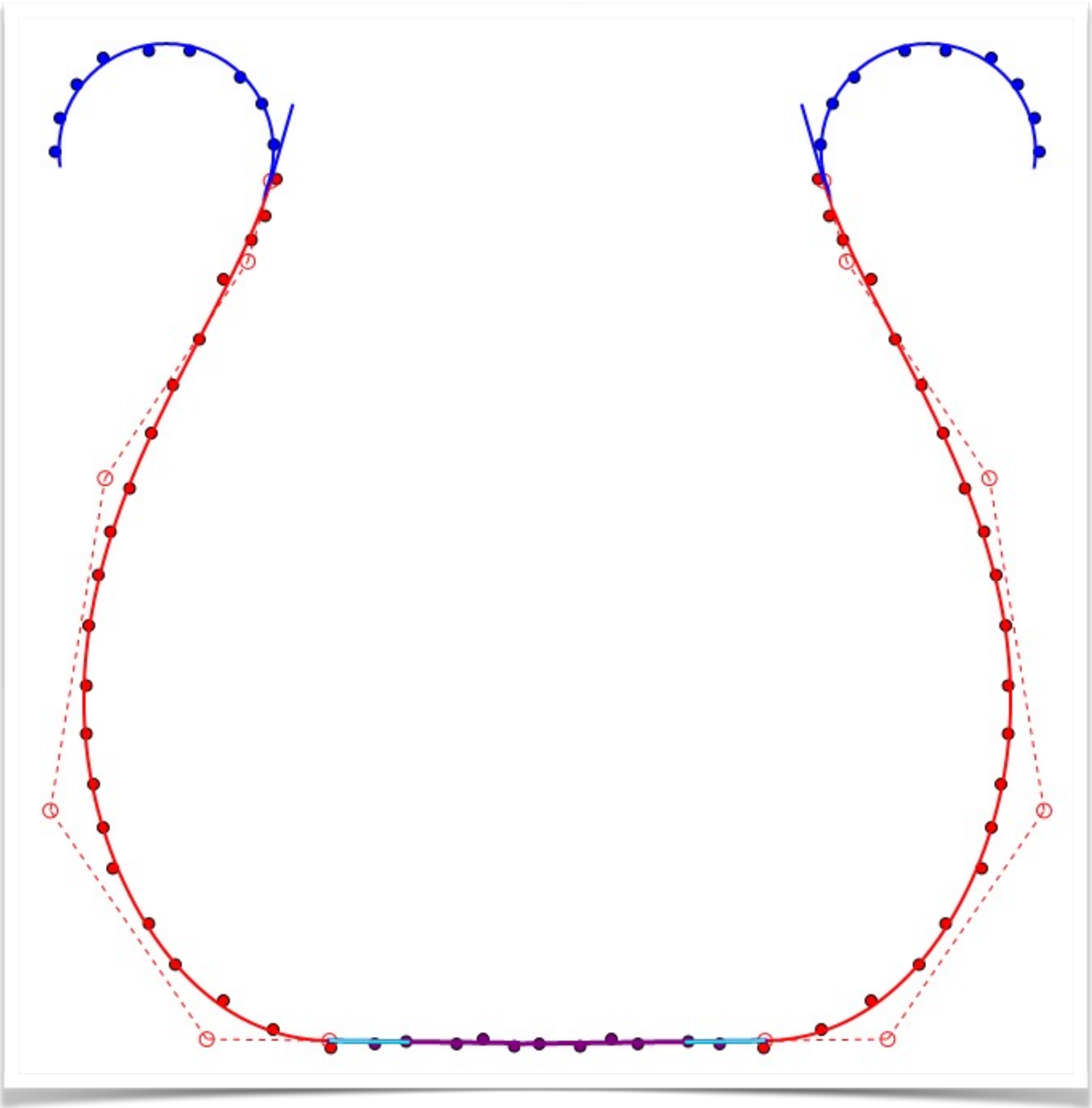
- Profi megoldás:
  - Segédobjektumok: **P** pont, V_1, V_2 (egység)vektorok, t_1, t_2 paraméterértékek
  - Kényszerek:
    - $r_1(t_1)=P$
    - $r_2(t_2)=P$
    - $\underline{r_1'(t_1)=cV_1}$
    - $\underline{r_2'(t_2)=cV_2}$
    - V_1 és V_2 egység hosszú
    - V_1 és V_2 merőlegesek

