

3D Számítógépes Geometria II.

3. Felületmetszések, párhuzamosan eltolt és lekerekítő felületek

<http://cg.iit.bme.hu/portal/node/3dgeo2>

<https://www.vik.bme.hu/kepzes/targyak/VIIIMA16>

Dr. Várady Tamás, Dr. Salvi Péter
BME, Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Irányítástechnika és Informatika Tanszék



Tartalom

I. Felületmetszések

- alkalmazások, követelmények
- algebrai módszerek
- diszkrét módszerek
- görbekövetés

II. Párhuzamosan eltoló görbék és felületek

- alkalmazások
- önmetszések
- algebrai módszerek
- közelítő módszerek

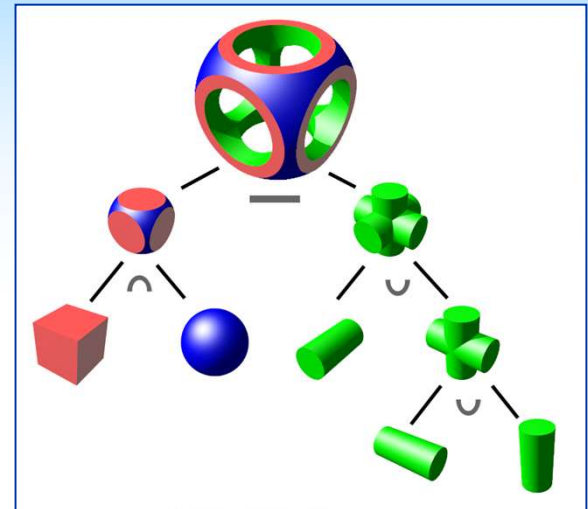
III. Lekerekítő felületek

- algebrai módszerek
- gördülő gömb
- parametrikus approximáció

Felület-felület metszések₁

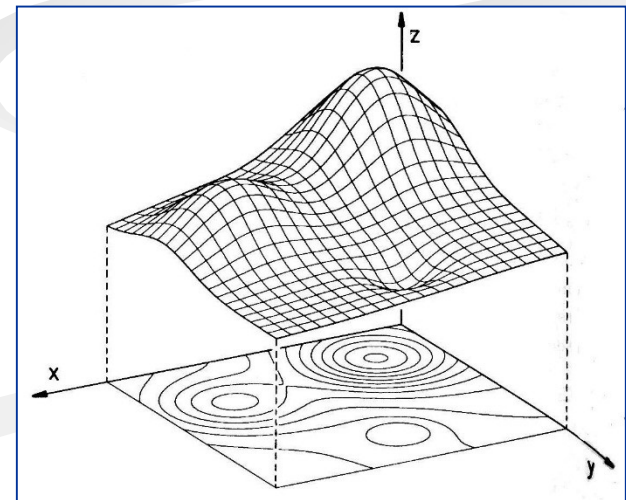
Alkalmazások

- halmazműveletek
- kontúrok, szintvonalak
- sziluett vonalak
- lekerekítő felületek

