ÁLTALÁNOSÍTOTT BARICENTRIKUS KOORDINÁTÁK I.

CAGD Érdekességek

Kovács István

MIRŐL LESZ SZÓ?

- 1. Baricentrikus koordináták alapjai
- 2. Baricentrikus koordináták sokszögekre (2D)
    - Wachspress koordináták
    - Mean Value koordináták
    - Általános séma
- 3. Baricentrikus függvény interpoláció
- 4. Alkalmazások

- 3D általánosítás (Szíjártó András)

1.1. HÁROMSZÖG

- **Feladat:** a sík pontjainak előállítása a háromszög csúcsainak affin kombinációjaként
- Möbius (1827)
- Biz. Tfh. $x = 0$

$$\hat{\mathbf{x}} = \lambda_1 \mathbf{v_1} + \lambda_2 \mathbf{v_2} + \lambda_3 \mathbf{v_3}$$

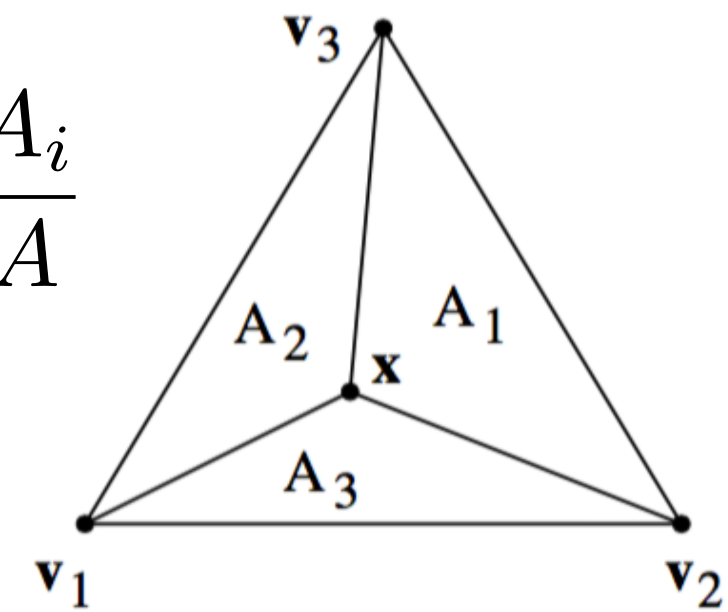
- Belátjuk, hogy $< \hat{x}, v_i >= 0$

$$2A_i = |v_{i-1}||v_{i-1}| \sin \alpha_i$$

- Használjuk, hogy

$$\sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \beta = \sin(\beta + \gamma)$$

$$\lambda_i = \frac{A_i}{A}$$



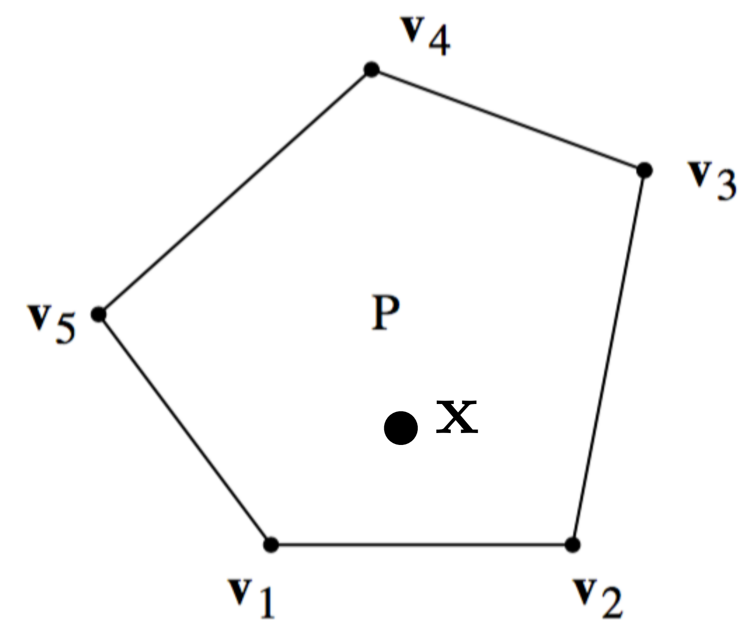
$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{v_1} + \lambda_2 \mathbf{v_2} + \lambda_3 \mathbf{v_3}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

2. ÁLTALÁNOSÍTOTT BARICENTRIKUS KOORDINÁTÁK

- Adott egy konvex poligon: $V = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$
- Szeretnénk a csúcsokhoz baricentrikus koordinátákat rendelni a következő tulajdonságokkal:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbf{x}) = 1 \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbf{x})\mathbf{v}_i = \mathbf{x}$$



- Lagrange tulajdonság: $\lambda_i(\mathbf{v}_j) = \delta_{ij}$
- Az oldalak mentén lineáris: $\mathbf{x} = \mu\mathbf{v}_i + (1-\mu)\mathbf{v}_j$