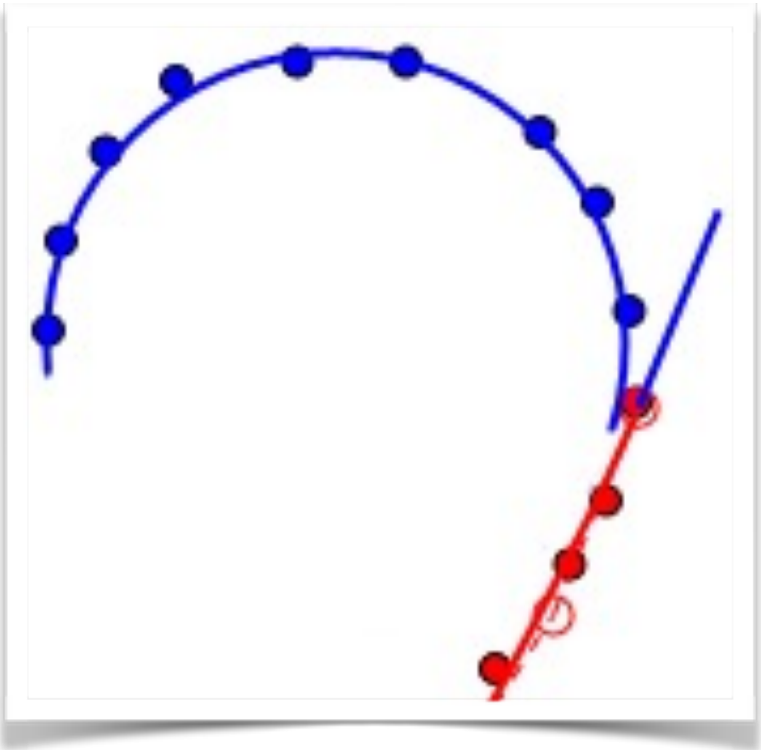


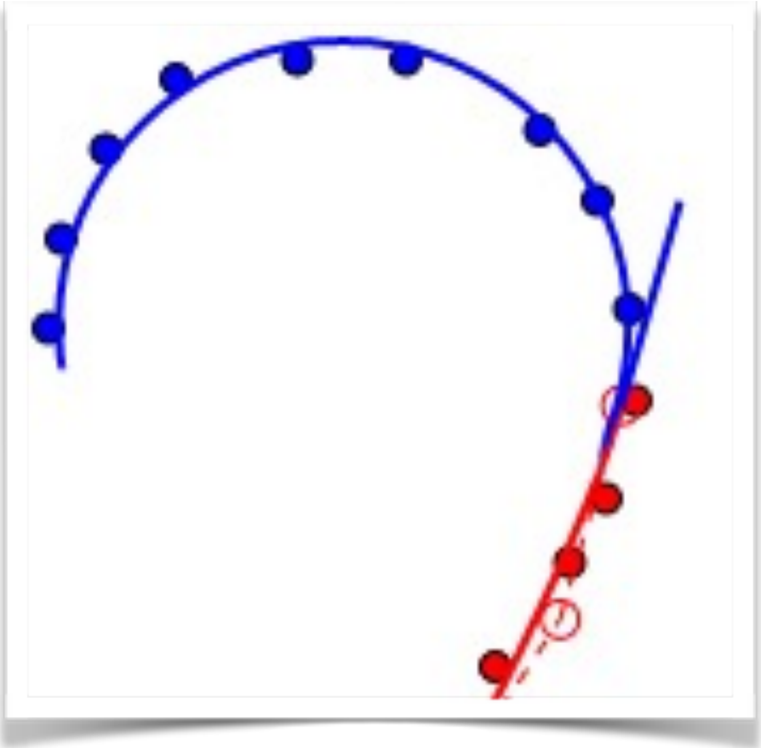
3.1. TOVÁBBI KÉNYSZEREK

- Két egyenes érinti egymást: mint az előbb, de $V_1 = V_2$
- Végponti kényszerek még egyszerűbbek
- Görbület-folytonos (G2) csatlakozás: az első három kontrollpont helyzetével leírható összefüggés (klasszikusan is megy)
- Görbék és egyéb objektumok csatlakozása hasonlóan segédobjektumokkal (pl. görbe és egy kör egy ismeretlen pontban csatlakozik)

3.1. GÖRBEILLESZTÉS PÉLDA







3.2. FELÜLETILLESZTÉS ISMÉTLÉS

- Felületillesztésnél a paraméterezés sokkal nehezebb (lásd Márton előadásai)
- Paraméterezés után el kell dönteni a fokszámot, és a kontrollpontok számát (ez is nehéz)
- Simítás kell!

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} Q_{i,j} N_i(u) M_j(v)$$

$$f_{\mathrm{dist}}(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{l} d\big(S(u_k,v_k) - \mathbf{p}_k\big)^2 = \sum_{k=0}^{l}\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} Q_{i,j} N_i(u_k) M_j(v_k) - \mathbf{p}_k\right)^2$$