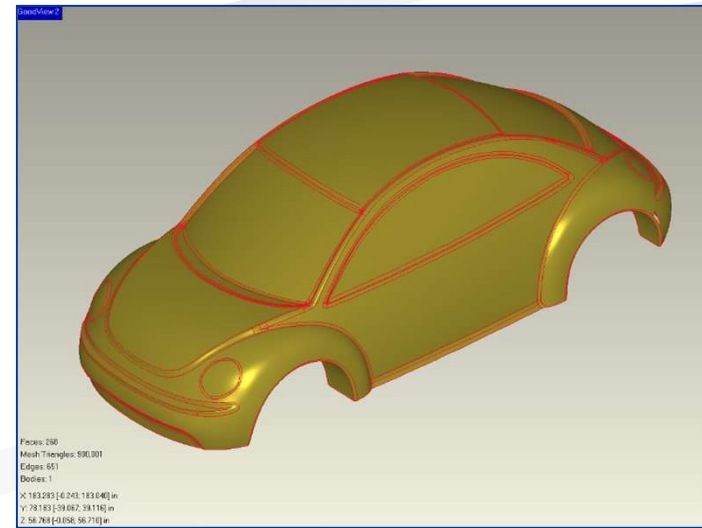
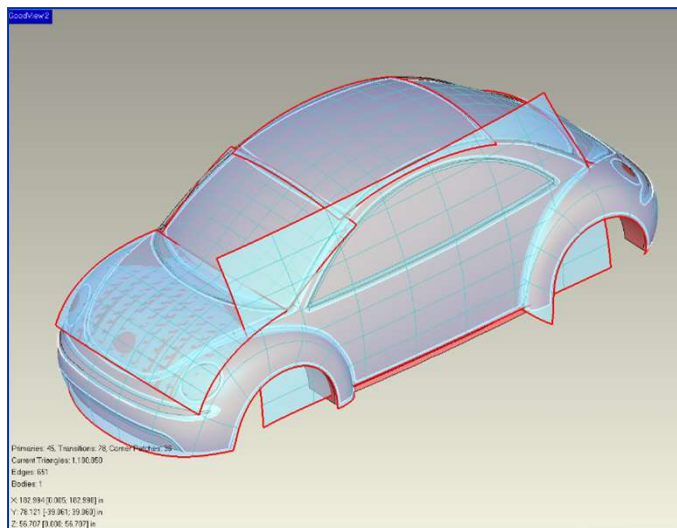
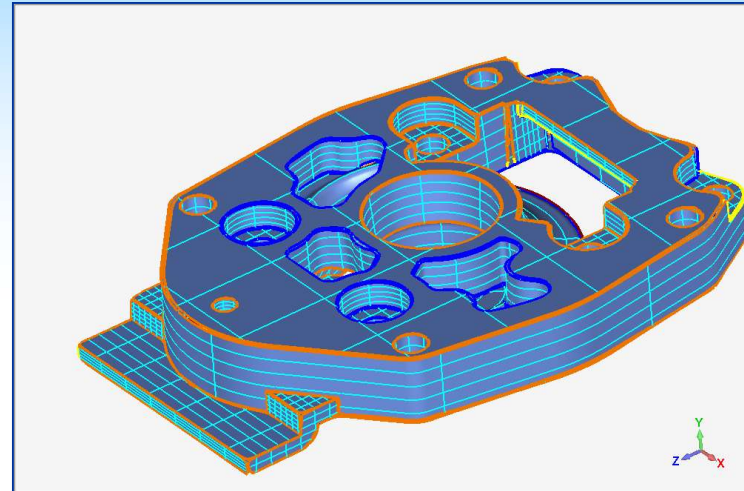
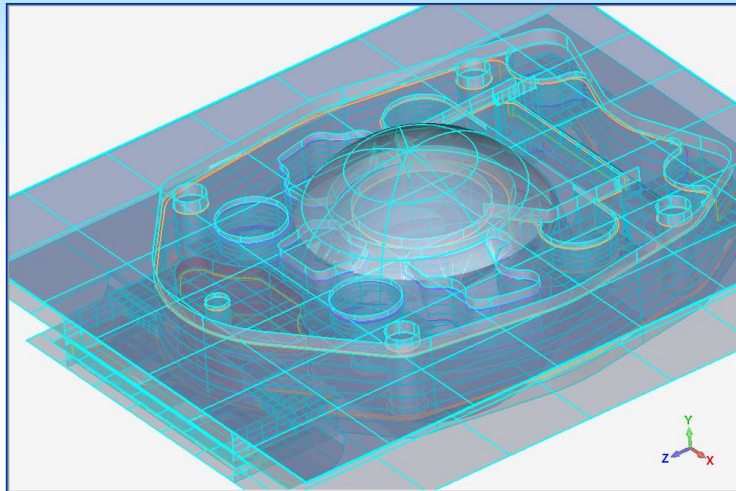


Követelmények

- automatikus
- pontos
- hatékony
- megbízható



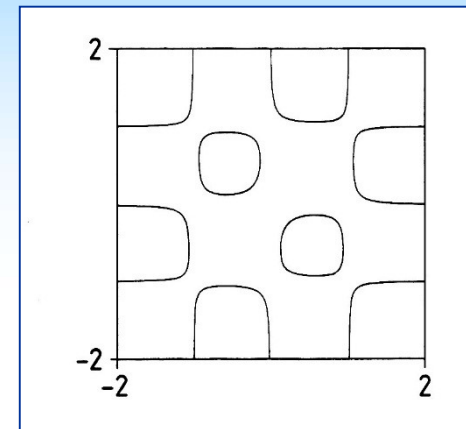
Felület-felület metszések₂



Felület-felület metszések₃

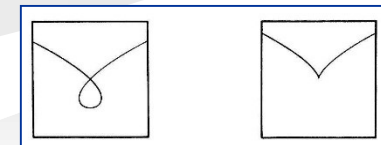
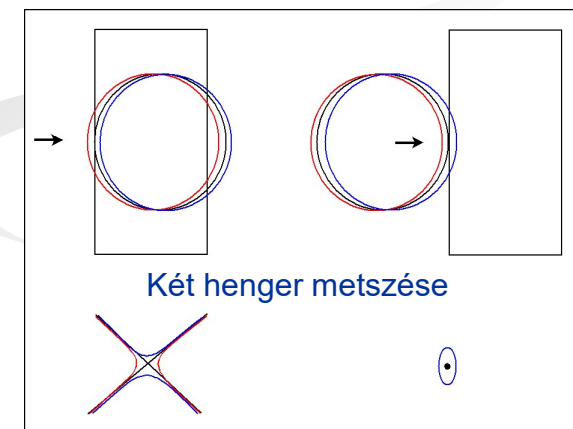
Felületmetszési problémák

- sokféle reprezentáció kombinációja
- implicit & implicit: $F_1(x,y,z)=0$, $F_2(x,y,z)=0$
- implicit & parametrikus: $F_1(x,y,z)=0$, $\mathbf{r}(u,v)$
- parametrikus & parametrikus: $\mathbf{r}(u,v)$, $\mathbf{p}(s,t)$
- a metszésgörbe több darabból állhat
- szinguláris esetek: cusp (csúcspont), elágazás, érintőleges felületek, pici hurkok, önmetszés



Algoritmusok

- direkt (speciális esetek)
- algebrai
- felosztásos (subdivision)
 - +: nem kell kezdőpont
 - : szinguláris pontok, kis hurkok
- görbekövetés (tracing)
 - +: explicit görbék
 - : kezdőpont beállítás, lépéstávolság



