

3D Számítógépes Geometria II.

6. Görbék és felületek illesztése kényszerekkel

<http://cg.iit.bme.hu/portal/3dgeo2>

<https://www.vik.bme.hu/kepzes/targyak/VIII/V16>

Dr. Várady Tamás, Dr. Salvi Péter
BME, Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Irányítástechnika és Informatika Tanszék



Tartalom

I. rész

- motiváció, példák
- távolság mértékek
- a kényszerek egyenletrendszere és numerikus megoldása
- segédelemek alkalmazása
- „távolsághű” közelítés és hatékony reprezentáció

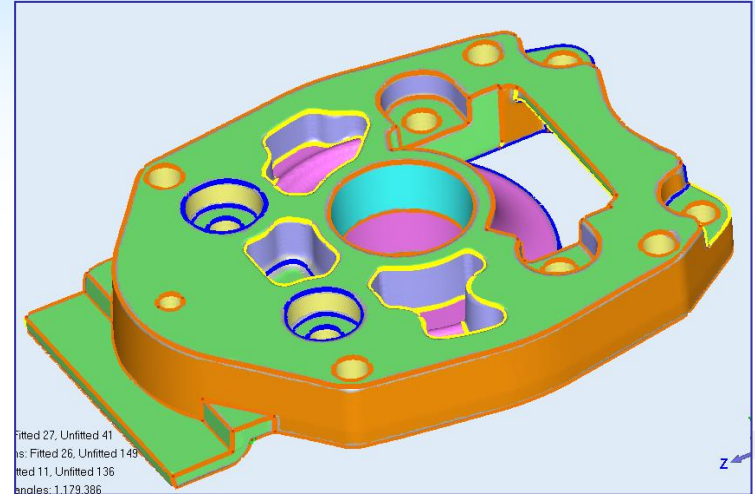
II. rész

- kényszerek automatikus felismerése és kezelése
- globális kényszerek – legjobb koordinátarendszerek, referencia rácsok, szimmetria síkok
- kényszerek szabadformájú görbék és felületek esetén

Alkatrészek tökéletesítése – mérnöki kényszerek

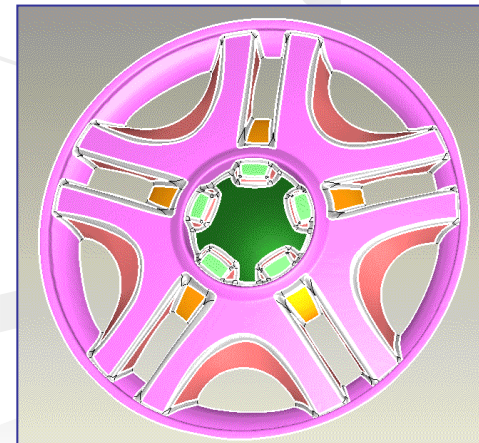
Digitális alakzat rekonstrukció

- input: szegmentált és klasszifikált pontthalmazok
- görbék és felületek illesztése **külön-külön**
- hibaforrások – zajos adatok, pontatlan szegmentálás, numerikus algoritmusok
- CAD alkalmazások - „tökéletes” modellekre van szükség
- mérnöki kényszerek → több görbe és felülete **együttes** illesztése



Kényszerek:

- merőleges,
- párhuzamos
- érintőleges
- koncentrikus
- kerekített érték
- rácspontba rendezett....



2D-s példa₁

Három csatlakozó körív - kényszerek

1a. $c_1 - c_2$ közös végpont

1b. $c_2 - c_3$ közös végpont

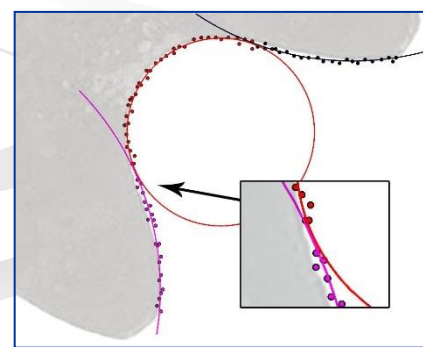
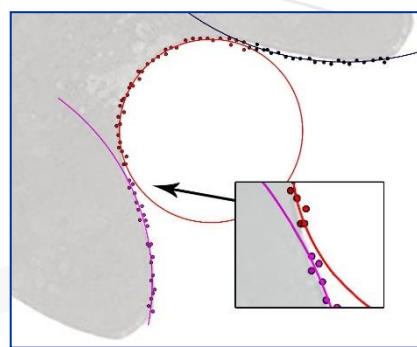
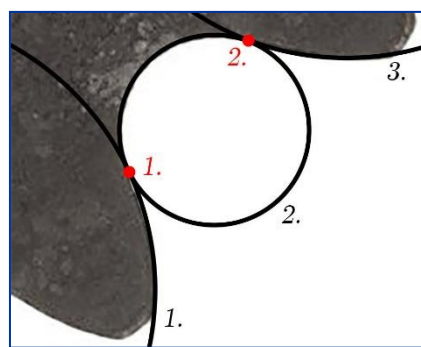
2a. $c_1 - c_2$ közös érintő

2b. $c_2 - c_3$ közös érintő

3a. $r_1 = k_1 * 10$

3b. $r_2 = k_2 * 10$

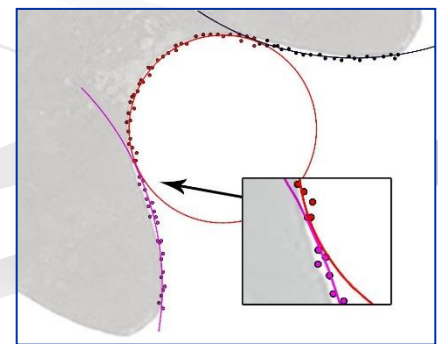
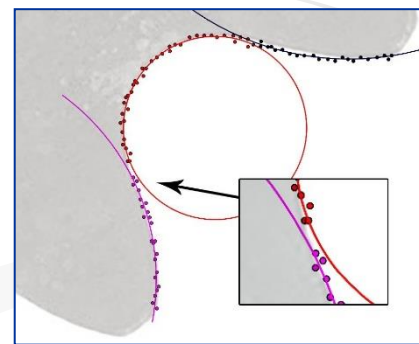
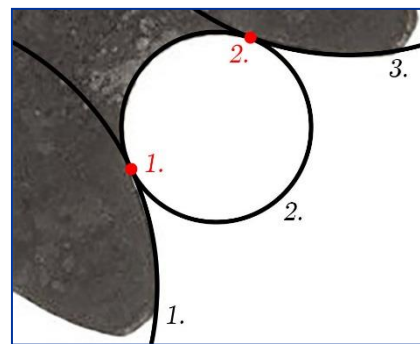
3c. $r_3 = k_3 * 10$



2D-s példa₂

Numerikus analízis

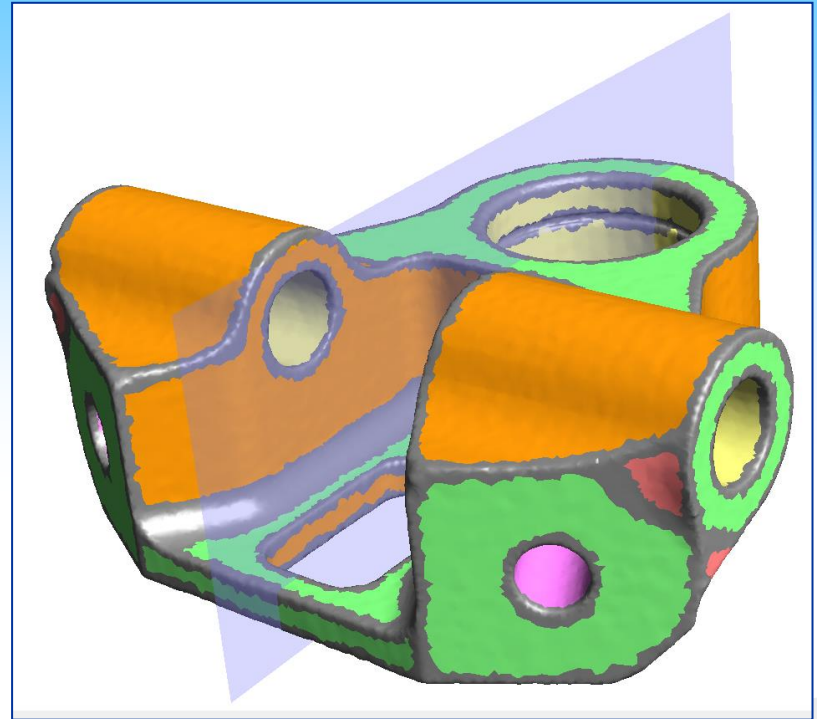
	Independent fit	Tangential constraints	Tangential and 'radii are multiple of 10' constraints
Radius 1 (r_1)	125.762	155.810	160
Radius 2 (r_2)	50.590	51.683	50
Radius 3 (r_3)	145.962	156.278	160
Average deviation from data points	0.996	1.046	1.132
Error of 1st tangential constraint	2.142	0	0
Error of 2nd tangential constraint	1.010	0	0
Error of ' r_1 multiple of 10' constraint	4.238	4.190	0
Error of ' r_2 multiple of 10' constraint	0.590	1.683	0
Error of ' r_3 multiple of 10' constraint	4.038	3.722	0