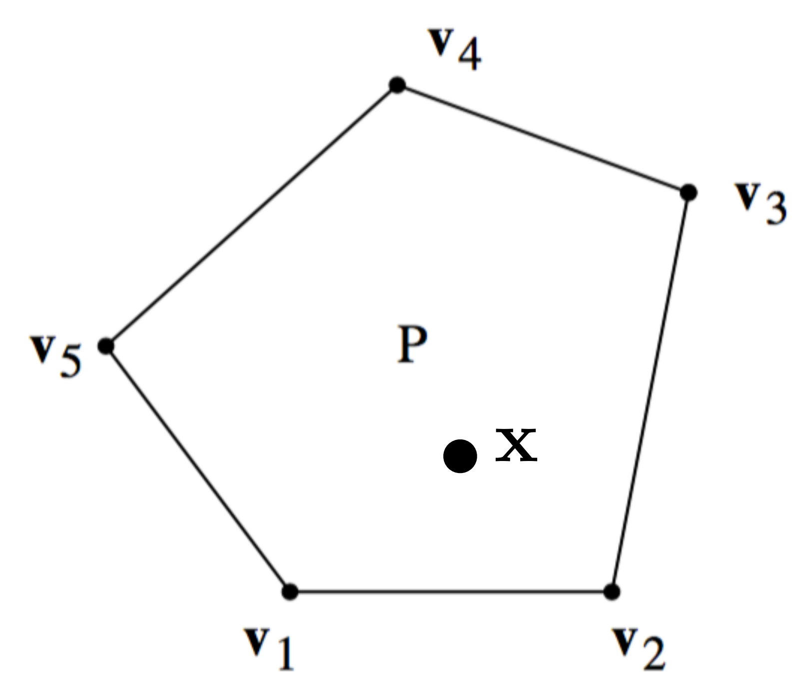
$$\lambda_i = (1-\mu)$$

$$\lambda_j = \mu$$

$$\lambda_k = 0, k \neq i, j$$

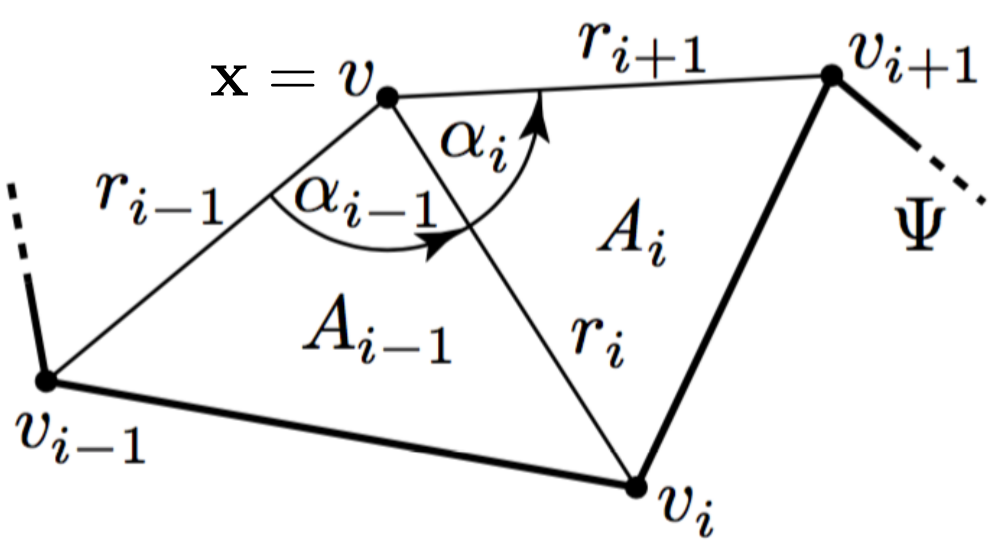
2.1. WACHSPRESS KOORDINÁTÁK

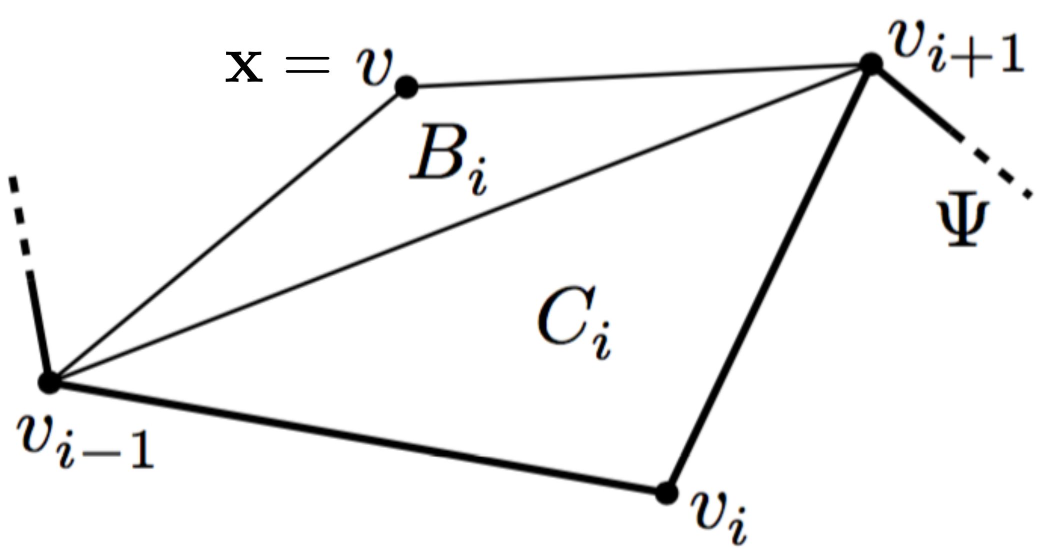
- $n > 3$-ra nem létezik polinom, ami a feltételeknek megfelel
- Racionális függvény már lehet!
- Wachspress 1975-ben talált megfelelő racionális függvényeket
- Eredeti formalizálás: nagyon bonyolult, mélyebb algebrai ismereteket igényel
- Egyszerűbb formalizáció:
  Meyer et. al 2002



2.1. WACHSPRESS KOORDINÁTÁK

➤ Háromszög területekkel számolható:





$$A_i = A_i(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1})$$

$$C_i = A(\mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1})$$

$$w_i(\mathbf{x}) = \frac{C_i}{A_{i-1}(\mathbf{x})A_i(\mathbf{x})}$$

$$\lambda_i(v) = \frac{w_i(v)}{\sum_{j=1}^{n} w_j(v)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbf{x})\mathbf{x}_i = \mathbf{x}$$

2.1. WACHSPRESS KOORDINÁTÁK

- Biz. $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbf{x})\mathbf{x}_i = \mathbf{x}$$
- Fejezzük ki x-et a három csúcs mint háromszög baricentrikus koordinátáival

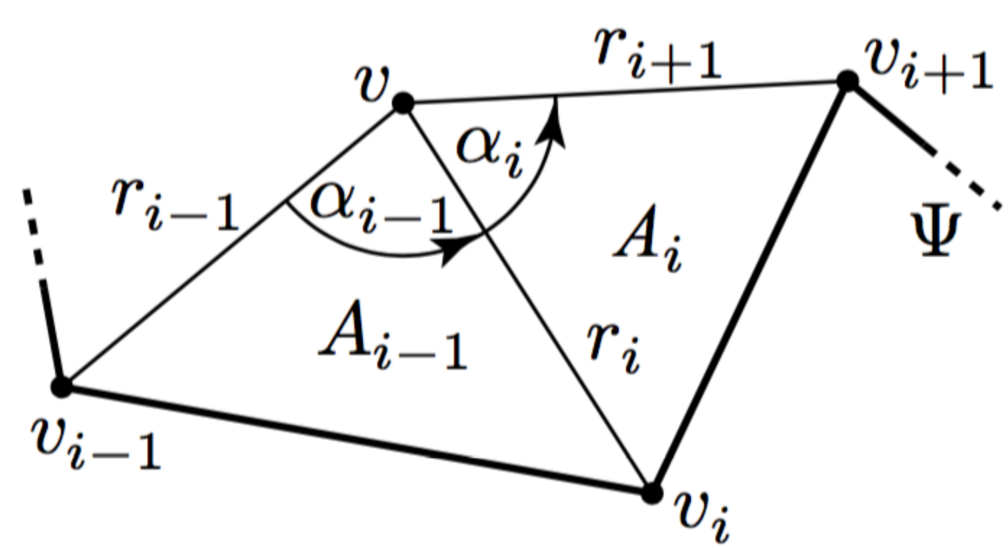
$$\mathbf{x} = \frac{A_i}{C_i}\mathbf{v}_{i-1} + \frac{(C_i - A_{i-1} - A_i)}{C_i}\mathbf{v}_i + \frac{A_{i-1}}{C_i}\mathbf{v}_{i+1}$$

- Rendezve

$$\frac{C_i}{A_{i-1}A_i}(\mathbf{v}_i - \mathbf{x}) = \frac{1}{A_{i-1}}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{i-1}) - \frac{1}{A_i}(\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i)$$

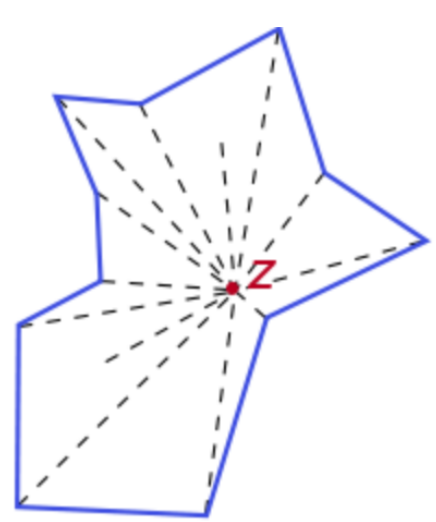
- Összegezzük i-re

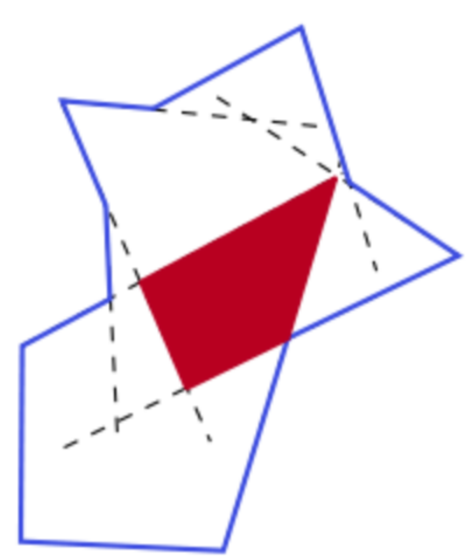
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{A_{i-1}A_i}(\mathbf{v}_i - \mathbf{x}) = 0,$$