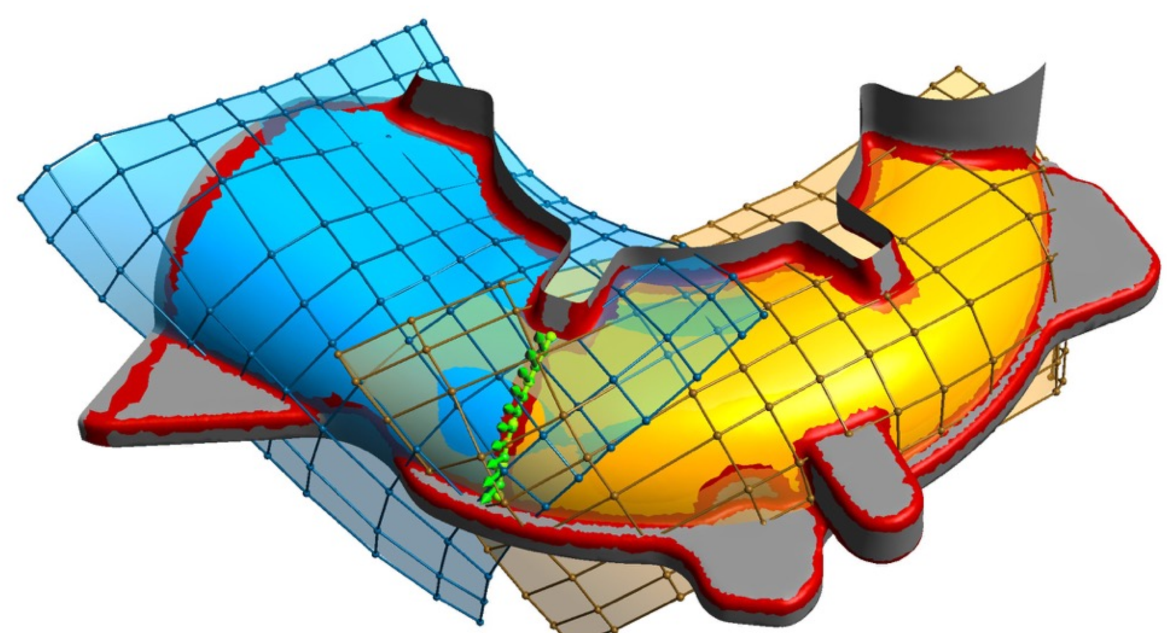
$$f_{\mathrm{smooth}}(\mathbf{x}) = \iint \|S''_{u,u}\|^2 + 2\|S''_{u,v}\|^2 + \|S''_{v,v}\|^2 \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

3.2. KLASSZIKUS FELÜLETILLESZTÉS PROBLÉMÁI

- Klasszikus illesztés
  - Felületek sima csatlakozása felírható lineáris összefüggésként
  - Ez nem jó ha **trimmelt** felületeket használunk
  - Belső kényszerek felírása nehéz
- Kényszeres illesztés
  - Kell egy jó kiindulóállapot (elsődleges illesztés)
  - Paraméterek vektora: a felületek kontrollpontjai

    $$\mathbf{x} = \left(\; S_i \left\{ Q^i_{n,m} \right\} \; \right)$$

  - Iteratív megoldás



3.2. FELÜLETEK SIMA KAPCSOLÓDÁSA

- **Feladat:** két felület — $S_1(u,v)$ és $S_2(u,v)$ — simán kapcsolódik egy belső **ismeretlen** görbe mentén
- **Ötlet:** csak diszkrét pontokban oldjuk meg
- **Ötlet:** használjunk egy vezér-görbét mint segédobjektum
- **Megoldás:**
  - **Segédobjektumok:** $g(t)$ vezérgörbe, P_k pontok, V_k vektorok, t_k (fixált) számok, (u_k,v_k) paraméterpontok

$$\mathbf{x} = \left(\; S_i\,\{Q^i_{n,m}\} \quad | \quad g\,\{Q^*_l\}, \quad \{t_k\}, \quad \{u^i_k, v^i_k\}, \quad \{(P_k, V_k)\} \; \right)$$