3D-s példa

Potenciális problémák

- a felületek nem illeszkednek egy „természetes” derékszögű koordinátarendszerbe
- sík felületek - nem párhuzamosak és nem merőlegesek
- a „vízszintes” hengerfelületek tengelye nem azonos
- az eltolásos felületek profilja és az eltolás iránya különbözik
- a hátsó, egymásba ágyazott hengerek nem koncentrikusak és nem merőlegesek az alapsíkra
- a sugárértékek nem egész számok
- a modell nem szimmetrikus, stb.



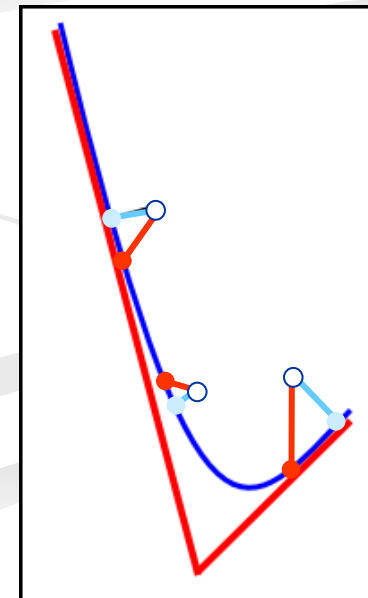
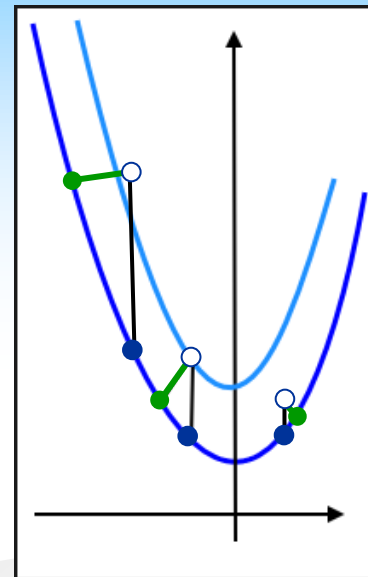
Távolság mértékek

Legkisebb négyzetes (lsq) távolság minimalizálás:

- $\{\mathbf{P}_i = (x_i, y_i)\}, i = 0, \dots, M; \rightarrow \min \sum d_i^2$
- **függvény:** $y = f(x); \min \sum (f(x_i) - y_i)^2$
- **implicit (algebrai):** $F(x, y) = 0; \min \sum F(x_i, y_i)^2$
- **parametrikus:** $\mathbf{r}(t); \{t_i\}, i = 0, \dots, M; \min \sum (\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{P}_i)^2$
- **euklideszi:** $\mathbf{r}(t); \min \sum (\mathbf{r}(\tau_i) - \mathbf{P}_i)^2$

Kiindulás – valamilyen görbeprezentáció,
ismeretlen görbeparaméterek

- $y = f(x) = ax^2 + bx + c; \Rightarrow \{a, b, c\}$
- $F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0; \Rightarrow \{a, b, c, d, e, f\}$
- $\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^2 \mathbf{c}_i B_i^2(t); \Rightarrow \{\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$
- $\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^2 \mathbf{c}_i B_i^2(t); \Rightarrow \{\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, [\{\tau_i\}, 0 = 1, \dots, M]\}$



Kör illesztés - távolságok

- A kör implicit egyenlete: $F(x, y) = (x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 - R^2 = 0$

- Adatpontok: $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$

- Minimalizálandó: $\sum d^2(x_i, y_i)$

- Euklideszi távolság:

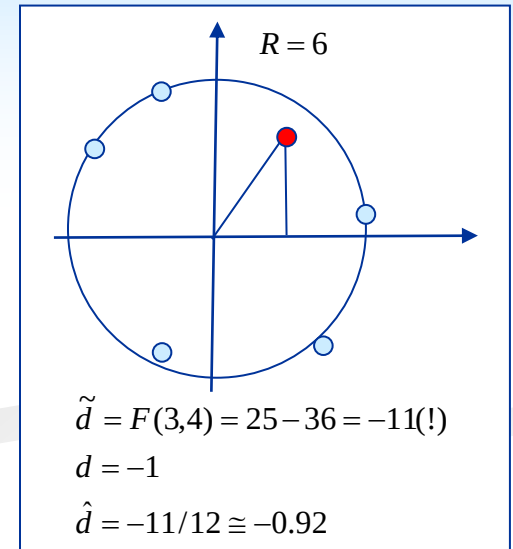
$$d(x_i, y_i) = \sqrt{(x_i - c_x)^2 + (y_i - c_y)^2} - R = \sqrt{h} - R$$

- Algebrai távolságfüggvény: $\tilde{d}_i = F(x_i, y_i)$

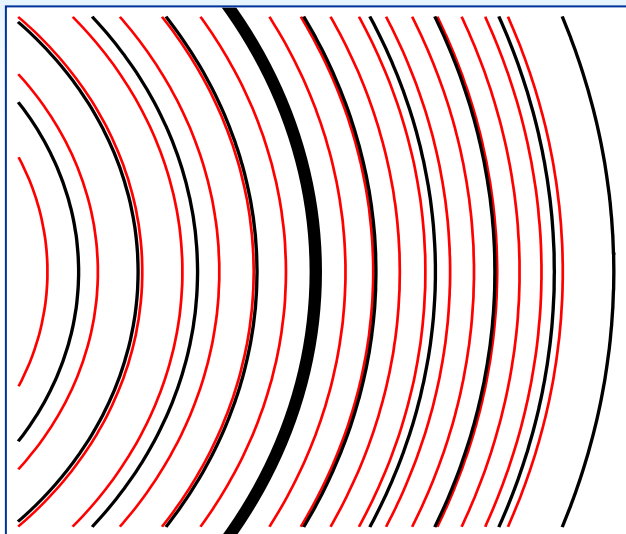
- Szükséges egy normalizálási feltétel (a felület közelében jól közelíti az euklideszi távolságot): $|(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})| = 1$

- Vagy egy alternatív „távolsághű” definíció (nincs gyök!):

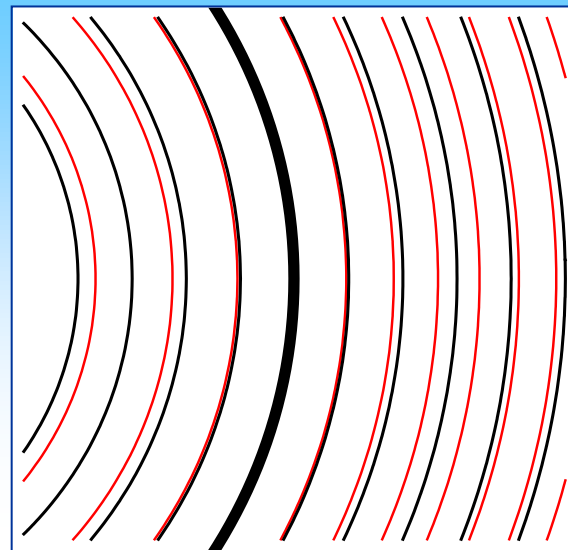
$$\hat{d}(x_i, y_i) = \frac{(\sqrt{h} - R)(\sqrt{h} + R)}{\sqrt{h} + R} \cong \frac{h - R^2}{2R} = \frac{(x_i - c_x)^2 + (y_i - c_y)^2 - R^2}{2R}$$