Felület-felület metszések₄

Metszéspont explicit algebrai formában

- 1. implicit, 2. parametrikus $\Rightarrow$ behelyettesítés

$$F(x,y,z)=0, \mathbf{r}(u,v) \rightarrow F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=0,$$

$$u=u_0 \rightarrow v_0 \rightarrow \{u_i, v_i\} \rightarrow \text{görbeapproximációk: } \{\mathbf{r}(u_i, v_i)\}, \{F(x_i, y_i, z_i)\}$$

$$\text{HENGGER: } x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

$$\text{SÍK: } [Ax + By + Cz + D = 0] \rightarrow \mathbf{r}(u,v) = \mathbf{a}u + \mathbf{b}v + \mathbf{c},$$

$$\text{ELLIPSZIS: } (a_x u + b_x v + c_x)^2 + (a_y u + b_y v + c_y)^2 - R^2 = F(u,v) = 0$$

- konverziók

(i) parametrikus $\rightarrow$ implicit: mindig lehetséges

- implicit konverzió (racionális polinomból): $\mathbf{r}(u,v) \rightarrow F(x,y,z)$,
- bonyolult algebra, magas fokszám

$(n \times m)$ felület - implicit forma: $2nm$

két harmadfokú metszéspont explicit algebrailag: $2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 9 = 324$ fokú!

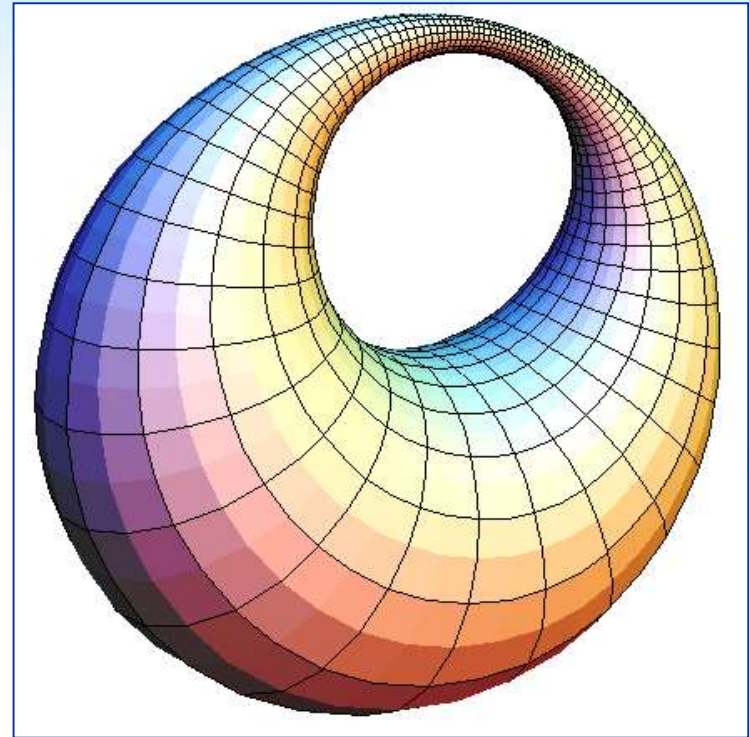
(ii) implicit $\rightarrow$ parametrikus: általánosan nem lehetséges

- lineáris és másodfokú - OK,
- egyébként csak speciális esetekben

Dupin cyclides

Általános tórusz felületek

- Implicit reprezentáció +
- Parametrikus reprezentáció
- Felületmetszés – egyszerű
- Változó sugarú lekerekítések



Ujjgyakorlat* - metszések

Egyenes - parabola metszés

$$e1: \mathbf{r}_1(s) = \mathbf{Q} + s\mathbf{R}, s \in [0,1]$$

$$\Rightarrow Ax + By + C = 0$$

$$p1: \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{P}_0(1-t)^2 + \mathbf{P}_1 2(1-t)t + \mathbf{P}_2 t^2, t \in [0,1]$$

Feladat:

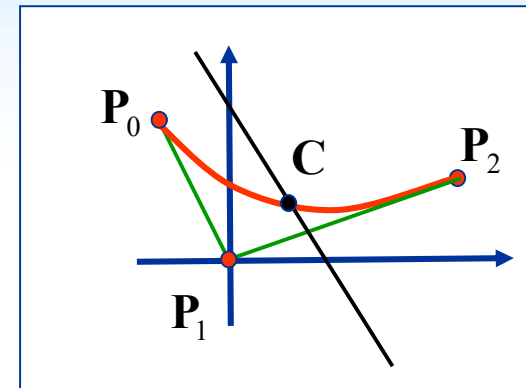
$$\mathbf{P}_0 : (-1,2), \mathbf{P}_1 : (0,0), \mathbf{P}_2 : (3,1),$$

$$e1: 2x + y - 3 = 0$$

$$p1: \mathbf{r}_2(t) = (x(t), y(t)) = (?, ?)$$

Behelyettesítés után, másodfokú egyenlet t -re

$$2(?) + (?) - 3 = 0, \quad ?t^2 + ?t + ? = 0, \quad t = ?$$



Ujjgyakorlat - metszések

Egyenes - parabola metszés

$$e1: \mathbf{r}_1(s) = \mathbf{Q} + s\mathbf{R}, s \in [0,1]$$

$$\Rightarrow Ax + By + C = 0$$

$$p1: \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{P}_0(1-t)^2 + \mathbf{P}_1 2(1-t)t + \mathbf{P}_2 t^2, t \in [0,1]$$