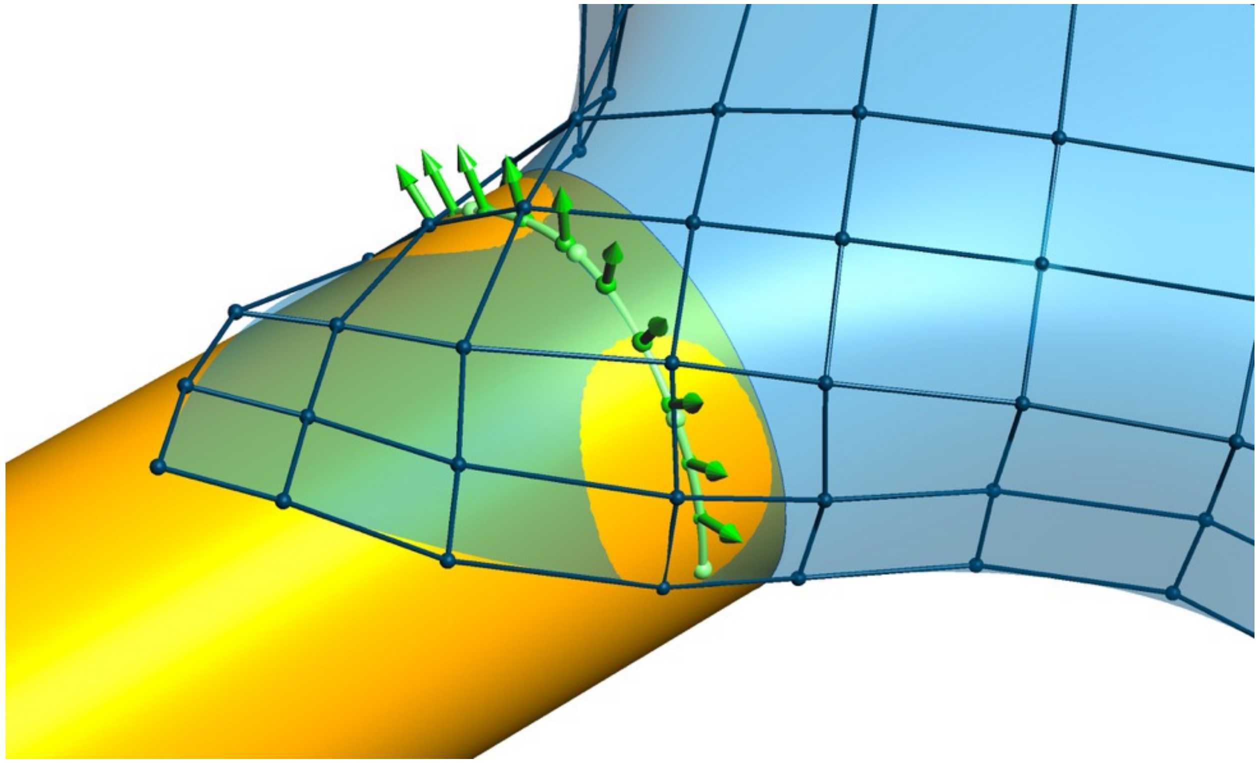
3.2. FELÜLETEK SIMA KAPCSOLÓDÁSA

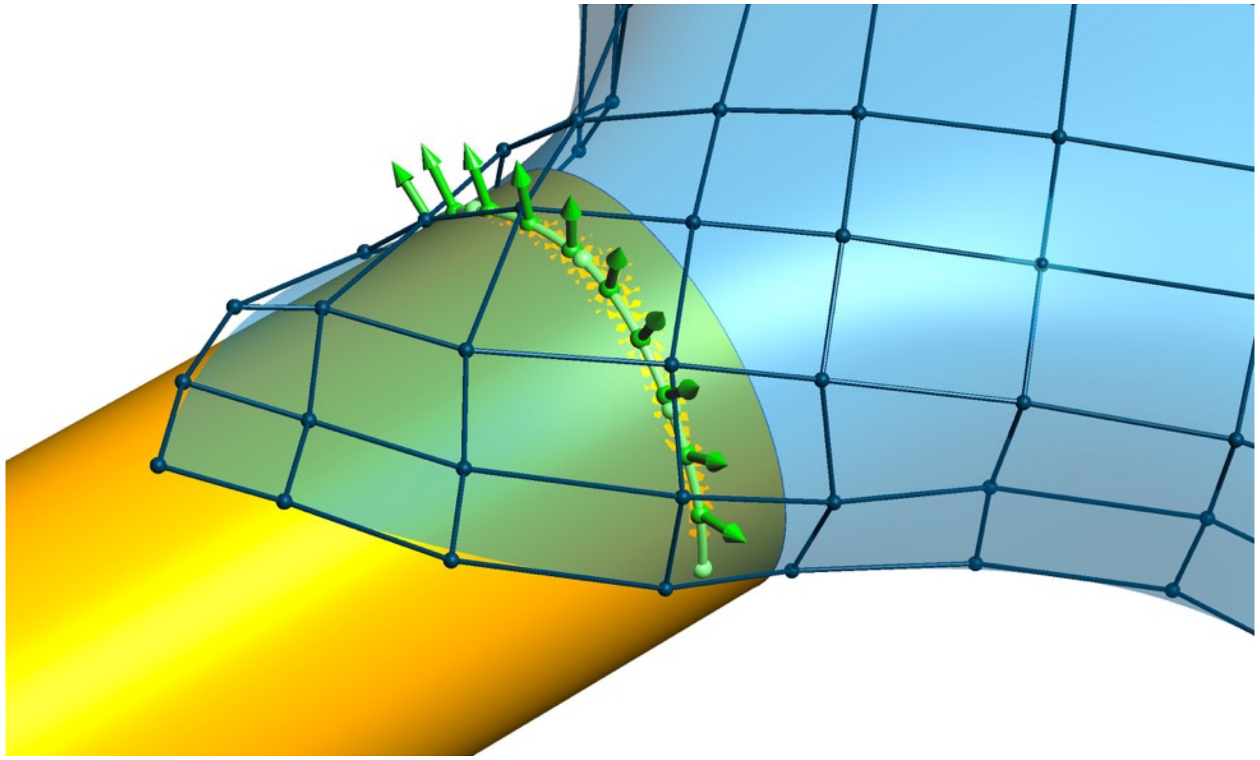
$$\mathbf{x} = \Big(\; S_i \left\{Q^i_{n,m}\right\} \quad | \quad g\left\{Q^*_l\right\}, \quad \{t_k\}, \quad \{u^i_k, v^i_k\}, \quad \{(P_k, V_k)\} \; \Big)$$