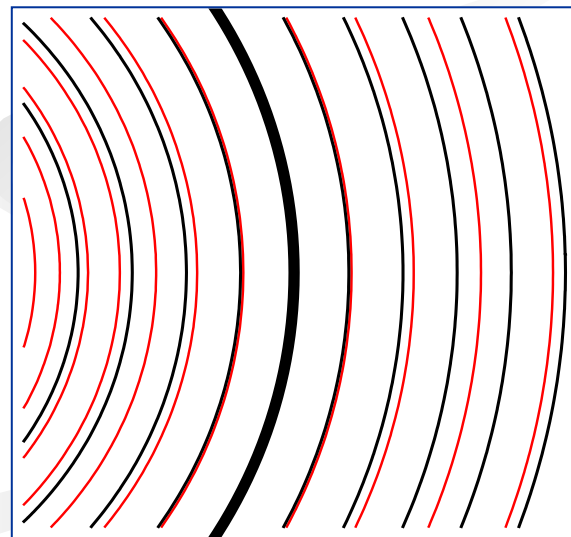
Kör távolságtér₁



Fekete: euklideszi távolság
Piros: Algebrai távolság



Piros: Gradiens normalizálás

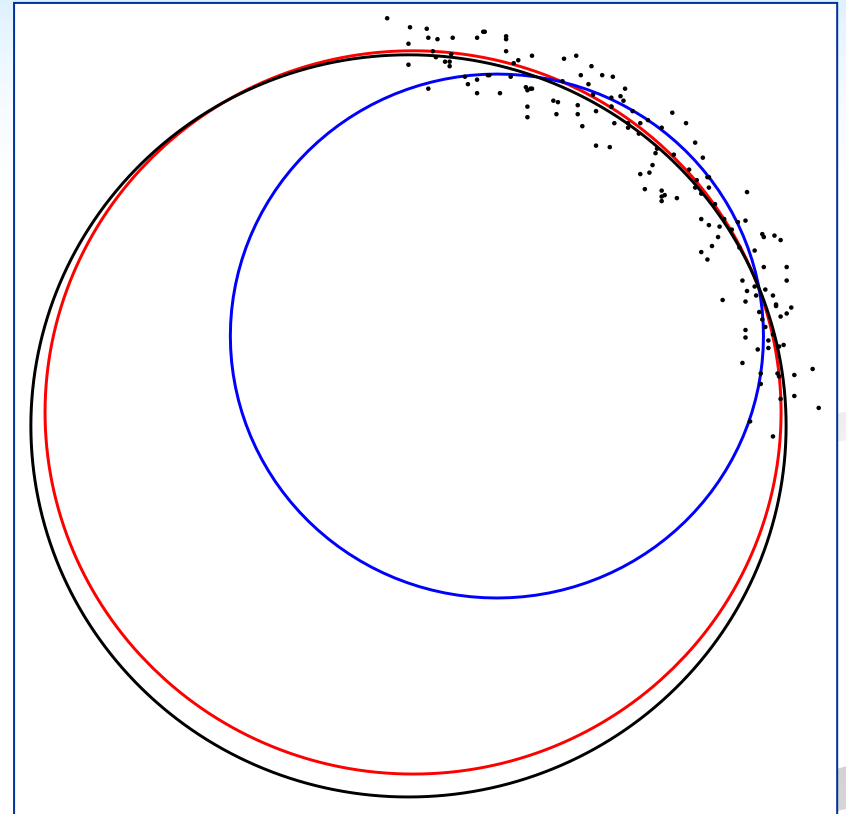


Piros: távolsághű közelítés

Kör távolságtér₂

Illesztési adatok

- Eredeti kör + zaj (fekete):
 $o = (1.0, 0.5)$, $R = 1.0$,
Összhiba: 7.042
- Fit algebrai távolsággal (kék):
 $o = (1.233, 0.741)$, $R = 0.706$,
Összhiba: 8.297
- Fit euklideszi távolsággal (piros):
 $o = (1.01, 0.535)$, $R = 0.974$,
Összhiba: 6.977



Egyenes (sík) illesztés

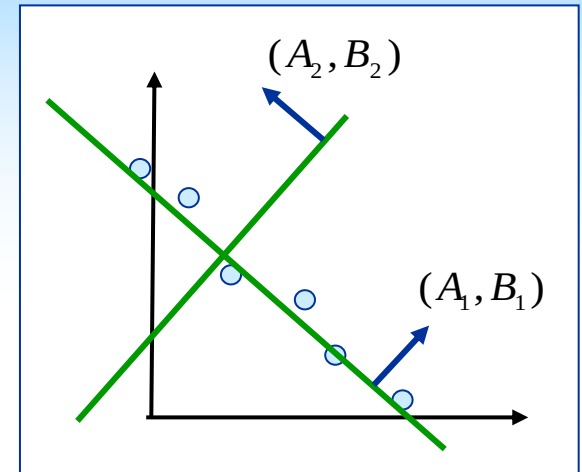
Adott pontok: $\{(x_i, y_i)\}$

Egyenes egyenlete: $Ax + By + C = 0$

Minimalizálandó: $S(A, B, C) = \sum d_i^2 = \sum (Ax_i + By_i + C)^2$

$$\frac{\partial S}{\partial A} = \dots = 0, \frac{\partial S}{\partial B} = \dots = 0, \frac{\partial S}{\partial C} = 2 \sum (Ax_i + By_i + C) = 0,$$

$$nC = -A \sum x_i - B \sum y_i = -Ax_0 - By_0 \dots$$



Módosított feladat (súlyponti korrekció):

$$\bar{x}_i = x_i - \frac{x_0}{n}, \bar{y}_i = y_i - \frac{y_0}{n}, \quad \sum (A\bar{x}_i + B\bar{y}_i)^2 = \min.$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \geq 0, & \rightarrow \mathbf{s}_1 = (A_1, B_1), \\ \lambda_2 \geq \lambda_1, & \rightarrow \mathbf{s}_2 = (A_2, B_2) \end{aligned}$$

Normalizálási kényszer - (A,B) egységvektor: $A^2 + B^2 = 1$

Megoldás: $\mathbf{s} = [A, B]$,

$$\mathbf{s} \mathbf{M} \mathbf{s}^T = [A, B] \begin{bmatrix} \sum \bar{x}_i^2 & \sum \bar{x}_i \bar{y}_i \\ \sum \bar{x}_i \bar{y}_i & \sum \bar{y}_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \min, \quad \mathbf{s} \mathbf{D} \mathbf{s}^T = [A, B] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 1.$$

Minimalizálás kényszerekkel

Direkt megoldás

Meghatározandó paraméterek: $\mathbf{s} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

Össztávolság függvény,
együttható mátrix:

$$\sum d_i^2 = \mathbf{sMs}^T = \min.$$

Kényszer mátrix: $\mathbf{sDs}^T = 1$

Minimalizálandó: $H(\mathbf{s}, \lambda) = \mathbf{sMs}^T - \lambda(\mathbf{sDs}^T - 1) = \min.$

1. Lagrange multiplikátor:

- $n+1$ ismeretlen, **nemlineáris** egyenletrendszer

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{s}} = \left(\frac{\partial H}{\partial a_1}, \frac{\partial H}{\partial a_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial a_n} \right) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0$$

2. Sajátérték, sajátvektor:

- megoldás: karakterisztikus polinom vagy iteratív

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{s}} = 0, \quad \mathbf{Ms}^T = \lambda \mathbf{Ds}^T, \rightarrow \mathbf{D}^{-1} \mathbf{Ms}^T = \lambda \mathbf{s}^T, \quad (*)$$

- $\mathbf{A}$ sajátértéke

→ $\mathbf{A}$ sajátvektora:

$$\mathbf{As} = \lambda \mathbf{s}, \quad \mathbf{As} = \lambda \mathbf{Is}, \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{s} = 0, \quad a_{ii} \rightarrow a_{ii} - \lambda$$

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

$$(\lambda_i, \mathbf{s}_i), \quad \lambda_{\min} \geq 0, \quad \lambda_{\min} = \sum d_i^2 \quad (*) \text{ feltéve, hogy } \mathbf{D} \text{ invertálható!}$$