Feladat:

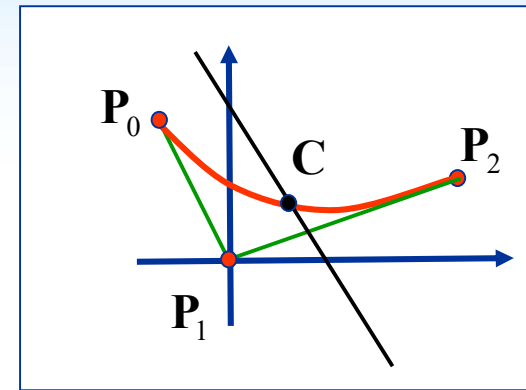
$$\mathbf{P}_0 : (-1,2), \mathbf{P}_1 : (0,0), \mathbf{P}_2 : (3,1),$$

$$e1: 2x + y - 3 = 0$$

$$p1: \mathbf{r}_2(t) = (x(t), y(t)) = (-(1-t)^2 + 3t^2, 2(1-t)^2 + t^2)$$

Behelyettesítés után, másodfokú egyenlet t -re

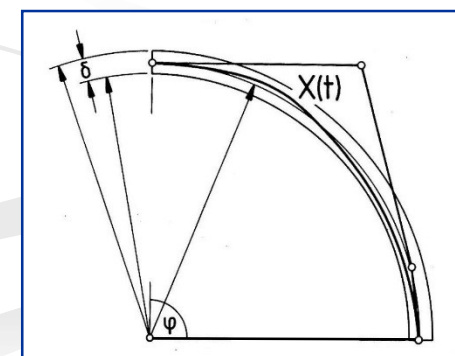
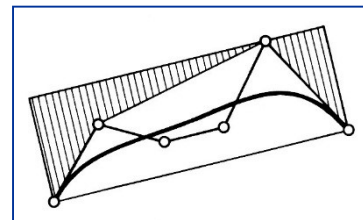
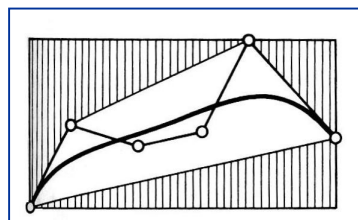
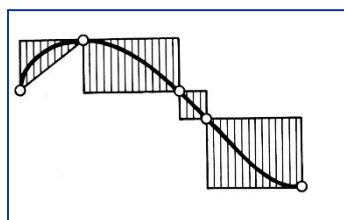
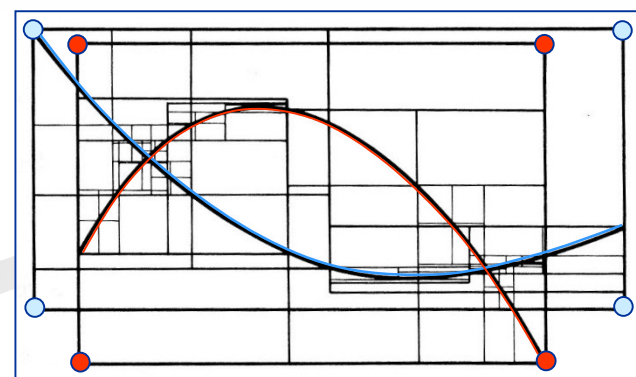
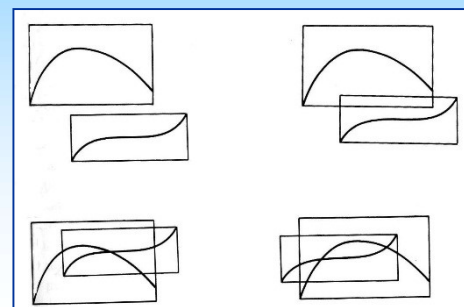
$$2(-1+2t+2t^2) + (2-4t+3t^2) - 3 = 0, \quad 7t^2 - 3 = 0, \quad t = \sqrt{\frac{3}{7}}$$



Felület-felület metszések₅

Iteratív felosztás

- burkoló téglatestek - iteratív finomítás
- konvex burok
- min-max vagy orientált téglatestek
- hízlalt ívek (fat arcs) & hízlalt gömblapok
- számításigény:
 - (i) burok számítás
 - (ii) metszési teszt
 - (iii) az algoritmus konvergenciájának sebessége
- problémák: szinguláris pontok, kis hurkok, pontatlanság