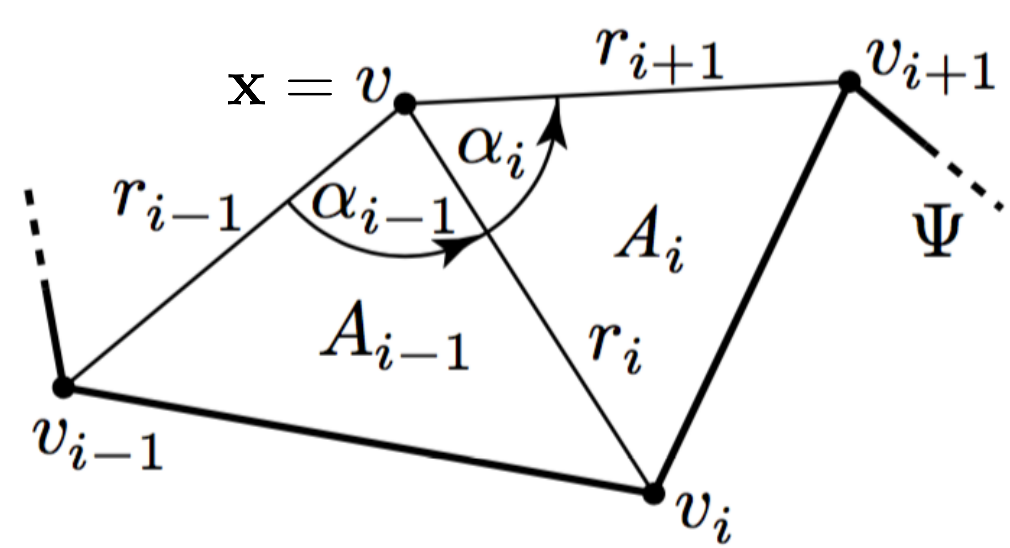


2.2. MEAN VALUE KOORDINÁTÁK

- Nem konvex poligonokra a Wachspress koordináták nincsenek értelmezve, vagy rossz eredményt adnak
- A Mean Value koordináták a csillagszerű sokszögekben pozitívak, minden és tulajdonságot kielégítenek
- Megadása szögfüggvényekkel: $w_i(\mathbf{x}) = \dfrac{\tan(\alpha_{i-1}/2) + \tan(\alpha_i/2)}{\|\mathbf{v}_i - \mathbf{x}\|}$







2.2. MEAN VALUE KOORDINÁTÁK, BIZ.

- 1. lépés: $\mathbf{e}_i := (\mathbf{v}_i - \mathbf{x})/\|\mathbf{v}_i - \mathbf{x}\|$ $\quad \mathbf{e}_i = (\cos\theta_i, \sin\theta_i)$
- 2. lépés: az egységnormál integrálja a körön nulla

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{n}(\theta)\, d\theta = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbf{x})(\mathbf{v}_i - \mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

- 3. Bontsuk fel az integrált:

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{n}(\theta)\, d\theta = \sum_{i=1}^{n} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \mathbf{n}(\theta)\, d\theta.$$

- 4. Kis számolással:

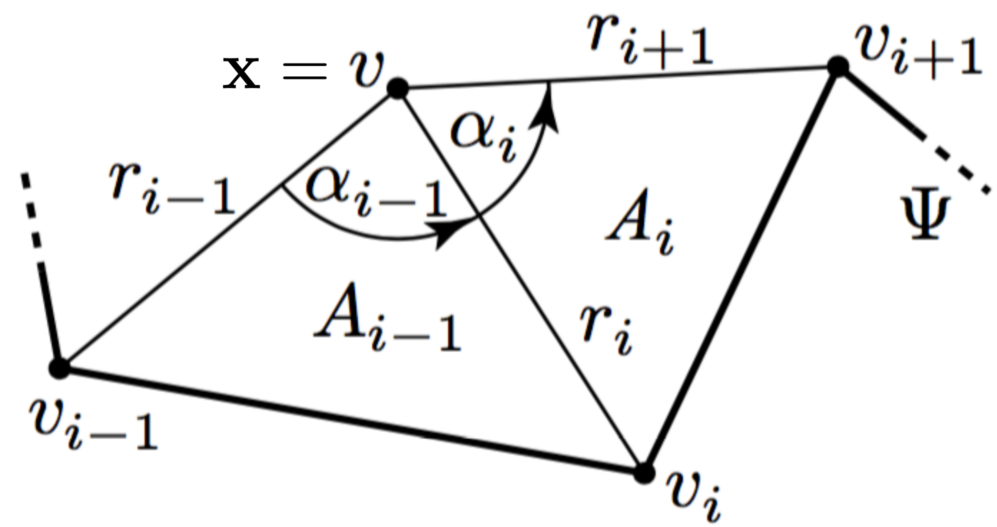
$$\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \mathbf{n}(\theta)\, d\theta = \frac{1-\cos\alpha_i}{\sin\alpha_i}(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i+1}) = \tan(\alpha_i/2)(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i+1})$$

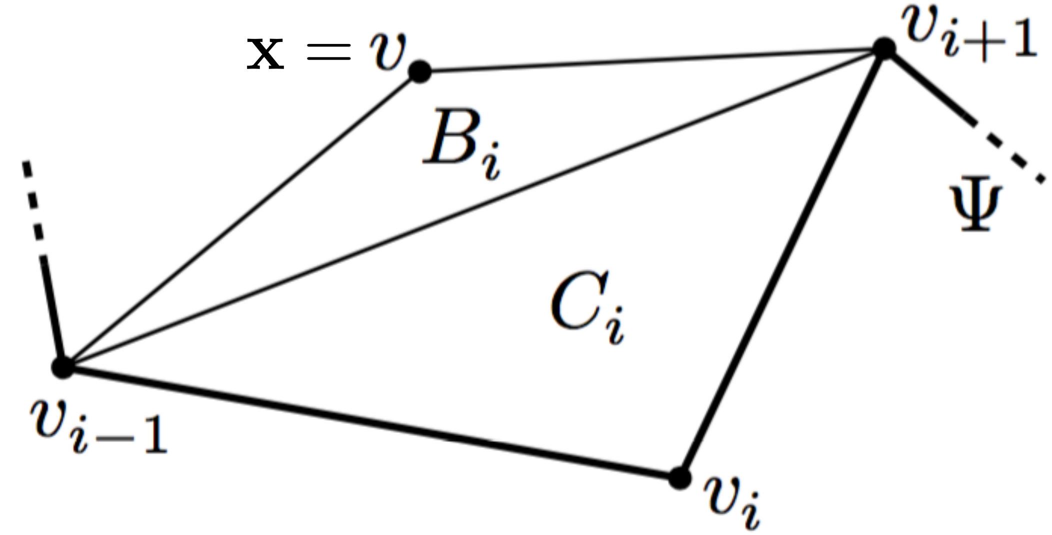
2.2. MEAN VALUE KOORDINÁTÁK

- Ez is számolható háromszögekkel!
- Nem biz.