Illesztés kényszerekkel₁

Iteratív megoldás

- Szegmentált tartományok
 - az i -edik tartomány pontjai : $\{p_{ij}\}, j = 1, \dots, n_i$
 - az i -edik felület: S_i
- Általános illesztési feladat,
az osztávolság függvény:
$$f(\mathbf{x}) = \sum_i \alpha_i \sum_j d(p_{ij}, S_i)^2 = \min$$
- Súlyozó tényező: (i) $\alpha_i = \frac{1}{n_i}$; (ii) $\alpha_i = \frac{1}{Area_i}$
- Paramétervektor (a felületek összes paraméterei): $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$
- Kényszer egyenletek: $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = (c_1(\mathbf{x}), \dots, c_k(\mathbf{x}))$
- Probléma:
 - több kényszer, mint szabad paraméter; ezek ellentmondhatnak
 - prioritási sorrend: c_1 a legfontosabb, c_k a legkevésbé fontos

Két egyenes példa₁

Illesszünk két egymásra merőleges egyenest

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad \{x_k, y_k\}_{k=1}^{n_1}$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad \{x_l, y_l\}_{l=1}^{n_2}$$

$$\mathbf{x} = (A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$$

Kényszer egyenletek

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

$$c1: A_1^2 + B_1^2 - 1 = 0$$

- normalizál

$$c2: A_2^2 + B_2^2 - 1 = 0$$

- normalizál

$$c3: A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

- merőleges

Illesztés kényszerekkel_{2a}

- Megoldandó: $f(\mathbf{x}) = \min, \quad \mathbf{c}(\mathbf{x}) = 0$
- Nemlineáris egyenletrendszer; linearizálás $\rightarrow$ módosított Newton iteráció
- Jelenlegi paraméter vektor: $\mathbf{x}_0$, új érték: $\mathbf{x}_0 + \mathbf{d}$, keressük a $\mathbf{d}$ vektort

- Sorfejtés: $\mathbf{c}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{d}) \approx \mathbf{c}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{c}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{d} = 0$

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{d}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^T \mathbf{f}''(\mathbf{x}_0)\mathbf{d} = \min$$

- Kényszer egyenletek: $c_1(\mathbf{x}_0 + \mathbf{d}) \approx c_1(\mathbf{x}_0) + \mathbf{c}'_1(\mathbf{x}_0)\mathbf{d} = \left(\frac{\partial c_1}{\partial d_1}, \frac{\partial c_1}{\partial d_2}, \dots, \frac{\partial c_1}{\partial d_n} \right) \mathbf{d} + c_1(\mathbf{x}_0)$
 $\vdots$

$$c_k(\mathbf{x}_0 + \mathbf{d}) \approx c_k(\mathbf{x}_0) + \mathbf{c}'_k(\mathbf{x}_0)\mathbf{d} = \left(\frac{\partial c_k}{\partial d_1}, \frac{\partial c_k}{\partial d_2}, \dots, \frac{\partial c_k}{\partial d_n} \right) \mathbf{d} + c_k(\mathbf{x}_0)$$

- Új jelölések: $\mathbf{d} \Rightarrow \tilde{\mathbf{d}} = (d_1, \dots, d_n, 1)^T, \mathbf{C} = [\mathbf{c}'(\mathbf{x}_0) \mid \mathbf{c}(\mathbf{x}_0)]$

- Mátrix alakban: $\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{d}} = 0,$

Illesztés kényszerekkel_{2b}

- Minimalizálandó: $f(\mathbf{x}) = \min, \quad \mathbf{c}(\mathbf{x}) = 0$

- Sorfejtés:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{d}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^T \mathbf{f}''(\mathbf{x}_0)\mathbf{d}$$

$$\mathbf{f}' = \left\{ \frac{df}{\partial d_i} \right\} \quad \mathbf{f}'' = \left\{ \frac{d^2 f}{\partial d_i \partial d_j} \right\} \quad i, j = 1, \dots, n$$

- Új jelölés: $\tilde{\mathbf{d}} = (d_1, \dots, d_n, 1)^T$

- A sorfejtés utolsó két tagját minimalizáljuk, mátrixalakban:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}''(\mathbf{x}_0) & \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) \\ \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)^T & 0 \end{bmatrix} \quad [n+1 \times n+1]$$

$$\tilde{\mathbf{d}}^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{d}} = \min.$$

Két egyenes példa₂

i -edik lépés

$$\mathbf{x}^i = (A_1^i, B_1^i, C_1^i, A_2^i, B_2^i, C_2^i)$$

$$\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6) \quad - \text{ ismeretlen delta értékek}$$

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \mathbf{d}$$

Össztávolság kifejezés

$$f(\mathbf{x}^i) = \sum_{k=1}^{n_1} (A_1^i x_k + B_1^i y_k + C_1^i)^2 + \sum_{l=1}^{n_2} (A_2^i x_l + B_2^i y_l + C_2^i)^2$$

$$f(\mathbf{x}^i + \mathbf{d}) \approx f(\mathbf{x}^i) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}^i)\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^T \mathbf{f}''(\mathbf{x}^i)\mathbf{d} = \mathbf{d}^T \mathbf{A} \mathbf{d}$$

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}^i) = \left[\frac{df}{\partial A_1}, \frac{df}{\partial B_1}, \dots, \frac{df}{\partial C_2} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^i},$$

$$\mathbf{f}''(\mathbf{x}^i) = \left\{ \frac{df}{\partial P_k \partial P_l} \right\}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^i} \quad k, l = 1, \dots, 6; P_k \in (A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$$

Két egyenes példa₃

Közelítő kényszer egyenletek

$$c_1(A_1^i + d_1, B_1^i + d_2) \cong c_1(A_1^i, B_1^i) + \frac{\partial c_1}{\partial A_1} d_1 + \frac{\partial c_1}{\partial B_1} d_2$$

$$c_2(A_2^i + d_4, B_1^i + d_5) \cong c_2(A_2^i, B_2^i) + \frac{\partial c_2}{\partial A_2} d_4 + \frac{\partial c_2}{\partial B_2} d_5$$

$$c_3(A_1^i + d_1, B_1^i + d_2, A_2^i + d_4, B_1^i + d_5) \cong c_3(...) + \frac{\partial c_3}{\partial A_1} d_1 + \frac{\partial c_3}{\partial B_1} d_2 + \frac{\partial c_3}{\partial A_2} d_4 + \frac{\partial c_3}{\partial B_2} d_5$$

Mátrix alakban

$$\mathbf{C} \tilde{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial A_1} & \frac{\partial c_1}{\partial B_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1(A_1^i, B_1^i) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial c_2}{\partial A_2} & \frac{\partial c_2}{\partial B_2} & 0 & c_2(A_2^i, B_2^i) \\ \frac{\partial c_3}{\partial A_1} & \frac{\partial c_3}{\partial B_1} & 0 & \frac{\partial c_3}{\partial A_2} & \frac{\partial c_3}{\partial B_2} & 0 & c_3(...) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Illesztés kényszerekkel₃

- Keresünk egy vektort, amely csak független változókat tartalmaz: $\mathbf{d}^*$
- Keresünk egy $\mathbf{M}$ ismeretlen mátrixot, amelyre $\tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{M}\mathbf{d}^*$ és $\mathbf{C}\mathbf{M} = 0$.
- Ha $\mathbf{M}$ ismert, kényszer nélküli minimalizálás: $\tilde{\mathbf{d}}^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{d}^{*T} \mathbf{M}^T \mathbf{A} \mathbf{M} \mathbf{d}^* = \min \mathbf{d}^{*T} \mathbf{A}^* \mathbf{d}^* = \min; \mathbf{A}^* = \mathbf{M}^T \mathbf{A} \mathbf{M}$
- Visszafele közös lineáris egyenletek: $\mathbf{d}^* \rightarrow \tilde{\mathbf{d}}$
- $\mathbf{M}$ meghatározása $\mathbf{C}$ -ből
 - Gauss elimináció-szerű lépések felülről lefelé, minden lépésben kiiktatunk egy d_i -t
$$C_1 d_1 + \dots + C_n d_n + C_{n+1} = 0$$
 - a kényszer egyenletek nem függetlenek, ha egy sorban
 - az összes együttható nulla, tovább lépünk, mert nem lehet eliminálni
 - ha csak a konstans tag nem nulla, tovább lépünk, mert ellentmondás van

