Implicit N-oldalú patchek (és használatuk cellaalapú reprezentációkban)

Sipos Ágoston

3D számítógépes geometria 2

2018. 11. 22.

Tartalom

1. Bevezetés
   - Implicit reprezentáció
   - Lekerekítések
2. I-Patch
   - I-Segment
   - Definíció
   - Tulajdonságok
   - Példák
3. Cellaalapú reprezentációk
   - Marching cubes
   - Kutatási lehetőségek

Tartalom

1. Bevezetés
   - Implicit reprezentáció
   - Lekerekítések
2. I-Patch
   - I-Segment
   - Definíció
   - Tulajdonságok
   - Példák
3. Cellaalapú reprezentációk
   - Marching cubes
   - Kutatási lehetőségek

Emlékeztető - Implicit görbék

- $F(x,y) = 0, \qquad F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- Két részre osztja a síkot, a görbe ezek határa ($\{F(x,y) = 0\}$)

Implicit / parametrikus reprezentáció

Implicit

- Végtelen félterek
- Pontok osztályozása könnyű
- Mintavételezés nehéz
  - Általában: szabályos $\rightarrow$ implicit, szabadformájú $\rightarrow$ parametrikus
  - Cél a (bizonyos értelemben) szabadformájú implicit

Parametrikus

- Véges felületdarab
- Pontok osztályozása nehéz
- Mintavételezés könnyű

Tartalom

1. Bevezetés
   - Implicit reprezentáció
   - Lekerekítések
2. I-Patch
   - I-Segment
   - Definíció
   - Tulajdonságok
   - Példák
3. Cellaalapú reprezentációk
   - Marching cubes
   - Kutatási lehetőségek

Lekerekítések - Liming módszere

- Adott két metsző egyenes (implicit formában), kerekítsük le a sarkot.

Lekerekítések - Liming módszere

- Megoldás: vegyük a „saroklevágó" egyenest ($C_1 = 0$)
- $F = (1-\lambda)L_1 L_2 + \lambda C_1^2$ lesz a lekerekítő görbe

demó: Liming-módszer...

Lekerekítések - Liming módszere

- $F = (1-\lambda)L_1 L_2 + \lambda C_1^2$
- Kell:
  - 1.: $\{L_i = 0\} \cap \{C_1 = 0\} \subset \{F = 0\}, i = 1,2$
  - 2.: $p_i \in \{L_i = 0\} \cap \{C_1 = 0\}, \nabla L_i(p_i) = c \cdot \nabla F(p_i)$
- 1. trivi (0+0=0)
- 2.: $(\nabla F)(p_i) = (1-\lambda)((\nabla L_1)(p_i)L_2(p_i) + (\nabla L_2)(p_i)L_1(p_i)) + +2\lambda(\nabla C_1)(p_i)C_1(p_i) = (1-\lambda)L_{3-i}(p_i)(\nabla L_i)(p_i) = const \cdot (\nabla L_i)(p_i)$

Lekerekítések - Liming módszere

- Ezek valójában kúpszeletek
- Egyenes és egyenes szorzata (elfajult) kúpszelet, kúpszeletek összege kúpszelet

Felületek lekerekítése

Lekerekítendő él

Levágott él

Felületek lekerekítése

Liming-lekerekítés, $\lambda = 0.2$

Liming-lekerekítés, $\lambda = 0.6$

Funkcionális spline

- Általánosítás n lekerekítendő és m vágó felületre: funkcionális spline
- $F = (1-\lambda)\prod_{i=1}^{n} P_i + \lambda \prod_{i=1}^{m} B_i^2$, ahol P_i, $i = 1..n$ elsődleges felületek (amihez elsőrendben simul az eredményfelület), B_i, $i = 1..m$ vágó felületek
- Hiszen a produktum valójában unió
- Probléma: nem csoportosulnak a geometriai elemek, pedig általában nem minden vágó tartozik minden elsődlegeshez
  demó: funkcionális spline...