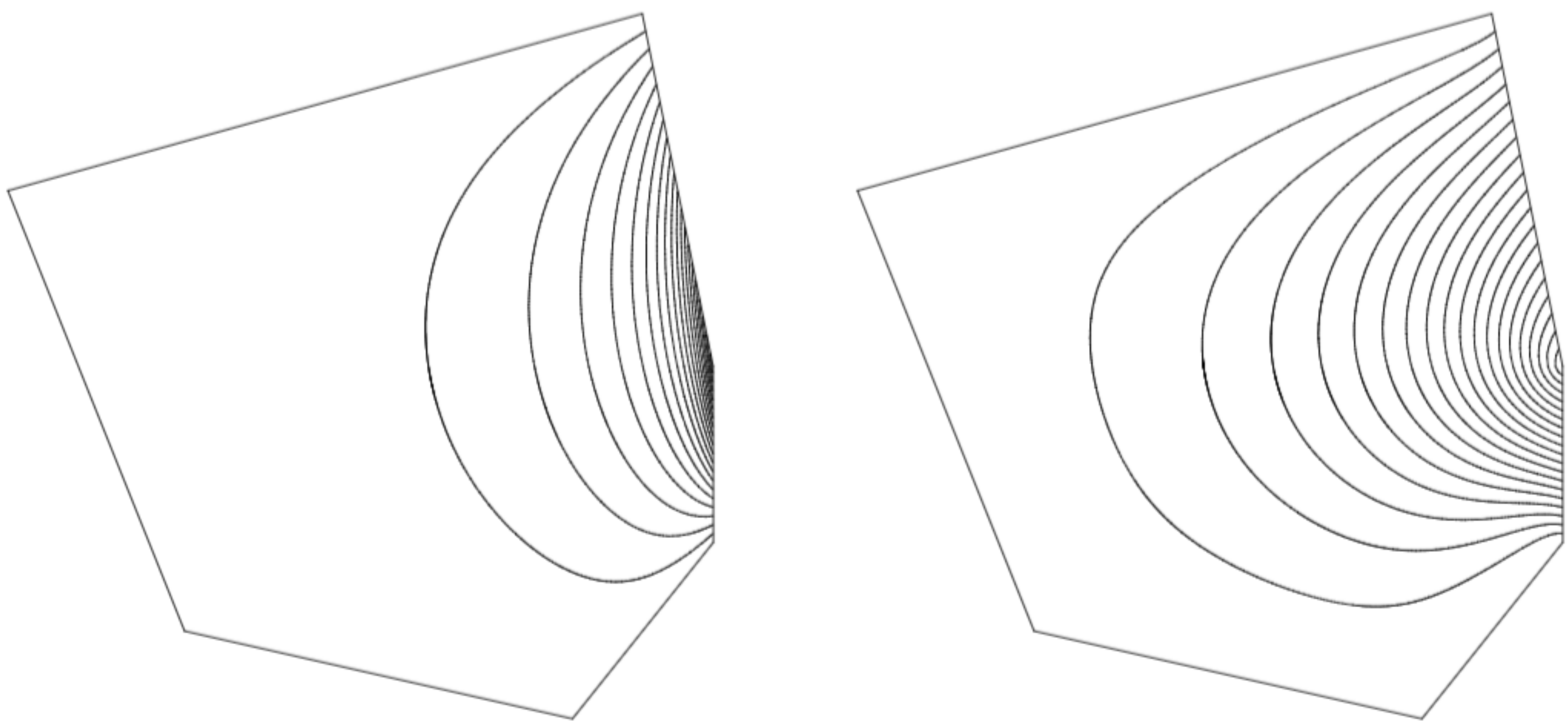
$$w_i = \frac{r_{i-1}A_i - r_iB_i + r_{i+1}A_{i-1}}{A_{i-1}A_i}$$

$$\lambda_i(v) = \frac{w_i(v)}{\sum_{j=1}^{n} w_j(v)}$$



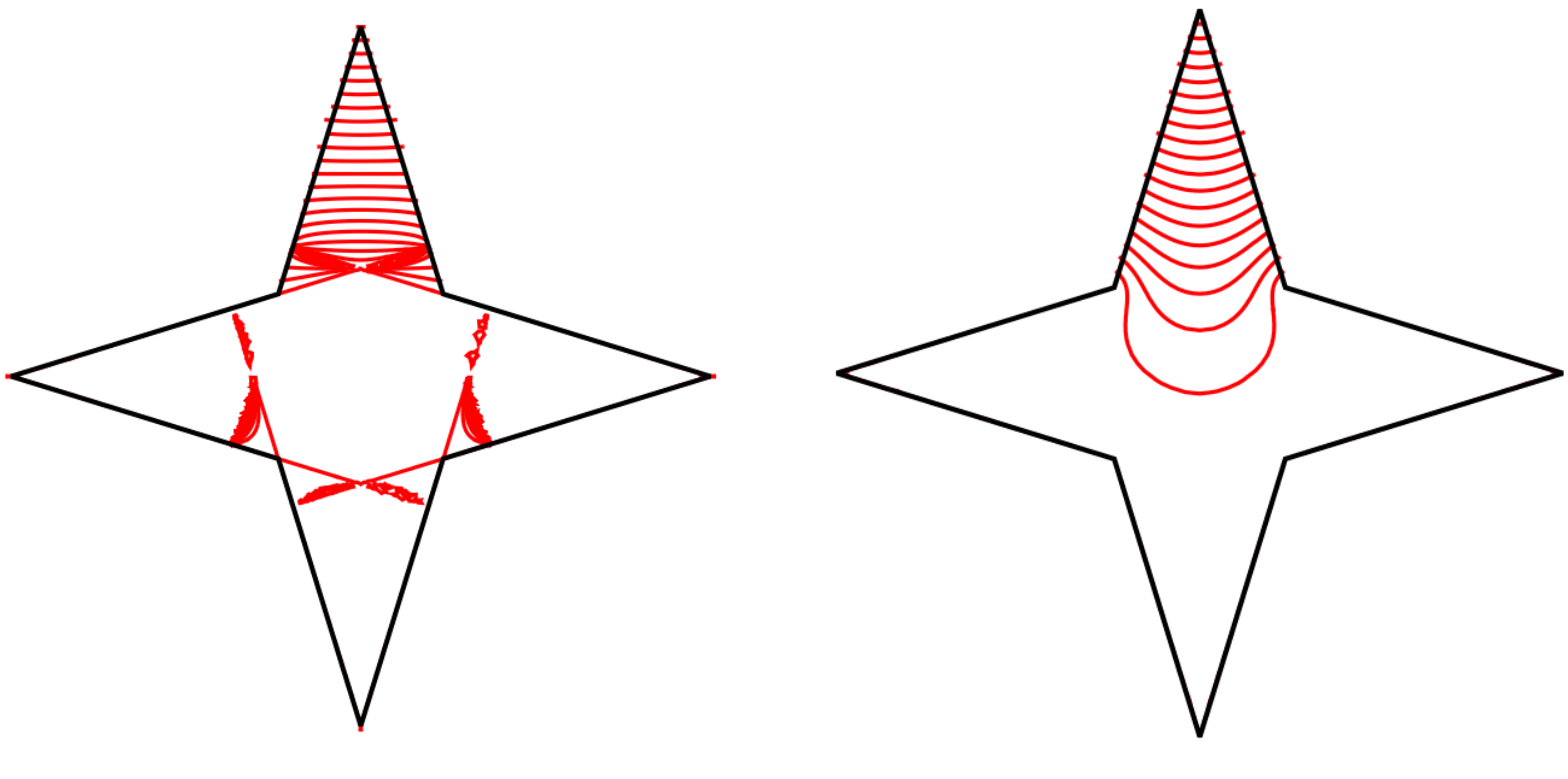


2.2. WACHSPRESS VS. MEAN VALUE



2.2. WACHSPRESS VS. MEAN VALUE

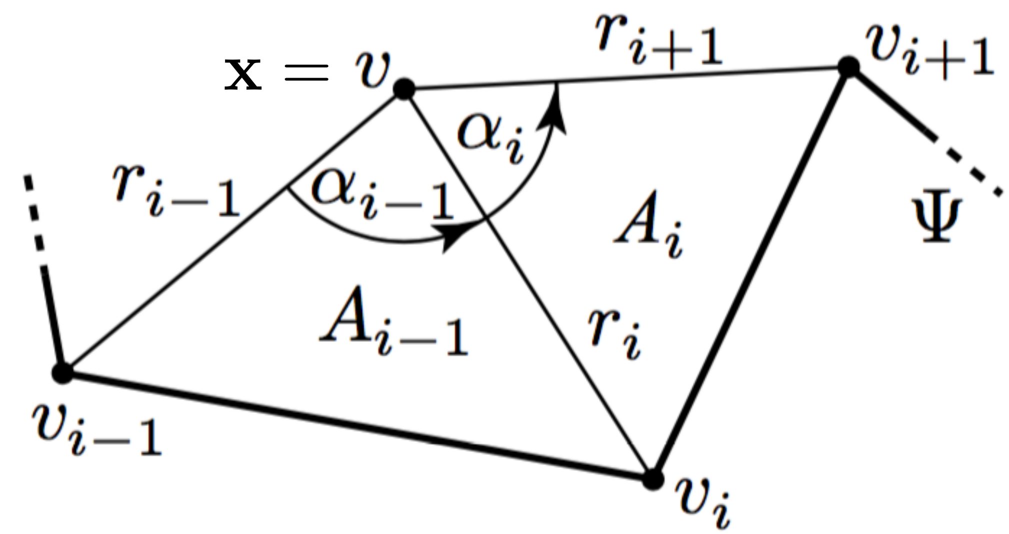
➤ A Wachspress csillagszerű esetben elfajul