Illesztés kényszerekkel₄

Eliminációs lépések - a **C** mátrix első sorával indulunk és azt a d_l -et fejezzük ki, amelyiknek a legnagyobb abszolút értékű tagja van:

$$d_l = -\frac{C_1}{C_l} d_1 - \dots - \frac{C_{l-1}}{C_l} d_{l-1} - \frac{C_{l+1}}{C_l} d_{l+1} - \dots - \frac{C_n}{C_l} d_n - \frac{C_{n+1}}{C_l}$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{C_1}{C_l} & \dots & -\frac{C_{l-1}}{C_l} & -\frac{C_{l+1}}{C_l} & \dots & -\frac{C_{n+1}}{C_l} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{M}_1$ mátrix kiküszöböl egy változót,
és ezáltal egy rövidebb $\mathbf{d}_1$ vektorra redukálja $\tilde{\mathbf{d}}$ -t

$$\tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{M}_1 \mathbf{d}_1$$

$$\mathbf{d}_1 = (d_1, \dots, d_{l-1}, d_{l+1}, \dots, d_n, 1)$$

Kényszerek - problémák

- Adott két sík: $S1$ és $S2$; bezárt szög: α
- Két ismeretlen egyenes $e1$ és $e2$; tartalmazzák P -t

REDUNDÁNS kényszerhalmaz:

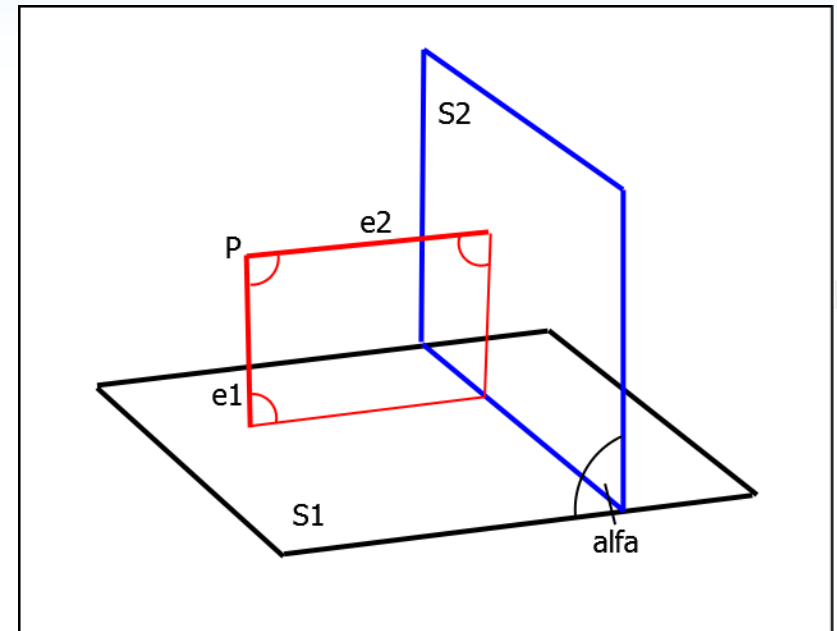
$\alpha = 90^\circ$;

$e1 \perp S1$; $e2 \perp S2$; $e1 \perp e2$ (!!);

ELLENTMONDÓ kényszerhalmaz:

$\alpha = 92^\circ$;

$e1 \perp S1$; $e2 \perp S2$; $e1 \perp e2$ (!!);



Ellentmondó kényszerek₁

Példa - egy négyzet - (l_1, l_2, l_3, l_4) egyenesek és három kör (c_1, c_2, c_3):

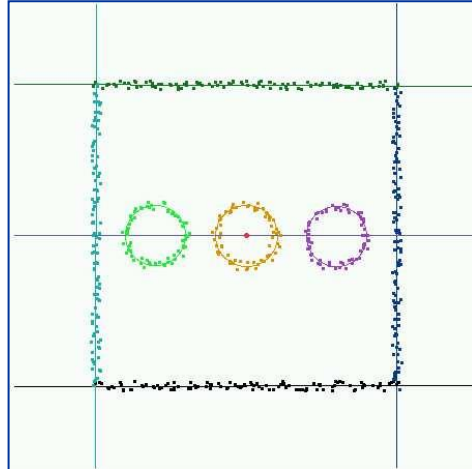
K1: a körök sugara megegyezik

K2: a körök középpontja egy egyenesen helyezkedik el (l_0)

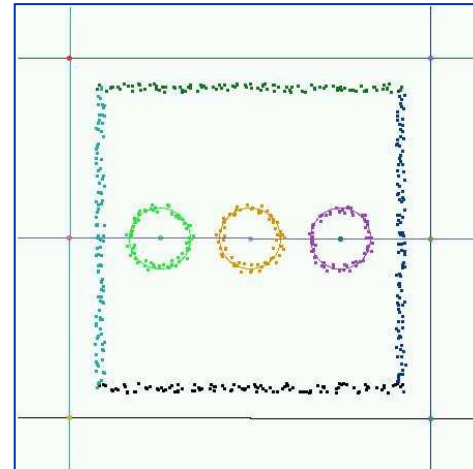
K3: ez az egyenes vízszintes

K4: a középpontok egymástól 30 egységre vannak, a szélső középpontok a négyzet oldalától 30 egységre vannak

K5: a négyzet oldalhossza 100 egység



Kiinduló állapot



K5 kimarad: oldalhossz $\neq$ 100

Ujjgyakorlat - ellentmondásos kényszerek feloldása*

Példa - egy négyzet - ($l1, l2, l3, l4$) egyenesek és három kör ($c1, c2, c3$):

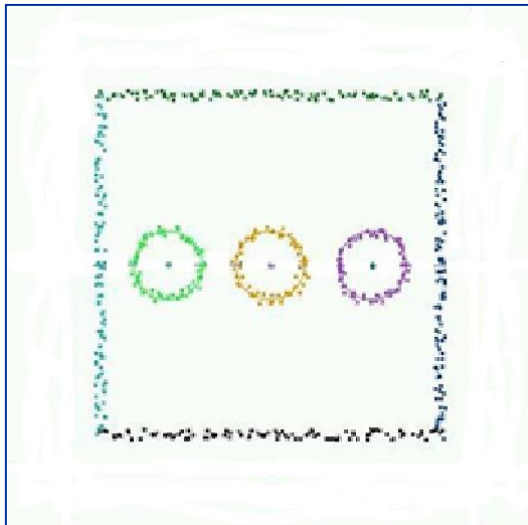
K1: a körök sugara megegyezik

K2: a körök középpontja egy egyenesen helyezkedik el ($l0$)

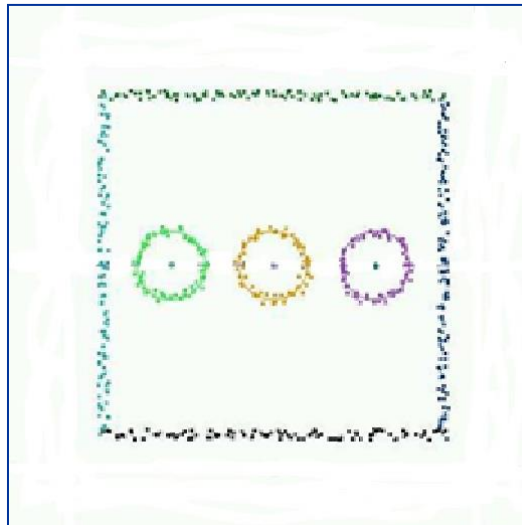
K3: ez az egyenes vízszintes

K4: a középpontok egymástól 30 egységre vannak, a szélső középpontok a négyzet oldalától 30 egységnyire vannak

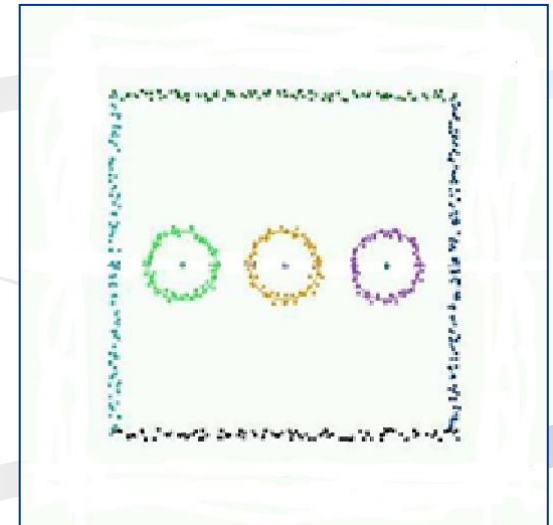
K5: a négyzet oldalhossza 100 egység



K4 kimarad: távolságok $\neq$ 30



K3 kimarad: $l0$ nem vízszintes



K2 kimarad: $l0$ nem kollineáris

Ujjgyakorlat - ellentmondásos kényszerek feloldása₁

Példa - egy négyzet - ($l1, l2, l3, l4$) egyenesek és három kör ($c1, c2, c3$):