- **Kényszerek:**
  - Pontok a görbén: $g(t_k) = P_k$
  - Pontok a felületen: $S_1(u_k^1, v_k^1) = P_k$ és $S_2(u_k^2, v_k^2) = P_k$
  - Normálvektorok megegyeznek:
    $S_1^n(u_k^1, v_k^1) = V_k$ és $S_2^n(u_k^2, v_k^2) = V_k$
- Megj.: itt is érdemes lehet inkább merőlegességi kényszert alkalmazni a kereszt-deriváltakkal, az utóbbi egyenletek helyett:

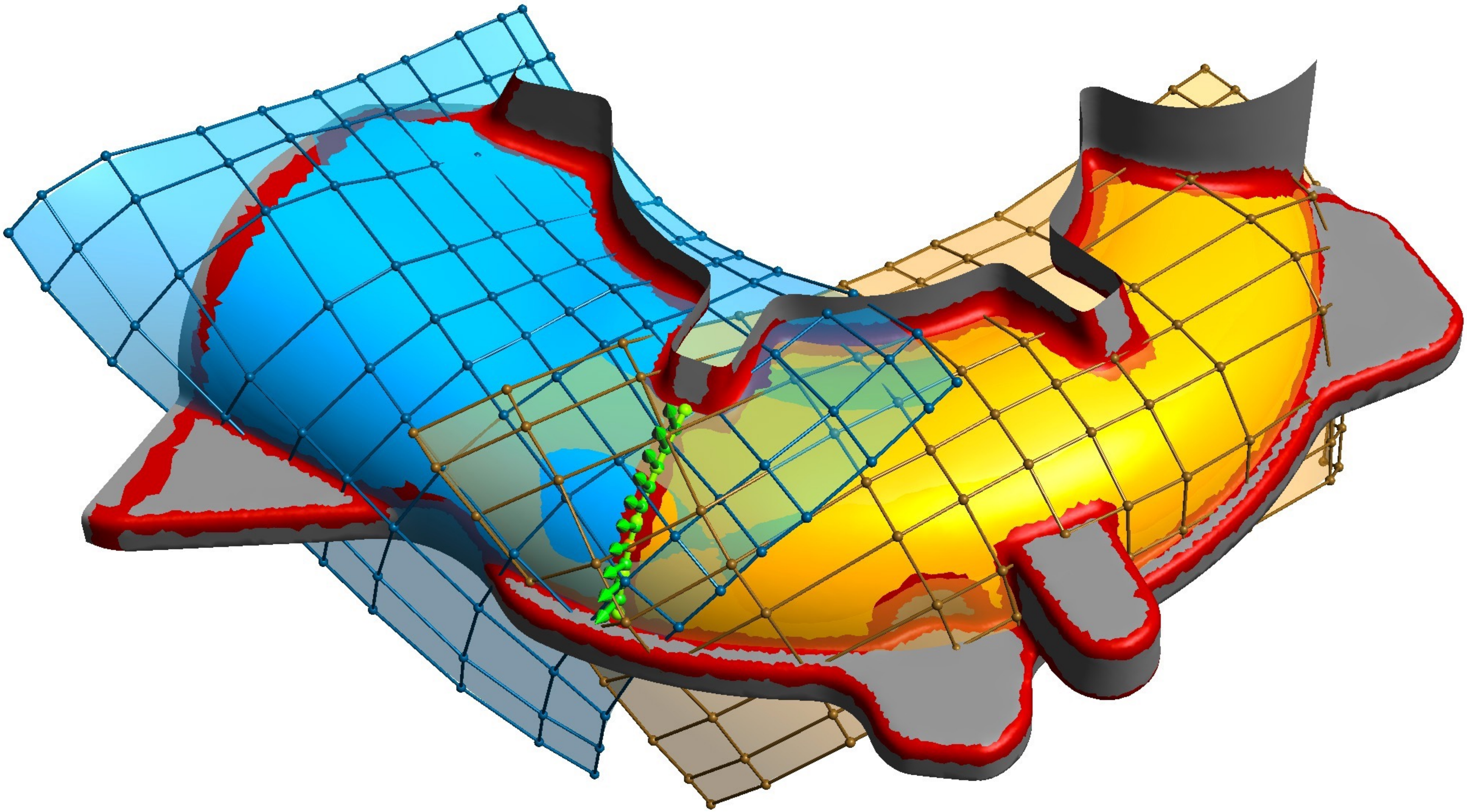
$$|V_k| = 1 \qquad \begin{aligned} \langle S_{1u}(u^1_k, v^1_k), V_k\rangle &= 0,\\ \langle S_{1v}(u^1_k, v^1_k), V_k\rangle &= 0,\\ \langle S_{2u}(u^2_k, v^2_k), V_k\rangle &= 0,\\ \langle S_{2v}(u^2_k, v^2_k), V_k\rangle &= 0. \end{aligned}$$