2.3. ÁLTALÁNOS SÉMA

- Adható egy általános képlet is!

$$w_i = \frac{c_{i+1}A_{i-1} - c_i B_i + c_{i-1}A_i}{A_{i-1}A_i}$$



- Wachspress: $c_i = 1$
- Mean value: $c_i = r_i := \|\mathbf{v}_i - \mathbf{x}\|$
- Diszkrét harmonikus: $c_i = r_i^2$

2.4. EGYÉB BARICENTRIKUS

	Partition of Unity	Linear Reproduction	Lagrange	Concave	Positive (Convex)	Positive (Concave)	Smooth	Closed-Form
Wachspress	+	+	+	-	+	-		+
Mean Value	+	+	+	+	+	-		+
Discrete Harmonic	+	+	+	-	-	-		+
Positive Mean Value	+	+	+	+	+	+	C0	-
Harmonic	+	+	+	+	+	-		-
Biharmonic				+	+	-		-
Bounded Biharmonic				+	+	+		-
Bounded Biharmonic w\o Loc. Ext.				+	+	+		-
Cauchy-Green	+	+	-	+	+	+		+
Moving Least-Squares				+	+			+
Pos. Gordon-Wixom				+	+	+		+
Poisson				+	+			+
Maximum Entropy	+	+	+	+	+	+		-

3. BARICENTRIKUS FÜGGVÉNY INTERPOLÁCIÓ

- Feladat: egy függvény értékei ismertek a sokszög csúcsaiban, interpolálni szeretnénk a belsejében is

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) f(x_i)$$

- A csúcspontokban visszakapjuk a függvényt
- Ha f lineáris volt, akkor $g = f$
- Ha a sokszög egy folytonos határgörbéhez tart, akkor is jó

3. INTERPOLÁCIÓ UJJGYAKORLAT

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$x(0,0)$

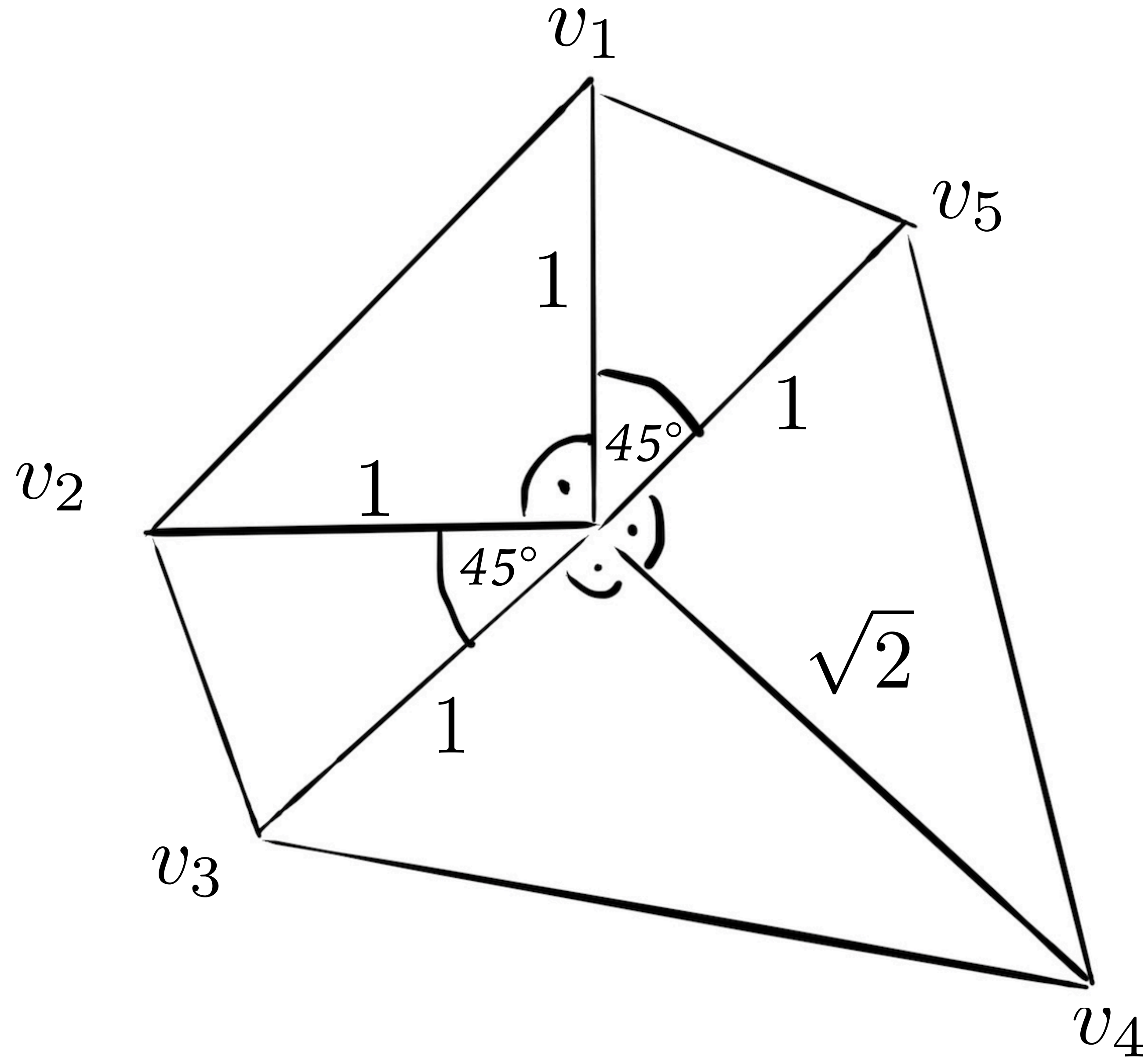
$v_1(0,1)$

$v_2(-1,0)$

$v_3(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

$v_4(1,-1)$

$v_5(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$



$tg(45) = 1$

$tg(22.5) = \sqrt{2} - 1$

$$w_i(\mathbf{x}) = \frac{\tan(\alpha_{i-1}/2) + \tan(\alpha_i/2)}{\|\mathbf{v}_i - \mathbf{x}\|}$$

$$\lambda_i(v) = \frac{w_i(v)}{\sum_{j=1}^{n} w_j(v)}$$

3. INTERPOLÁCIÓ UJJGYAKORLAT

$$w_1 = \frac{tg(22.5) + tg(45)}{1} = \frac{(\sqrt{2} - 1) + 1}{1} = \sqrt{2} = w_2 = w_3 = w_5$$

$$w_4 = \frac{tg(45) + tg(45)}{\sqrt{2}} = \frac{1 + 1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\sum w_i = 5\sqrt{2}$$

$$\lambda_i = \frac{1}{5}$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) f(x_i)$$

3. INTERPOLÁCIÓ UJJGYAKORLAT

$$w_1 = \frac{tg(22.5) + tg(45)}{1} = \frac{(\sqrt{2} - 1) + 1}{1} = \sqrt{2} = w_2 = w_3 = w_5$$

$$w_4 = \frac{tg(45) + tg(45)}{\sqrt{2}} = \frac{1 + 1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