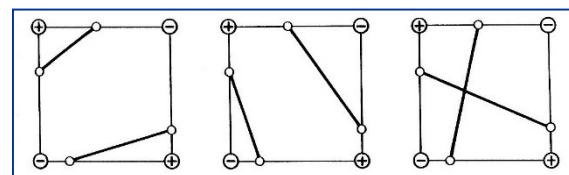
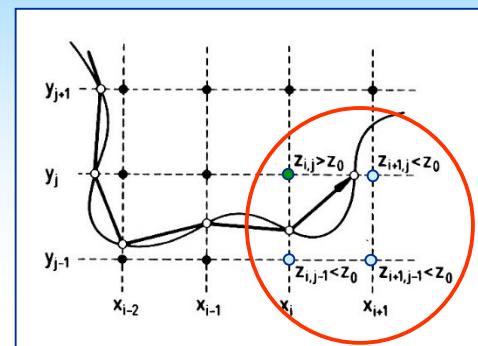
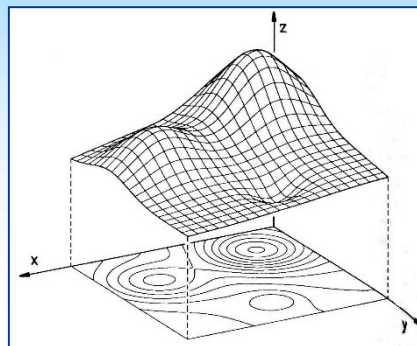


Felület-felület metszések₆

Diszkrét módszerek

(i) implicit & szabadformájú felület
példa:

- párhuzamos síkmetszetek
- adaptív cellázás
- sétáló négyzetek



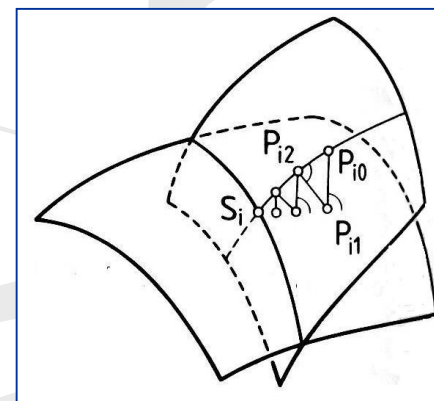
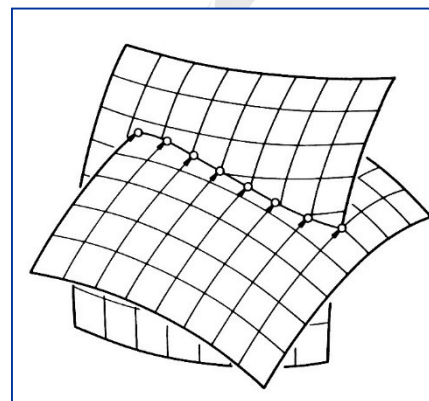
Problémás
esetek

(ii) rács & rács

(iii) felület & törtvonalas
paramétervonalak

problémák:

- szinguláris pontok
- kis hurkok
- pontatlanság



Felület-felület metszések₈

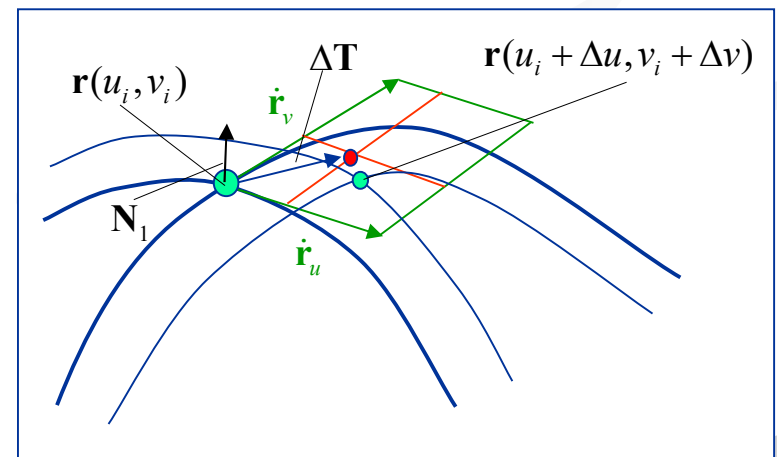
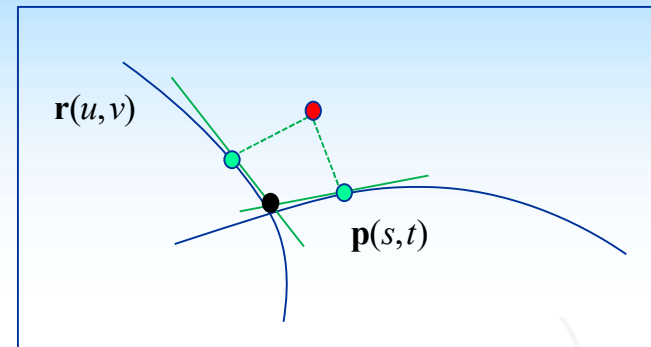
Relaxáció

- Newton-Raphson iteráció
- közeli felületi pontok meghatározása a tangens vektorra merőleges síkban

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{T} &\cong \mathbf{r}(u_i, v_i) + \Delta u \dot{\mathbf{s}}_u + \Delta v \dot{\mathbf{s}}_v, \\ \Rightarrow (\Delta u, \Delta v) &\Rightarrow \mathbf{r}(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v) \\ \Rightarrow (\Delta s, \Delta t) &\Rightarrow \mathbf{p}(s_i + \Delta s, t_i + \Delta t)\end{aligned}$$

Metszéspon

$$|\mathbf{r}(\hat{u}_i, \hat{v}_i) - \mathbf{p}(\hat{s}_i, \hat{t}_i)| < \varepsilon$$