3.2. FELÜLETEK PÉLDA, ELŐTT/UTÁN

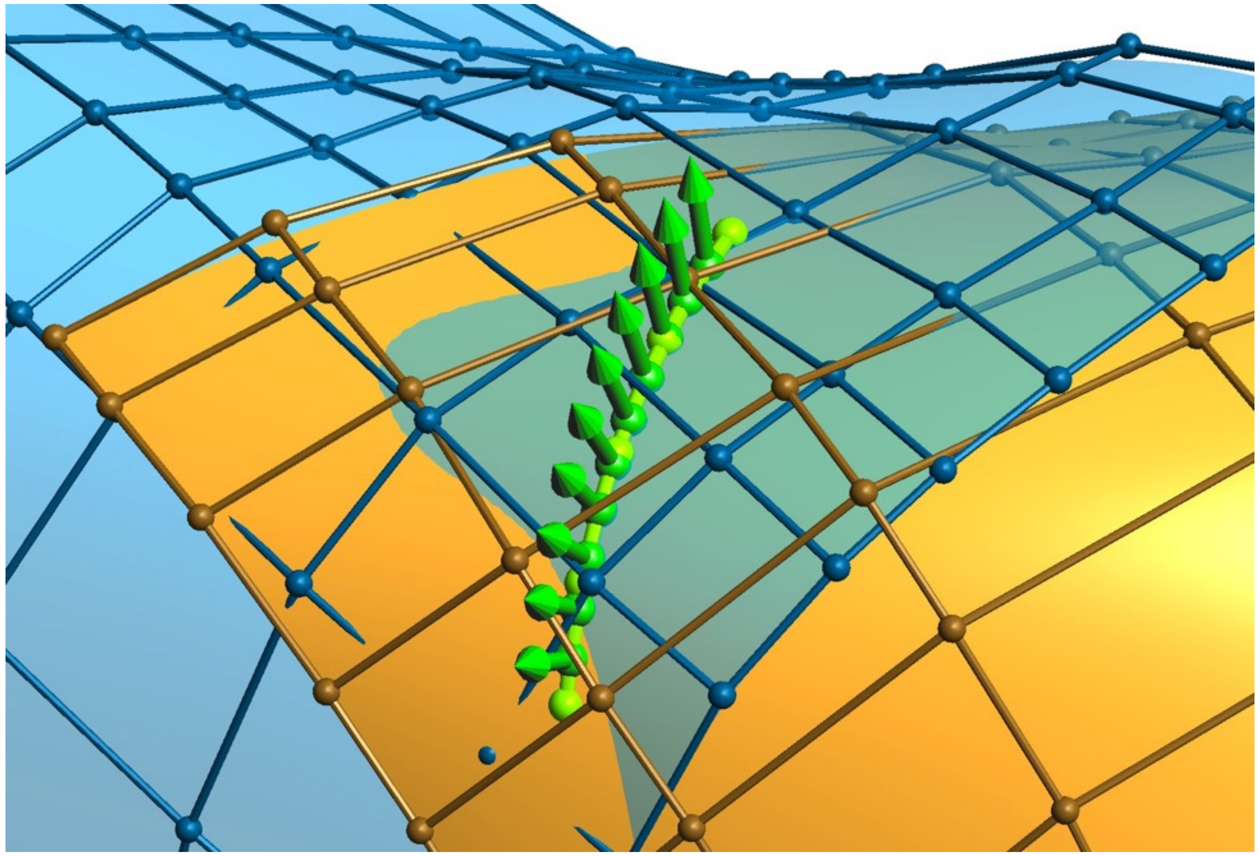


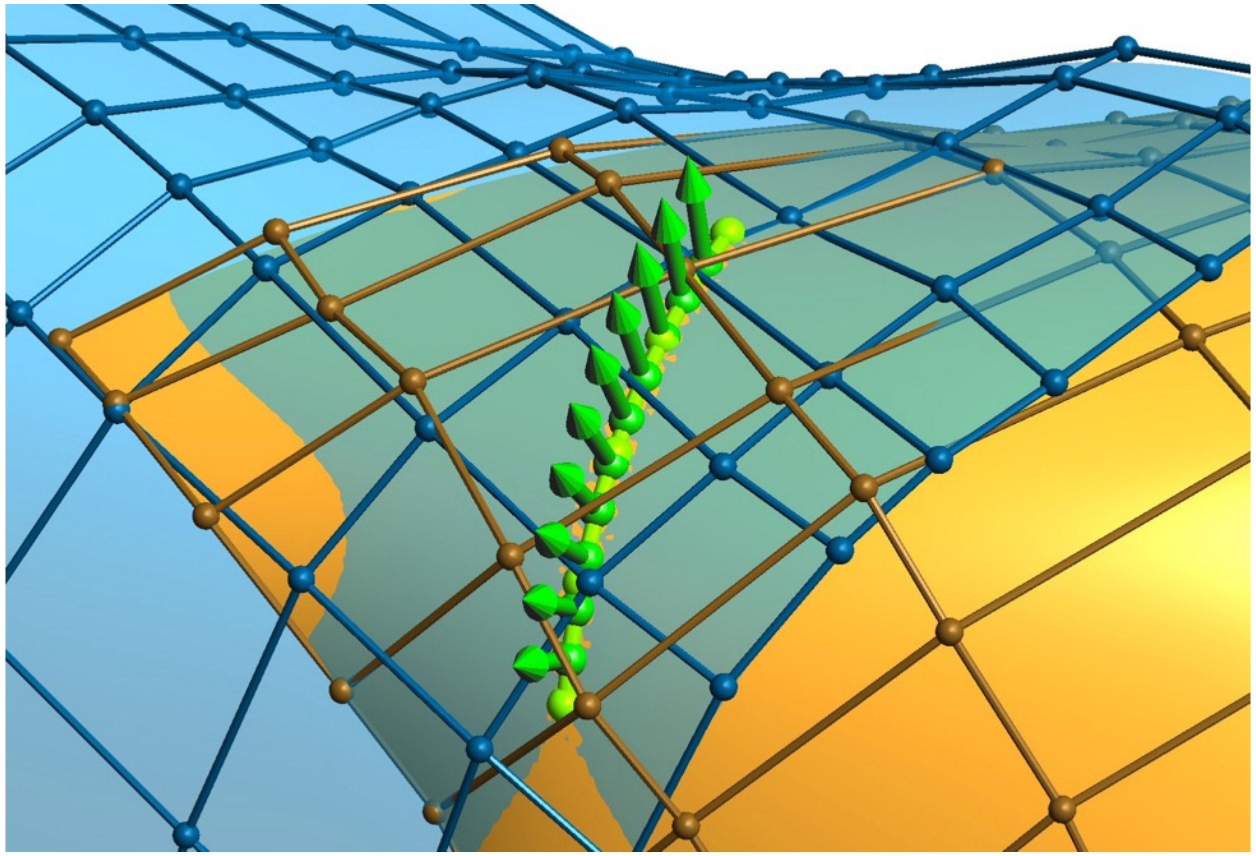