Tartalom

1 Bevezetés
- Implicit reprezentáció
- Lekerekítések

2 I-Patch
- I-Segment
- Definíció
- Tulajdonságok
- Példák

3 Cellaalapú reprezentációk
- Marching cubes
- Kutatási lehetőségek

I-Segment (2D)

- P_1, P_2, B_1, B_2 görbék. Szeretnénk olyan görbét, ami a $P_i \cap B_i$ pontokat köti össze, és ott elsőrendben folytonosan csatlakozik P_i-hez
- I-szegmens: $\alpha P_1 B_2^2 + \beta P_2 B_1^2 + B_1^2 B_2^2 = 0$
- Két szabadságfok ($\alpha = \beta$ esetén csak egy)
- Garantálja, hogy a megfelelő pontokon menjen át. (És ne pl. a $P_1 \cap B_2$ ponton)

I-Segment (2D)

demó: 2D-s I-segment program

I-Segment / Funkcionális spline

I-segment

Funkcionális spline

Tartalom

1. Bevezetés
   - Implicit reprezentáció
   - Lekerekítések
2. I-Patch
   - I-Segment
   - Definíció
   - Tulajdonságok
   - Példák
3. Cellaalapú reprezentációk
   - Marching cubes
   - Kutatási lehetőségek

I-Patch

- Várady, Benkő, Kós, Rockwood, 2001
- Alternatív megközelítés az implicit lekerekítésre
- Kezel bizonyos funkcionális-spline-problémákat
- Módosítható G^n folytonosságra
- Több szabadságfok
- Bonyolultabb képlet

I-Patch

- P_i, $i = 1..n$ elsődleges felületek, B_i, $i = 1..n$ vágó felületek, az azonos indexűek közösen adnak meg egy határgörbét
- $I = \sum_{i=1}^{n} (w_i P_i \prod_{j \neq i} B_j^2) + w_c \prod_{i=1}^{n} B_i^2$, $w_i, w_c \in \mathbb{R}$
- Azaz pl. $n = 3$-ra:
  $I = w_1 P_1 (B_2 B_3)^2 + w_2 P_2 (B_1 B_3)^2 + w_3 P_3 (B_1 B_2)^2 + w_c (B_1 B_2 B_3)^2$
- n szabad paraméter van (az utolsóval le lehet osztani)

Tartalom

1 Bevezetés
- Implicit reprezentáció
- Lekerekítések

2 I-Patch
- I-Segment
- Definíció
- Tulajdonságok
- Példák

3 Cellaalapú reprezentációk
- Marching cubes
- Kutatási lehetőségek

Határinterpoláció

- i. határgörbe: $\{P_i = 0\} \cap \{B_i = 0\}$
- Minden tag tartalmazza vagy P_i-t vagy B_i-t, tehát ezen a görbén az I-Patch egyenlet 0: rajta van a felületen a görbe

G^1 folytonos csatlakozás

- Kell: az i. határgörbén elsőrendben simán kapcsolódjon P_i-hez
- $I = QP_i + WB_i^2, \qquad Q, W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- $(\nabla I) = (\nabla Q) P_i + Q (\nabla P_i) + (\nabla W) B_i^2 + W\, 2B_i (\nabla B_i) =$
  $= 0 + Q (\nabla P_i) + 0 + 0$
- G^n folytonossághoz: az egyenletben a B_i-k kitevője legyen $n+1$

Közös vágók

- Ha két elsődleges felületnek ugyanaz a vágója, akkor a módszer elromlik
- Megoldás: uniózzuk össze a közös vágóval rendelkező felületeket (à la funkcionális spline)
- Ha „elfogynak” a tagok, akkor visszakapjuk a funkcionális spline-t

Patch belseje - interpoláció

- A szabad paraméterek felhasználhatók a patch belsejének kontrollálására.
- Egy darab interpolálandó pont (x_0, y_0) esetén

$$w_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(w_i P_i(x_0, y_0) \prod_{j \neq i} B_j^2(x_0, y_0) \right)}{\prod_{i=1}^{n} B_i^2(x_0, y_0)}$$

garantálja, hogy az I-Patch átmenjen a ponton

Patch belseje - approximáció

Approximáció pontfelhőre

$p_i \in \mathbb{R}^3$, $i \in 1..N$ pontfelhő

$\min_{I} \sum_{i=1}^{N} I(p_i)^2$ legkisebb négyzetes hibaminimalizálás

$$\min_{\mathbf{w}} \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{n} (w_j P_j(p_i) \cdot \prod_{k \neq j} B_k(P_i)^2) + \prod_{k=1}^{n} B_k(P_i)^2 \right)$$

$$\min_{\mathbf{w}} \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{n} (w_j M_j(p_i)) + F(p_i) \right)$$