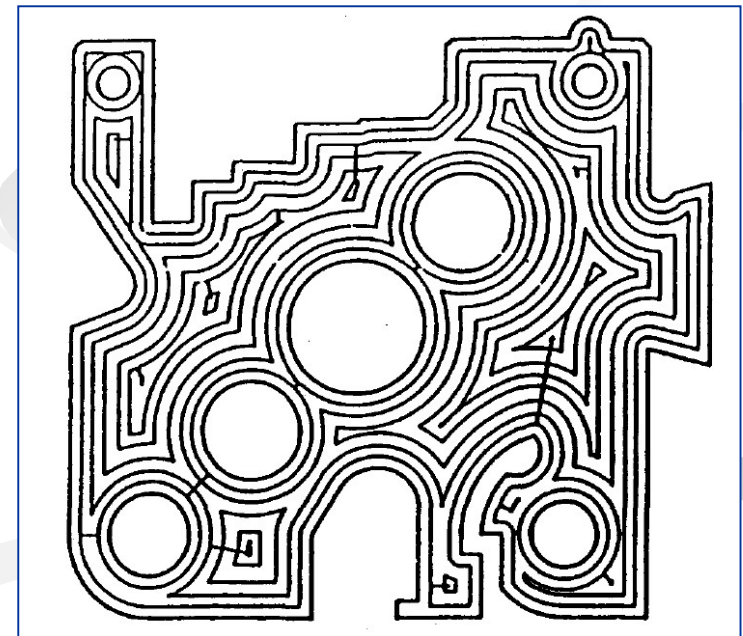
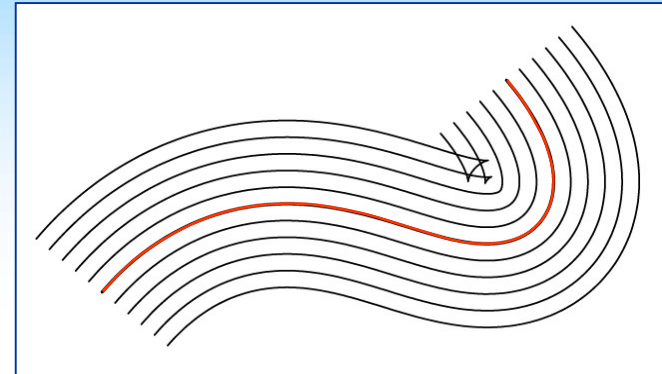
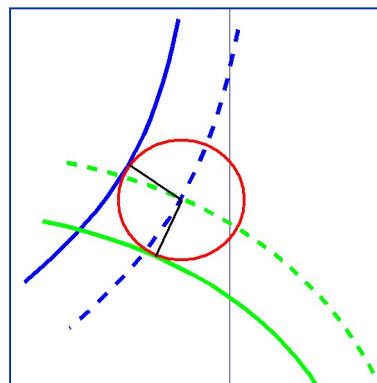
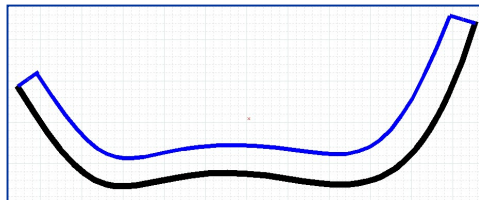
Ofszet görbék₁

Ofszet:

- párhuzamosan eltoló vagy normális irányú eltolás
- hízalás vagy zsugorítás

Alkalmazások

- NC megmunkálás (zsebmarás)
- felületek vastagsággal
- cső-felületek vezérgörbéből
- lekerekítő felületek



Ofszet görbék és felületek

Ofszet (eltolásos) görbék

- általános egyenlet:

$$\mathbf{r}_d(t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{N}_0(t) d, \quad \mathbf{N}_0(t) = \frac{(\dot{y}(t), -\dot{x}(t))}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}$$

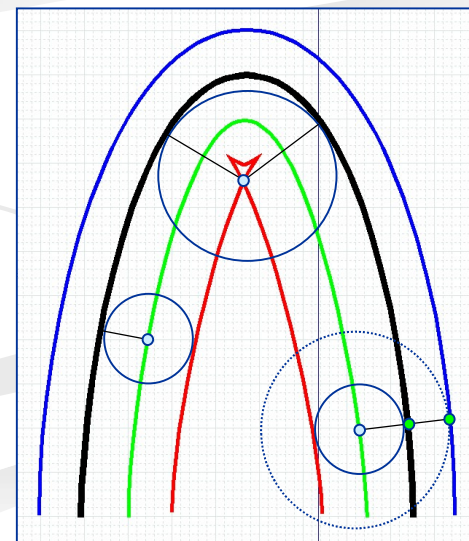
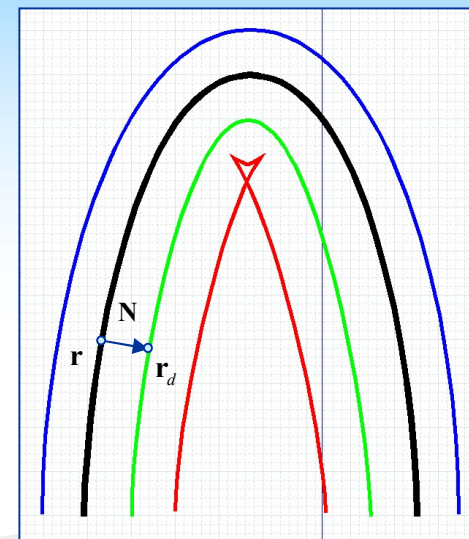
- görbületi sugár, görbület:

$$\rho_d = \rho + d, \quad \kappa_d = \frac{\kappa}{1 + \kappa d}$$

Ofszet felületek

- általános egyenlet: $\mathbf{s}_d(u, v) = \mathbf{s}(u, v) + \mathbf{N}_0(u, v) d$
- az ofszet felület normálisa párhuzamos az eredetivel
- a görbületi ellipszoid eltolódik:

$$\rho_{1,d} = \rho_1 + d, \quad \rho_{2,d} = \rho_2 + d,$$

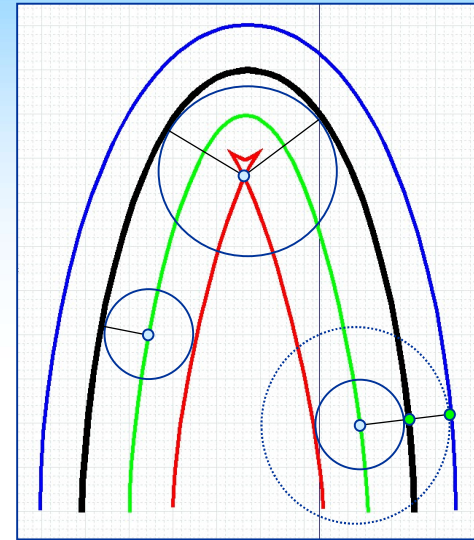


Ofszet görbék₁

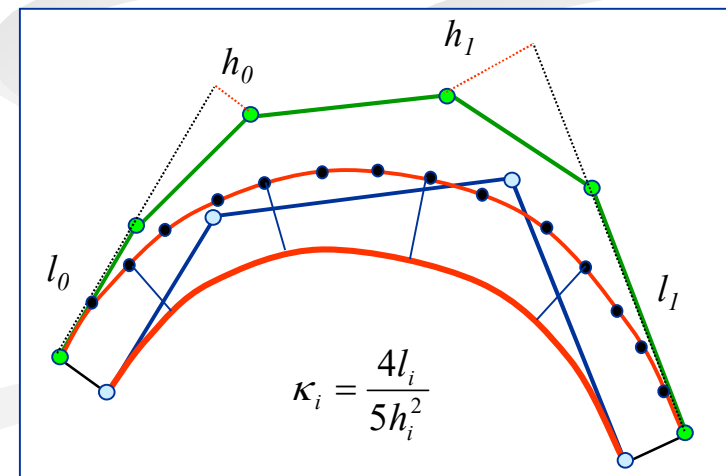
- általános egyenlet:

$$\mathbf{r}_d(t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{N}_0(t) d$$

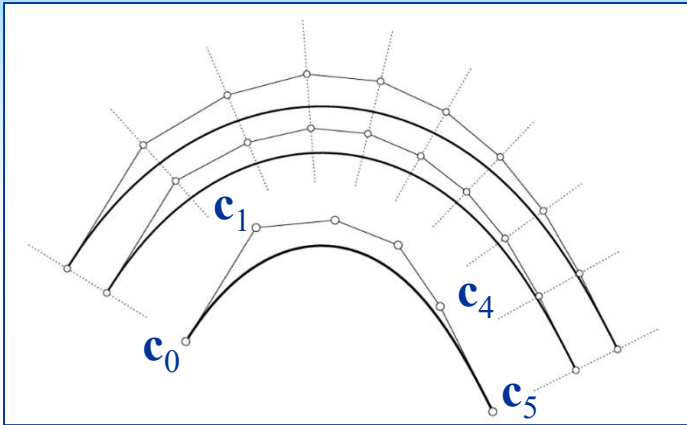
- pontos ofszet görbe
egyenes, kör, PH görbék $\rightarrow \dots$
- önmetszések !



- (i) legkisebb négyzetes approximáció -
diszkrét pontsorozatra
- (ii) közelítés szegmensenként
 - végponti kényszerek
 - harmadfokú $\rightarrow$ ötödfokú Hermite görbe
 - G^2 kényszer (l_0, h_0, l_1, h_1)



Ofszet görbék₂ - PH görbék



Explicit ofszet:

- ötödfokú PH görbe

Első derivált $(x'(t), y'(t))$:

- negyedfokú polinom

Egység normál vektor

- racionális polinom ($n=9$)

Konstrukció:

- $u(t), v(t)$ másodfokú Bézier, ismeretlenek: $\{u_i, v_i\}, i=0,1,2$
- a Bézier kontrollpontokat meg lehet határozni egy nemlineáris egyenlet-rendszer segítségével