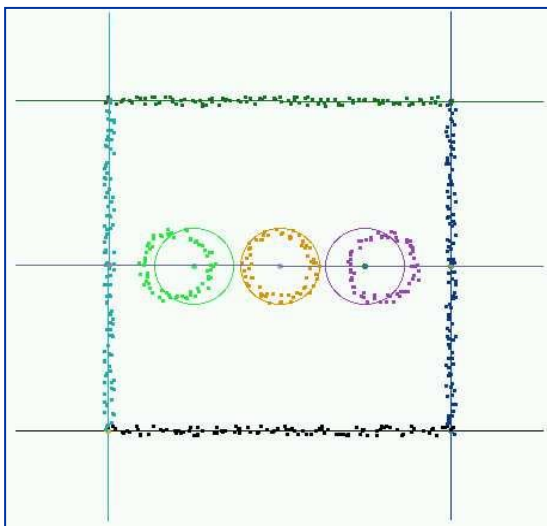
K1: a körök sugara megegyezik

K2: a körök középpontja egy egyenesen helyezkedik el ($l0$)

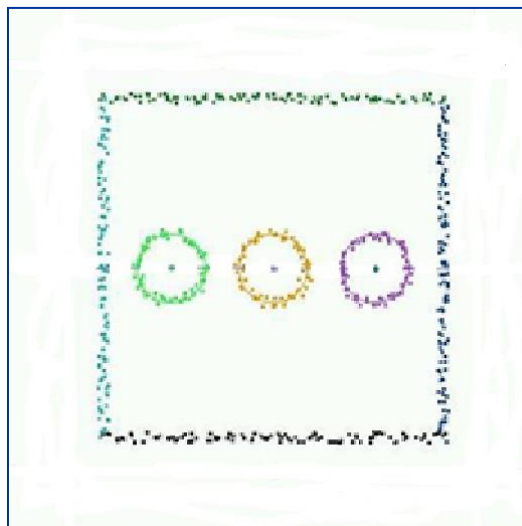
K3: ez az egyenes vízszintes

K4: a középpontok egymástól 30 egységre vannak, a szélső középpontok a négyzet oldalától 30 egységnyire vannak

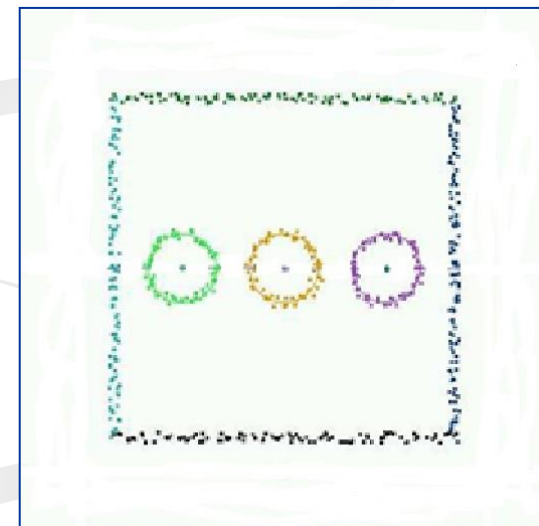
K5: a négyzet oldalhossza 100 egység



K4 kimarad: távolságok $\neq$ 30



K3 kimarad: $l0$ nem vízszintes



K2 kimarad: $l0$ nem kollineáris

Ujjgyakorlat - ellentmondásos kényszerek feloldása₂

Példa - egy négyzet - ($l1, l2, l3, l4$) egyenesek és három kör ($c1, c2, c3$):

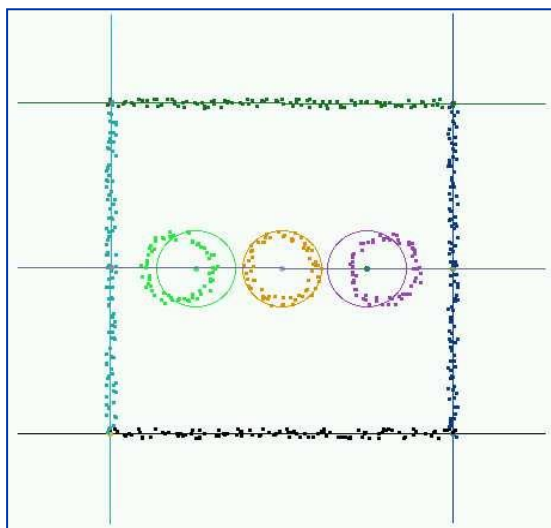
K1: a körök sugara megegyezik

K2: a körök középpontja egy egyenesen helyezkedik el ($l0$)

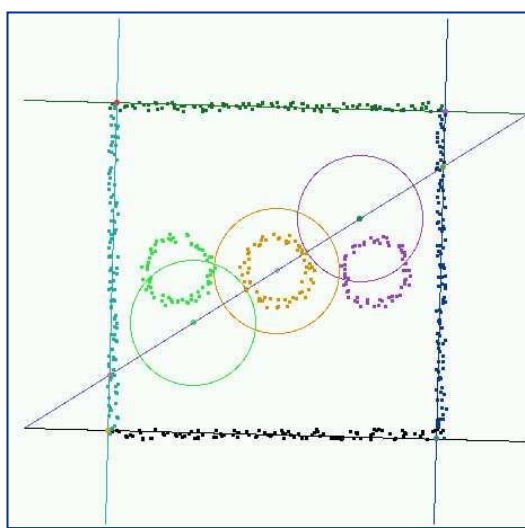
K3: ez az egyenes vízszintes

K4: a középpontok egymástól 30 egységre vannak, a szélső középpontok a négyzet
oldalától 30 egységre vannak

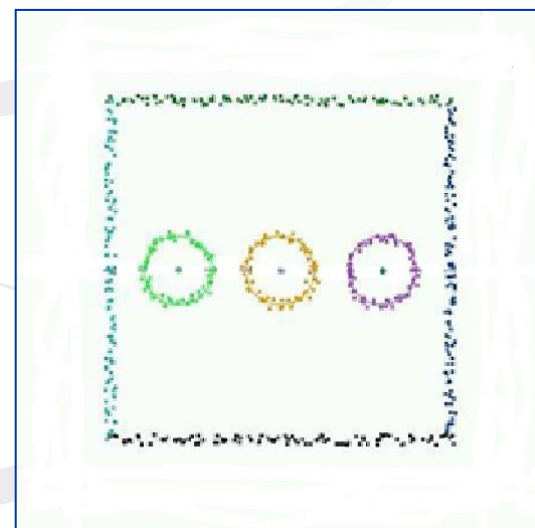
K5: a négyzet oldalhossza 100 egység



K4 kimarad: távolságok $\neq$ 30



K3 kimarad: $l0$ nem vízszintes



K2 kimarad: $l0$ nem kollineáris

Ujjgyakorlat - ellentmondásos kényszerek feloldása₂

Példa - egy négyzet - ($l1, l2, l3, l4$) egyenesek és három kör ($c1, c2, c3$):

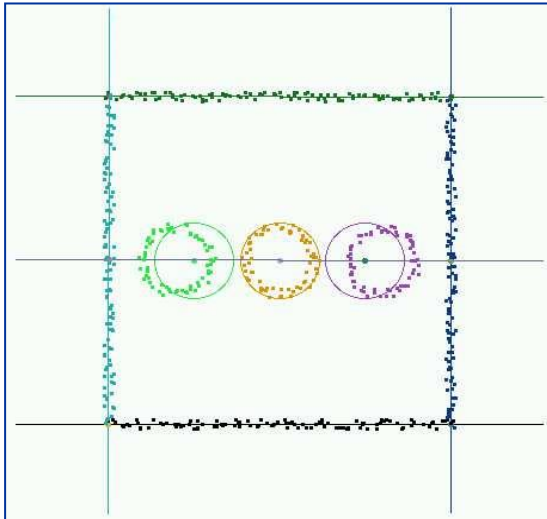
K1: a körök sugara megegyezik

K2: a körök középpontja egy egyenesen helyezkedik el ($l0$)