3.2. FELÜLETEK PÉLDA

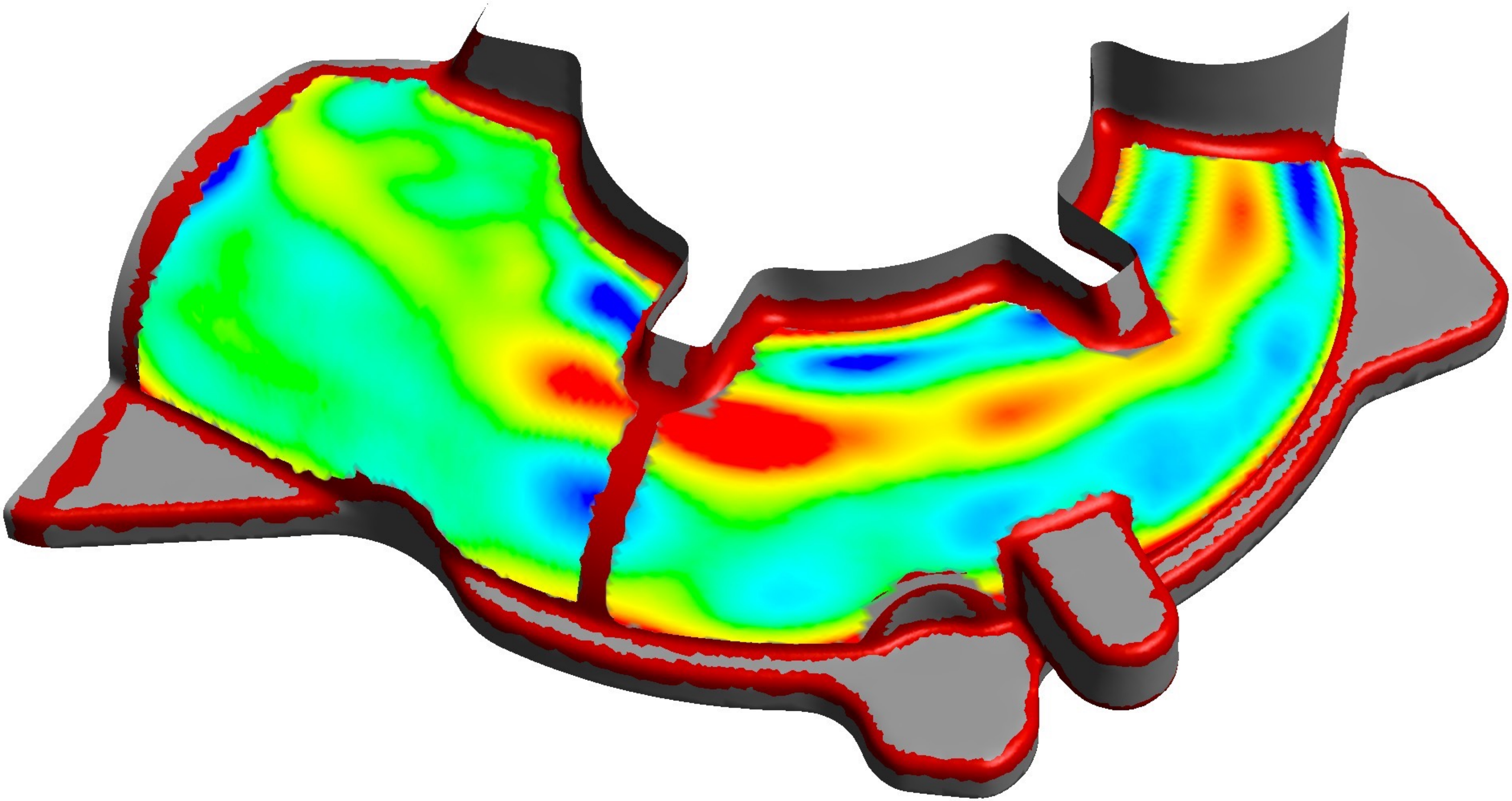


3.2. FELÜLETEK PÉLDA, ELŐTT/UTÁN