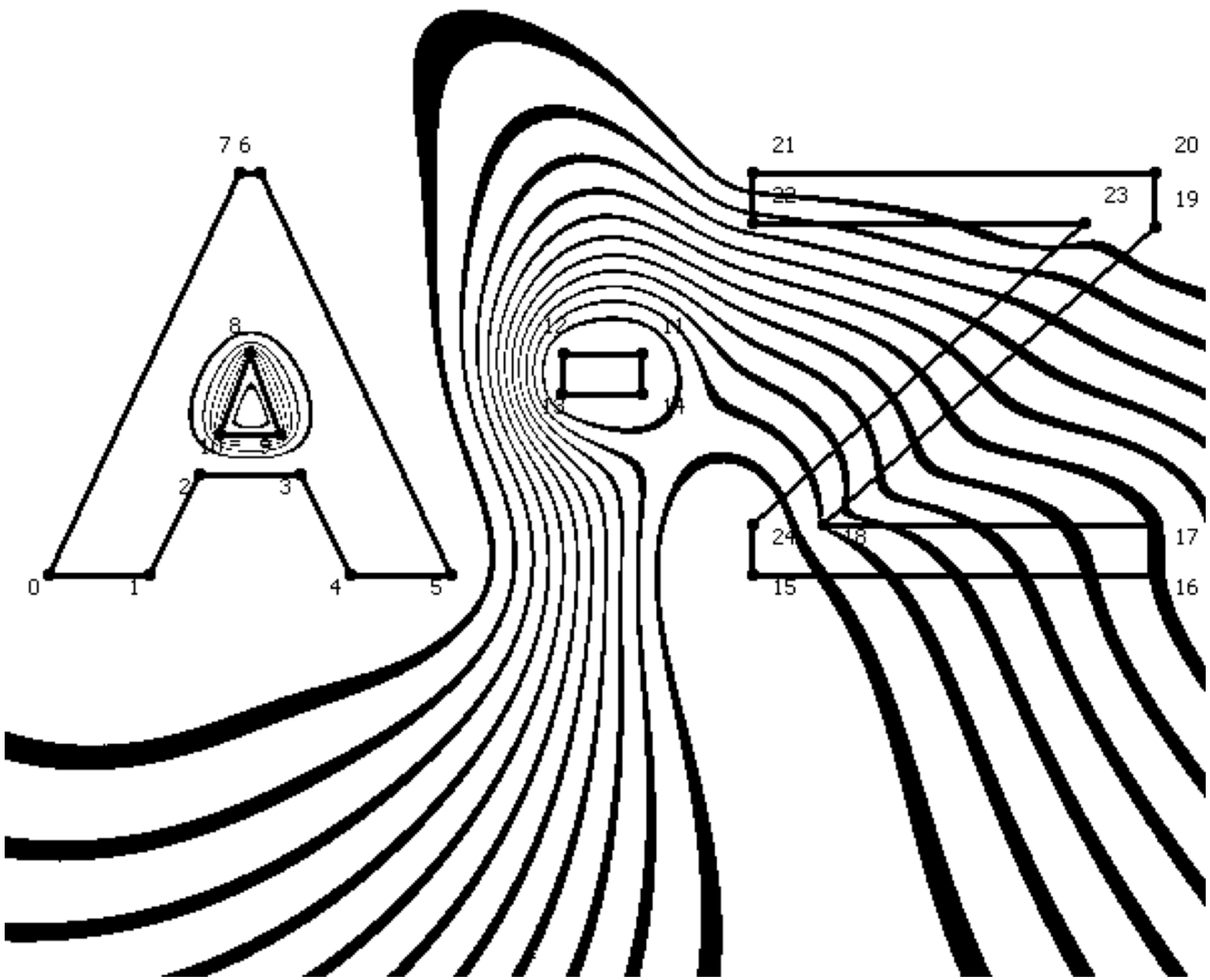
$$\sum w_i = 5\sqrt{2}$$

$$\lambda_i = \frac{1}{5}$$

$$f(v_1) = f(v_2) = f(v_3) = f(v_5) = 1 \qquad f(v_4) = 2$$

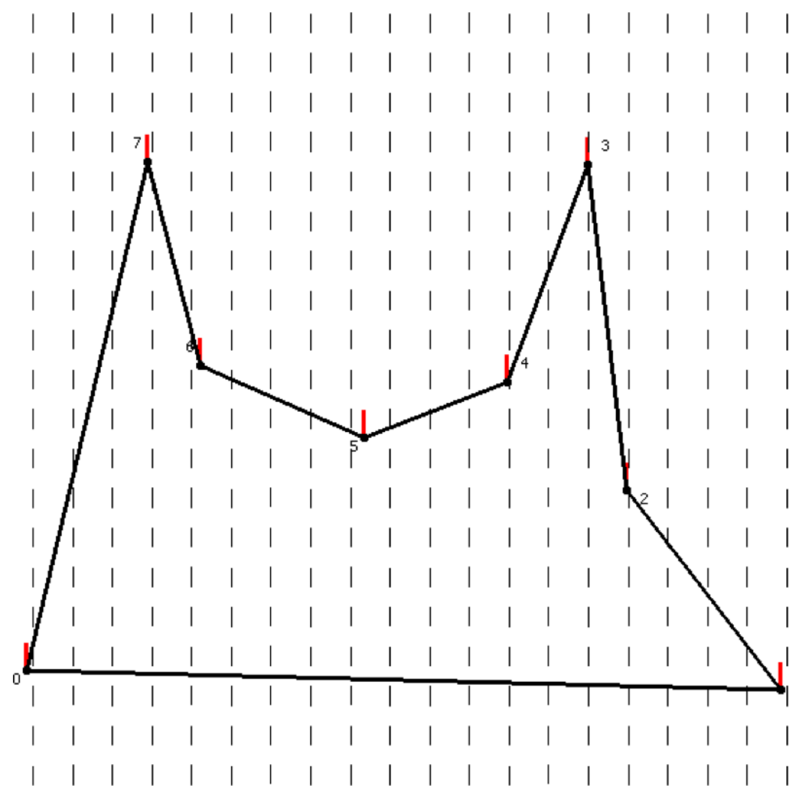
$$\hat{f}(0,0) = \frac{6}{5} \qquad f(0,0) = 0$$