Patch belseje - approximáció

$$\min_{\mathbf{w}} \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{n} (w_j M_j(p_i)) + F(p_i) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial w_k} \sum_{i=1}^{N} I(p_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} 2 \left(\sum_{j=1}^{n} (w_j M_j(p_i)) + F(p_i) \right) M_k(p_i) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \sum_{i=1}^{N} M_j(p_i) M_k(p_i) = -\sum_{i=1}^{N} F(p_i) M_k(p_i)$$

$$\begin{bmatrix} \sum_i M_{1,1}(p_i) & \dots & \sum_i M_{n,1}(p_i) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_i M_{1,n}(p_i) & \dots & \sum_i M_{n,n}(p_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sum_i F(p_i) M_1(p_i) \\ \vdots \\ \sum_i F(p_i) M_n(p_i) \end{bmatrix}$$

$(M_{i,j} = M_i M_j)$

Tartalom

1 Bevezetés
- Implicit reprezentáció
- Lekerekítések

2 I-Patch
- I-Segment
- Definíció
- Tulajdonságok
- Példák

3 Cellaalapú reprezentációk
- Marching cubes
- Kutatási lehetőségek

Voxel-alapú megjelenítés

demó: 3d-s objektumok (Paraview)

Raytracing

demó: 3d-s objektumok (Raytrace)

Tartalom

1 Bevezetés
- Implicit reprezentáció
- Lekerekítések

2 I-Patch
- I-Segment
- Definíció
- Tulajdonságok
- Példák

3 Cellaalapú reprezentációk
- Marching cubes
- Kutatási lehetőségek

Marching cubes

- Skalármezők (=implicit függvények) alapján képzett kontúrfelületek vizualizációjára

Marching squares

- 2D-s változat

Tartalom

1 Bevezetés
- Implicit reprezentáció
- Lekerekítések

2 I-Patch
- I-Segment
- Definíció
- Tulajdonságok
- Példák

3 Cellaalapú reprezentációk
- Marching cubes
- Kutatási lehetőségek

Implicit patch-ek

- Mit is „csinál” az I-Patch?
- Megadunk néhány határgörbét, és kitöltjük a belsejét egy felülettel
  - Gyakorlatilag ez van a Marching cube-ban, csak szakaszokkal és poligonokkal
- Plusz I-Patch-nél megadhatunk néhány érintő felületet (ribbonokat)
- G^1 folytonosság érhető el a cellák között

Cellafüggvények

Lineáris cellafüggvény

Görbült cellafüggvény

Görbült cellafüggvény gradiensinformációval

Cellafüggvények 3D-ben

Ribbonrendszer

N-oldalú patch

- Implicit előnye: nem kell a paramétertartománnyal „vesződni”

Adaptív felosztás

Csatlakozási probléma adaptív felosztásnál

Adaptív felosztás 3D-ben

Adaptív felosztás 3D-ben

- Feltevés: Görbült cellafüggvényekkel sokkal kevesebb cella is elég lehet.

Marching „curves”

I-segment illesztés

Közönséges marching squares

Marching „curves”

- Azért nem minden tökéletes...

I-segment illesztés szétesése

Közönséges marching squares

Marching „curves”

- Tovább csökkentve a felosztást...

I-segment illesztés

Közönséges marching squares

Mi is történik?

Implicit görbe szétesése

- Algebrai karakterizáció szükséges

Összegzés

- Implicit görbéket régóta használnak lekerekítésekre
- Erre a célra többféle implicit felületet találtak ki
- Ezek lehetséges, hogy használhatók másra is
  - Például cellaalapú reprezentációra

Összegzés - előnyök

I-Patch reprezentáció előnyei:

- Szabadformájú geometria
- Approximáció egyszerűbb, mint parametrikusnál
- Offszetelés
- Raycasting

Nehézségek:

- Határgörbék megadása
- G^1-hez alkalmas ribbonrendszer
- Stabil approximáció (kiforduló esetek kezelése)

Irodalom I

Várady, T., Benkő, P., Kós, G. and Rockwood, A.
Implicit surfaces revisited—I-patches.
Geometric Modelling. pp. 323-335. Springer, Vienna, 2001.

Lorensen, William E., and Harvey E. Cline.
Marching cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm.
ACM siggraph computer graphics. vol. 21, no. 4, pp. 163-169., 1987.