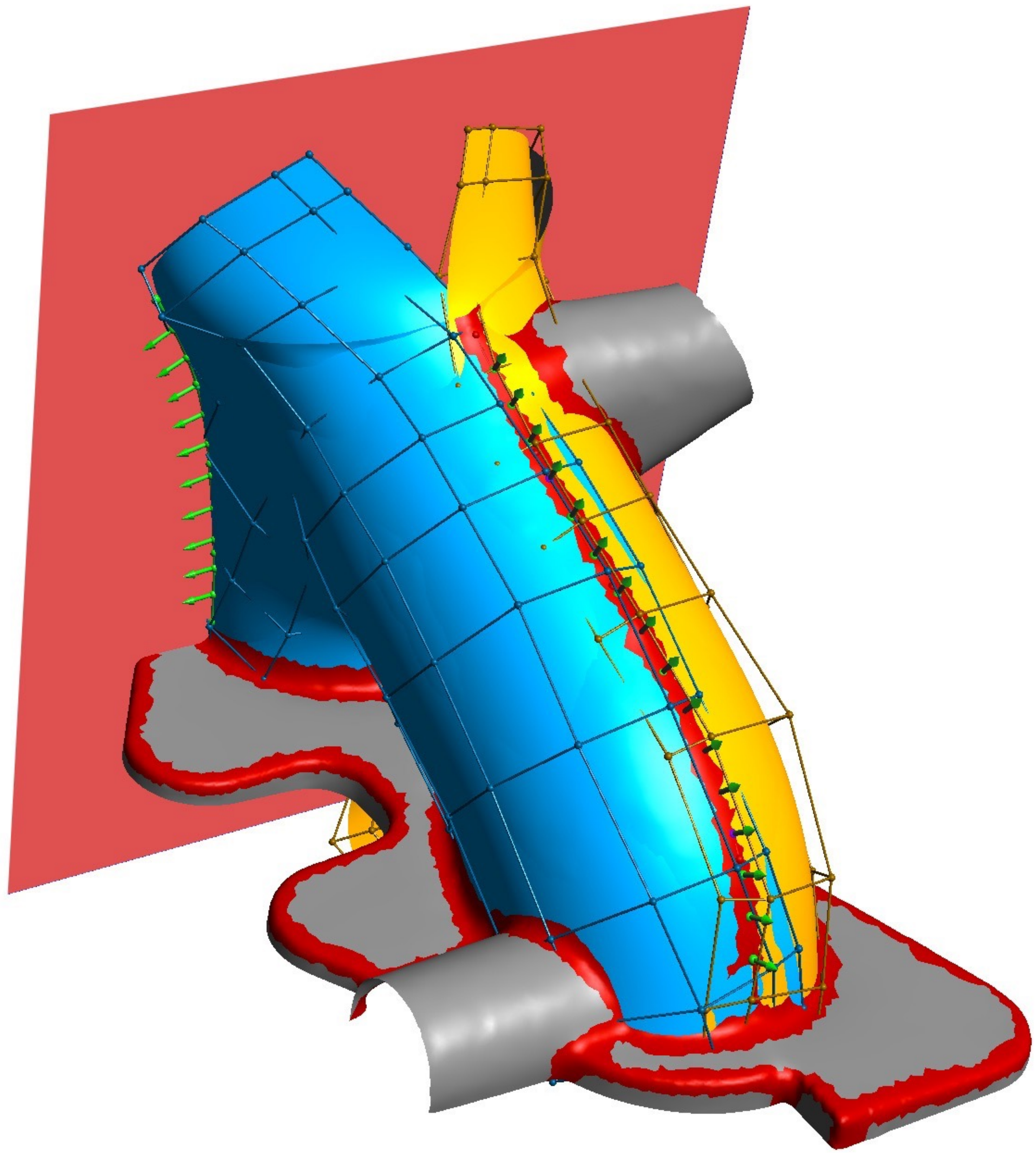




3.2. FELÜLETEK PÉLDA



3.2. FELÜLETEK PÉLDA



3.2. FELÜLETEK PÉLDA