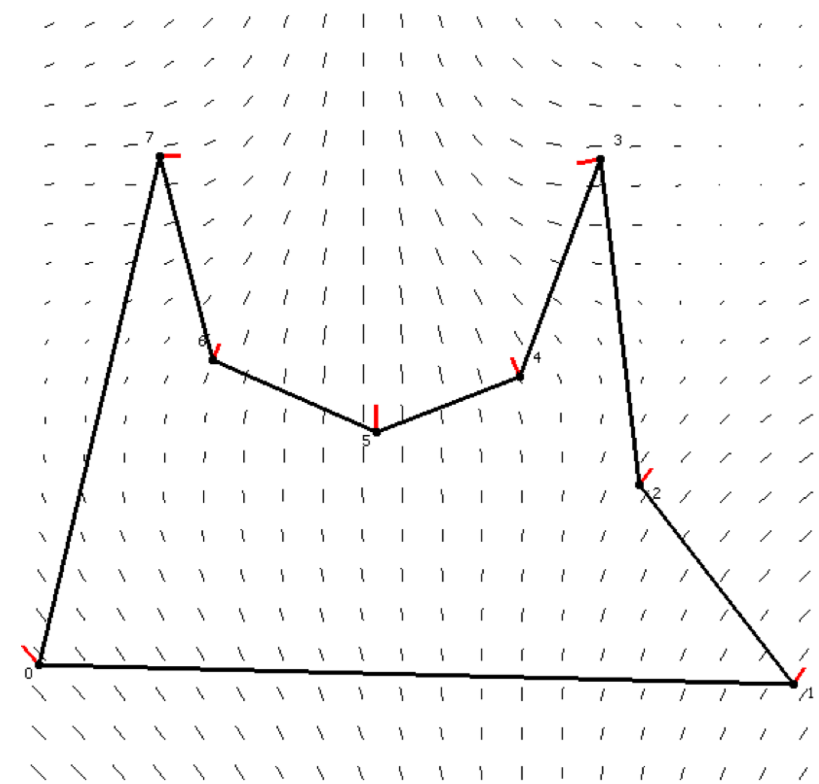
4. ALKALMAZÁSOK

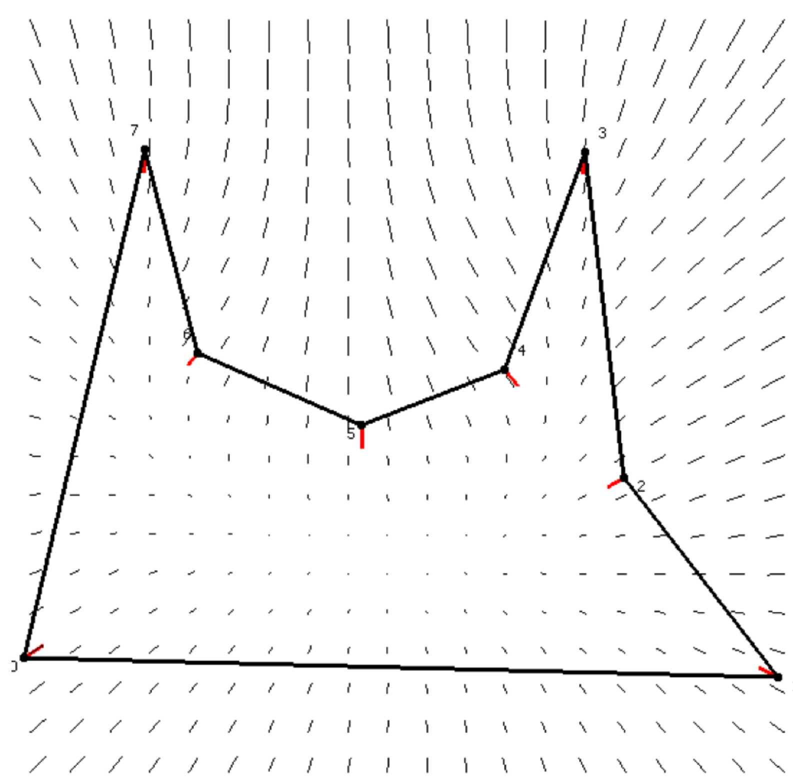


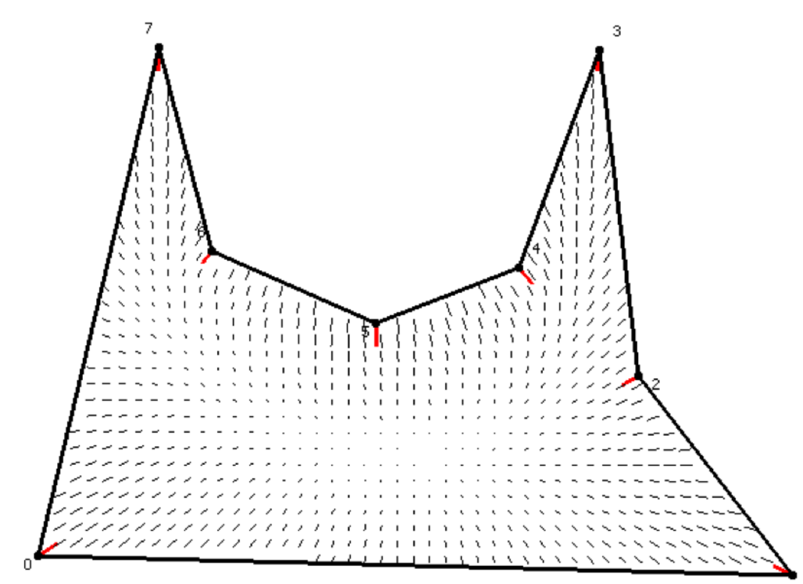
4. ALKALMAZÁSOK

4. ALKALMAZÁSOK

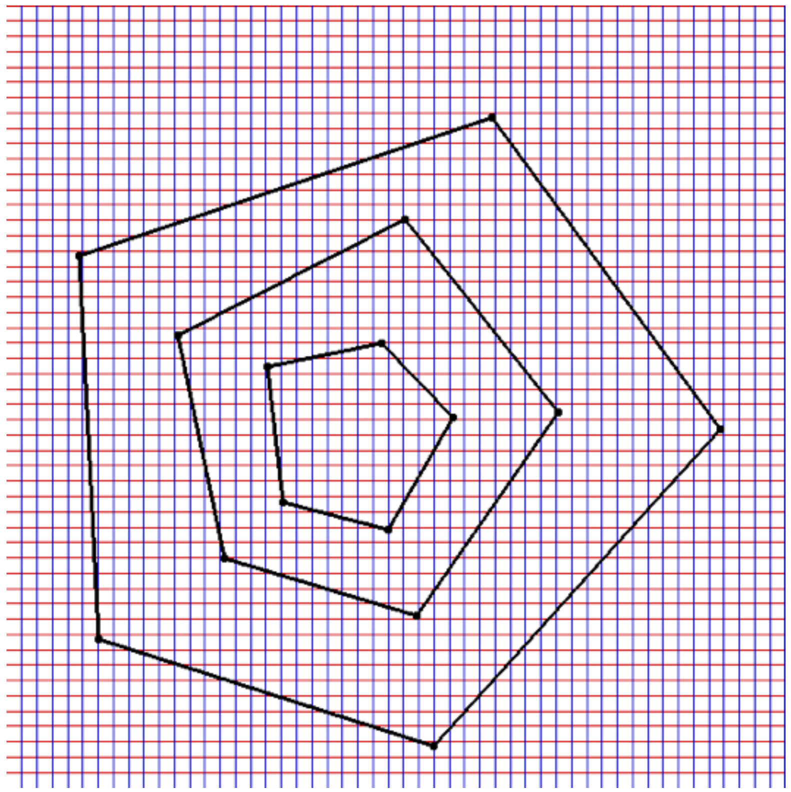


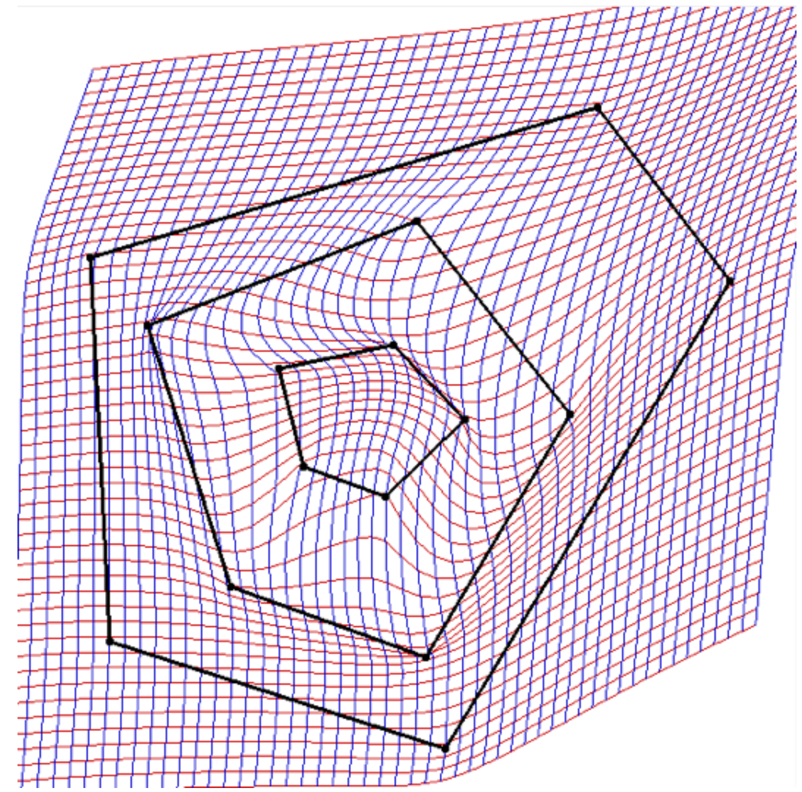