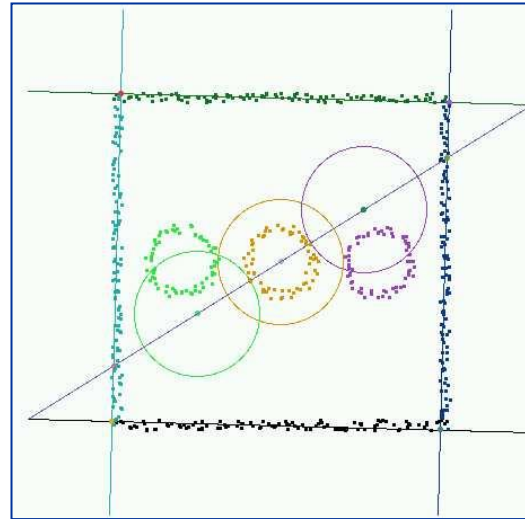
K3: ez az egyenes vízszintes

K4: a középpontok egymástól 30 egységre vannak, a szélső középpontok a négyzet
oldalától 30 egységre vannak

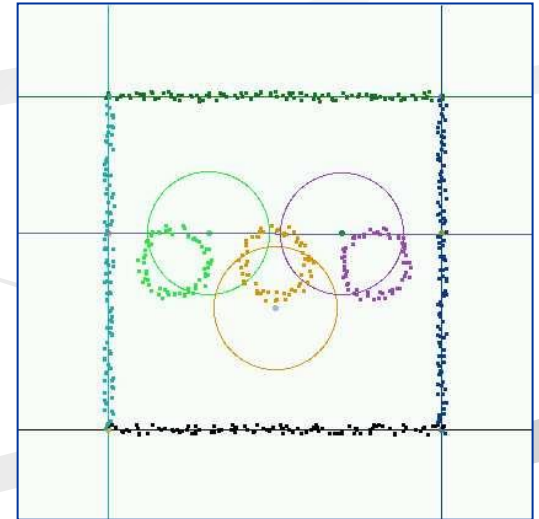
K5: a négyzet oldalhossza 100 egység



K4 kimarad: távolságok $\neq$ 30



K3 kimarad: $l0$ nem vízszintes



K2 kimarad: $l0$ nem kollineáris

Körök illesztése₁

- Kör egyenlete:

$$F(x, y) = A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

- Gradiens egységnyi a körön,
normalizálási feltétel:

$$\left| \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right) \right| = 1 \Rightarrow (2Ax + B)^2 + (2Ay + C)^2 = 1$$

- Az egyenlet baloldalából levont tag

$$4AF(x, y) = 0,$$

- így a kényszeregyenlet:

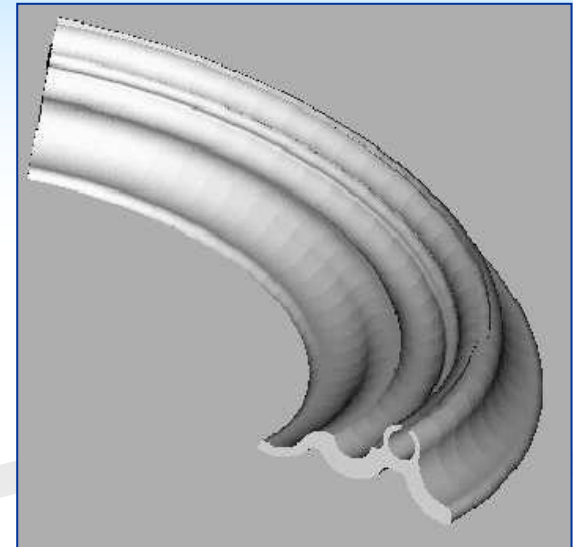
$$B^2 + C^2 - 4AD = 1.$$

- i -edik szegmentált kör;
ismeretlen paraméterek, adott pontok, :

$$\{A_i, B_i, C_i, D_i\}, \quad \{P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}), j = 1, \dots, n_i\}$$

- Minimalizálandó:

$$\sum_{i,j} d_{ij}^2 = \sum_i \frac{1}{n_i} \sum_j (A_i(x_{ij}^2 + y_{ij}^2) + B_i x_{ij} + C_i y_{ij} + D_i)^2$$



Körök illesztése₂

- Három normalizálási egyenlet a három körre

$$B_i^2 + C_i^2 - 4A_iD_i = 1, i = 1, 2, 3$$

- Két tangenciális egyenlet. Példa: 1. és 2. kör:

$$2A_1x + B_1 = -(2A_2x + B_2); 2A_1y + C_1 = -(2A_2y + C_2)$$

$$(2A_1x + B_1 + 2A_2x + B_2)^2 + (2A_1y + C_1 + 2A_2y + C_2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow -4(A_1 + A_2)(F_1(x, y) + F_2(x, y))$$

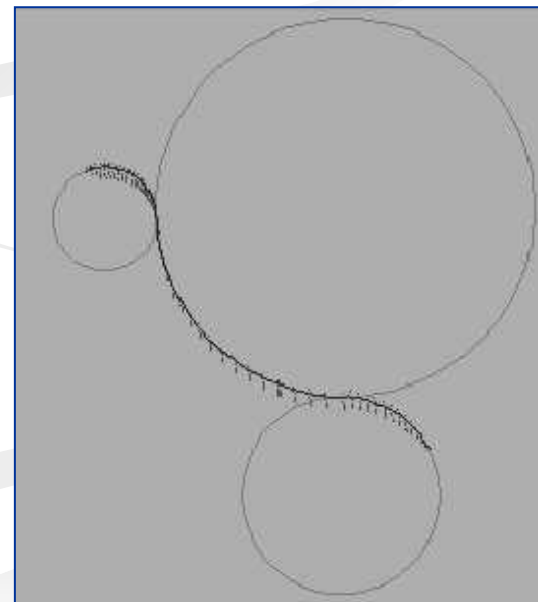
- Az " x^2, y^2, x, y " tagok kiesnek, marad

$$-2A_1D_2 - 2A_2D_1 + B_1B_2 + C_1C_2 - 1 = 0$$

- Ha $A=0 \rightarrow$ egyenes

$$F(x, y) = A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

$$\rightarrow Bx + Cy + D = 0$$

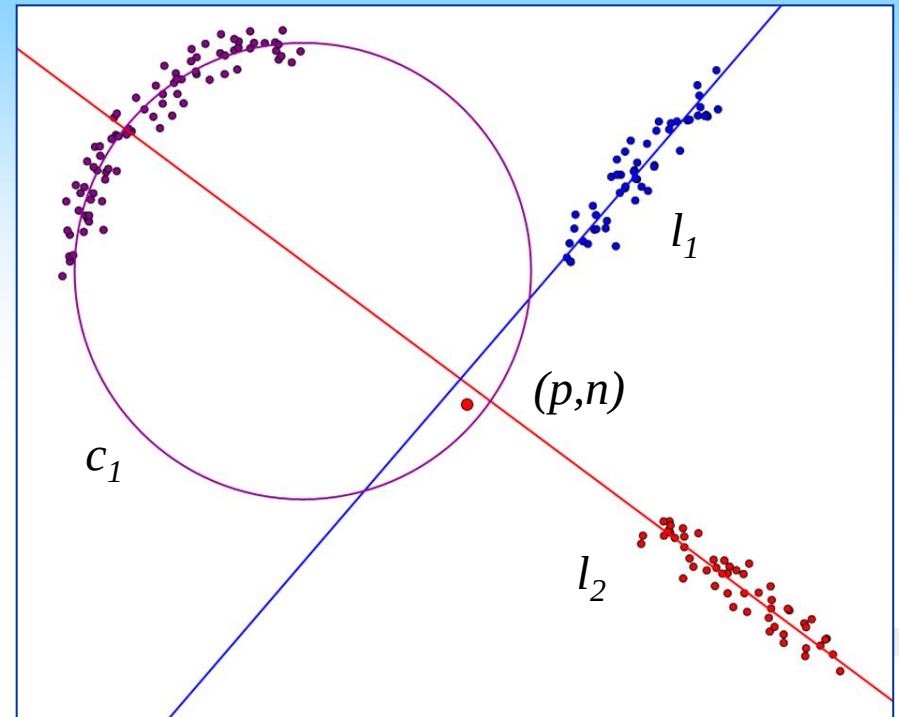


Segédelemek

- több változó
- több egyenlet
- de egyszerűbb egyenletrendszer

Egyszerű segédelemek:

- pontok
- pont + normál vektor párok
- irányvektorok
- forgástengelyek



I. Kényszerek:

c_1 érinti l_1 -et

l_1 merőleges l_2 -re

l_2 átmegy c_1 középpontján

$$\mathbf{x} = \{(o, r), (n_1, d_1), (n_2, d_2)\}$$

II. Módosított kényszerek :

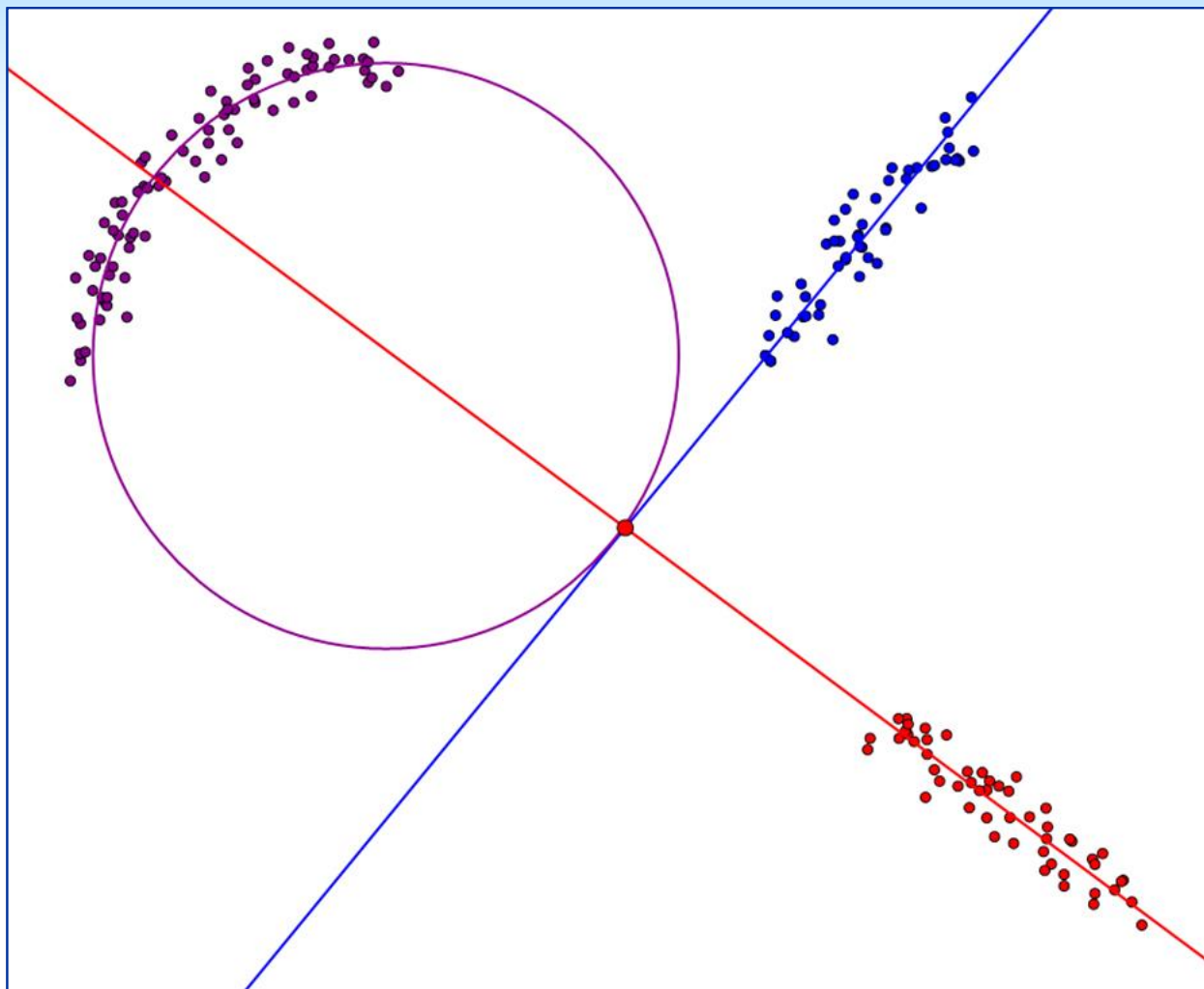
$$l_1(p) = 0; l_2(p) = 0; l_1(o) = r$$

$$n_2 \parallel n; n_1 \perp n;$$

$$l_2(o) = 0$$

$$\mathbf{x} = \{(o, r), (n_1, d_1), (n_2, d_2), (p, n)\}$$

Segédelemek - animáció



Távolsághű közelítés

■ felületparaméterek: $\mathbf{x} = \{x_i\}, i = 1, \dots, n$; pontok: $\{\mathbf{p}_k\}, k = 1, \dots, m$

■ minimalizálandó: $\sum_{k=1}^m d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_k)^2 = \min$

■ algebrai távolság, nagyon torzít: $\sum_{k=1}^m (F(p_k))^2 = \min$

■ euklideszi távolság - általában csak iteratív eljárással;
 $\Rightarrow$ távolsághű közelítés (faithful approximation)

■ Legyen

$$d = d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i) = \sqrt{g(\mathbf{x})} - h(\mathbf{x}), \quad \tilde{d} \cong \frac{(\sqrt{g} - h)(\sqrt{g} + h)}{2h} = \frac{g - h^2}{2h},$$

■ ekkor

$$d(\mathbf{q}) = 0 \leftrightarrow \tilde{d}(\mathbf{q}) = 0; \quad \frac{\partial d}{\partial x_i}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \tilde{d}}{\partial x_i}(\mathbf{q})$$

■ Bizonyítás:

$$\tilde{d} = \frac{g - h^2}{2h} = \frac{(d + h)^2 - h^2}{2h} = d + \frac{d^2}{2h}, \quad \frac{\partial \tilde{d}}{\partial x_i} = \frac{\partial d}{\partial x_i} + \frac{\partial d}{\partial x_i} \frac{d}{h}$$

($\rightarrow$ 8. slide)

Hatékony reprezentáció

Cél: az iteráció számításigényének optimalizálása

Ideális esetben a távolságfüggvény alakja:

$$d(p, \mathbf{x}) = S(\mathbf{x})^T P(p) = P(p)^T S(\mathbf{x})$$

A minimalizálandó kifejezés:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_p d(p, \mathbf{x})^2 = S(\mathbf{x})^T \left(\sum_p P(p) P(p)^T \right) S(\mathbf{x})$$

A $\mathbf{Q}$ mátrix csak az adatpontoktól függ: $\mathbf{Q} = \sum_p P(p) P(p)^T$

Általános esetben deriváltakat kell számolni: $f' = 2S^T \mathbf{Q} S'$
 $f'' = 2(S'^T \mathbf{Q} S' + S^T \mathbf{Q} S'')$

Ha $S(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_3, \dots) \rightarrow f'(\mathbf{x}) = 2\mathbf{Q}\mathbf{x}$
 $f''(\mathbf{x}) = 2\mathbf{Q}$

Körillesztés - példa₂

- adott $\mathbf{p}$; ismeretlen kör: $\{\mathbf{o}, r\}$; euklideszi távolság: $d = \|\mathbf{p} - \mathbf{o}\| - r$

- távolsághű közelítés : $\tilde{d} = \frac{(p - o)^2 - r^2}{2r} = \frac{p^2 - 2\langle p, o \rangle + o^2 - r^2}{2r}$

- a hatékony reprezentáció paramétervektora:

$$S(x) = S(o_x, o_y, r) = (1/2r, -o_x/r, -o_y/r, (o^2 - r^2)/2r)$$

$$P(p) = (p^2, p_x, p_y, 1) \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial o_x}, \frac{\partial S}{\partial o_y}, \frac{\partial S}{\partial r} \dots$$

- továbbegyszerűsített reprezentáció (4 változó!):

$$x = (o_x, o_y, r) \Rightarrow x^* = S(x) = (\kappa, o_x^*, o_y^*, A)$$

$$\kappa = \frac{1}{2r}, \quad o^* = -2\kappa o, \quad A = (o^2 - r^2)/2r \Rightarrow (o^*)^2 - 4A\kappa = 1$$

- deriváltak számítása egyszerűsödik, ha: $S(x^*) = x^*$