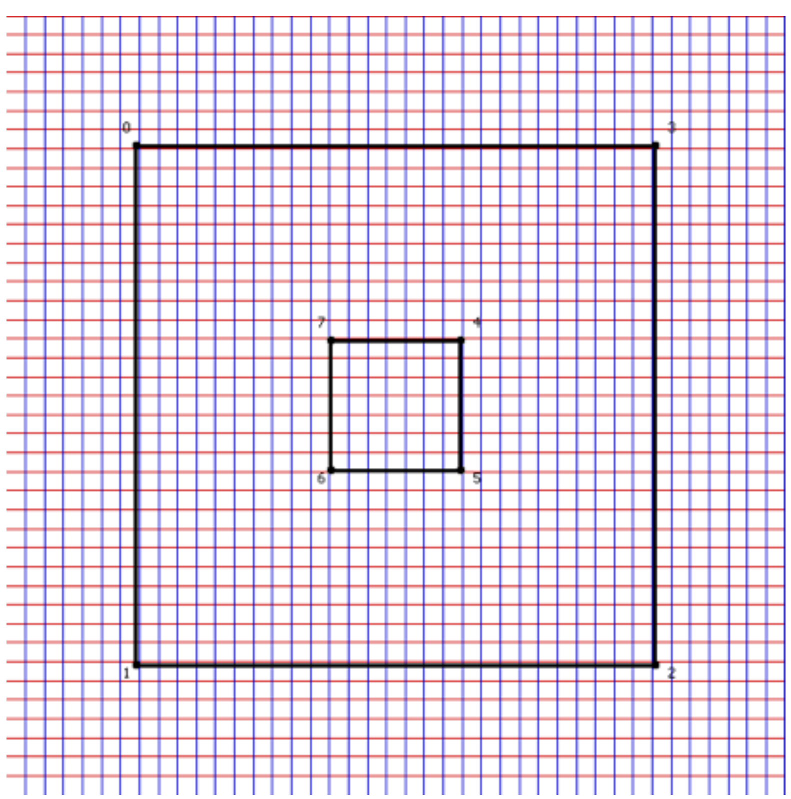


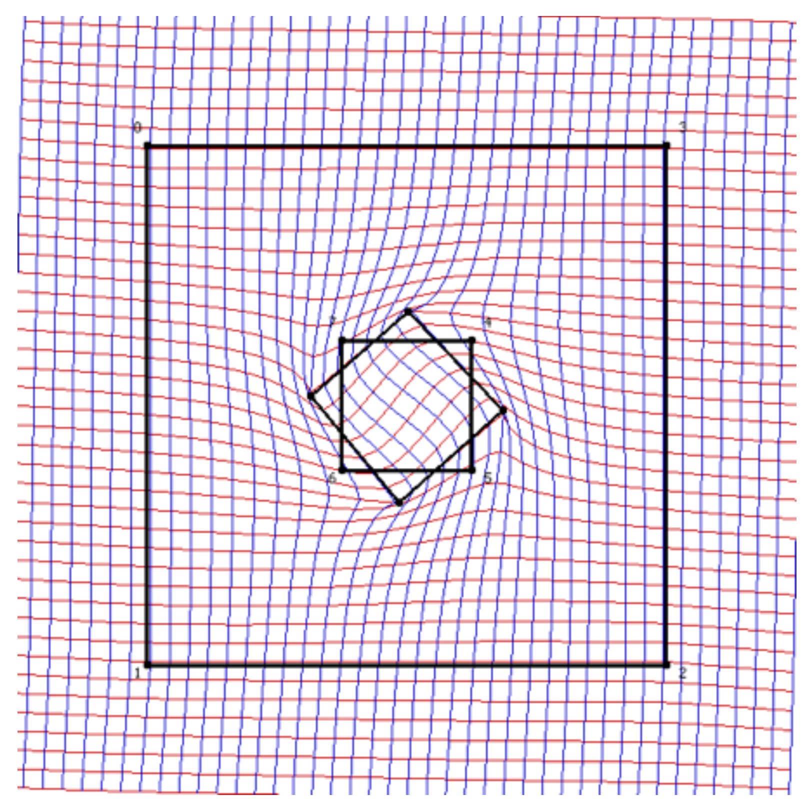


4. ALKALMAZÁSOK

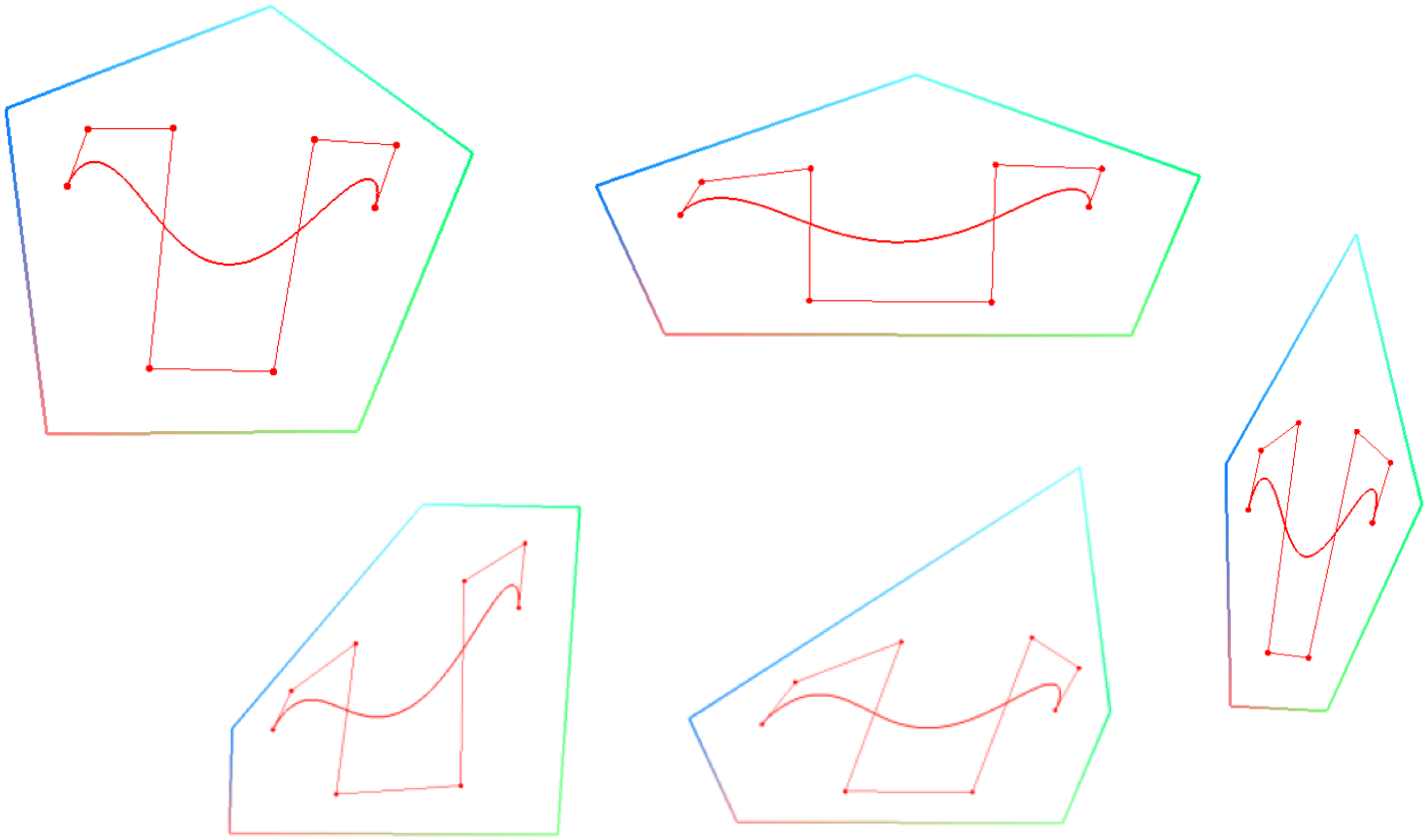








4. ALKALMAZÁSOK



4. ALKALMAZÁSOK

4. ALKALMAZÁSOK

4. ALKALMAZÁSOK