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sigma(t)$$

$$x'(t) = [u^2(t) - v^2(t)], \quad y'(t) = 2u(t)v(t),$$

$$\text{PH: } (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2 + v^2)^2$$

$$\sigma(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = u^2(t) + v^2(t),$$

$$\mathbf{T}_0(t) = \frac{(u^2 - v^2, 2uv)}{u^2 + v^2}, \quad \mathbf{N}_0(t) = \frac{(2uv, v^2 - u^2)}{u^2 + v^2},$$

$$u(t) = u_0 B_0^2(t) + u_1 B_1^2(t) + u_2 B_2^2(t),$$

$$v(t) = v_0 B_0^2(t) + v_1 B_1^2(t) + v_2 B_2^2(t),$$

$$\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t)) = n \sum_{i=0}^4 (\mathbf{c}_{i+1} - \mathbf{c}_i) B_i^4(t),$$

$$\mathbf{c}_0 \rightarrow \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_0 = \frac{1}{5}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0 v_0) \rightarrow \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1 = \dots$$

Lekerekítő felületek₁

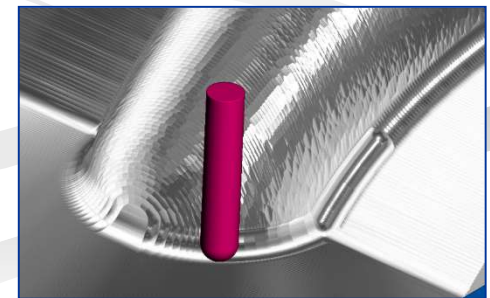
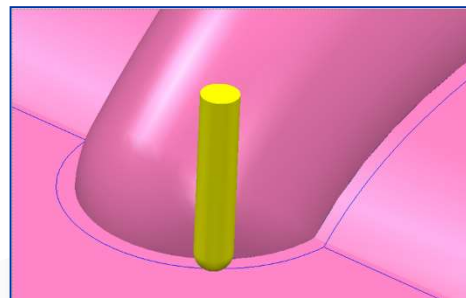
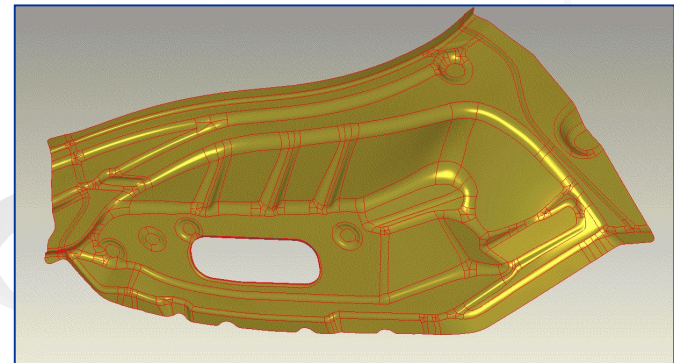
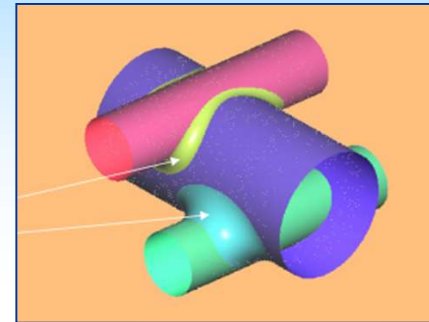
Éles élek helyett lekerekítő felületek:

- sima kapcsolódás
- esztétikai követelmények
- anyagminőség
- NC megmunkálás

Él-lekerekítés & csúcs-lekerekítés

Lekerekítő algoritmusok:

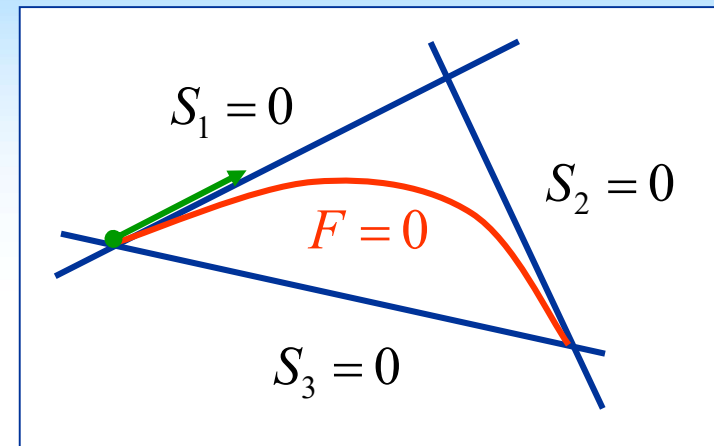
- algebrai
- gördülő gömb
- parametrikus



Lekerekítő (görbék) felületek₂

Illusztráció 2D-ben (Liming módszere):

- (i) három egyenes implicit formában
- (ii) végponti megkötések teljesülnek, a teltség állítható
- (iii) kúpszeletek esetén is alkalmazható



$$S_i(x, y) = A_i x + B_i y + C_i = 0, i = 1, 2, 3$$

$$F(x, y) = (1 - \lambda) S_1 S_2 + \lambda S_3^2 = 0$$

$$S_1(x_0, y_0) = 0, S_3(x_0, y_0) = 0 \rightarrow F(x_0, y_0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x_0, y_0) = (1 - \lambda) \left(\frac{\partial S_1}{\partial x} S_2 + S_1 \frac{\partial S_2}{\partial x} \right) + 2\lambda \frac{\partial S_3}{\partial x} S_3 = \text{const.} \times \frac{\partial S_1}{\partial x} (x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0) = \dots = \text{const.} \times \frac{\partial S_1}{\partial y} (x_0, y_0)$$

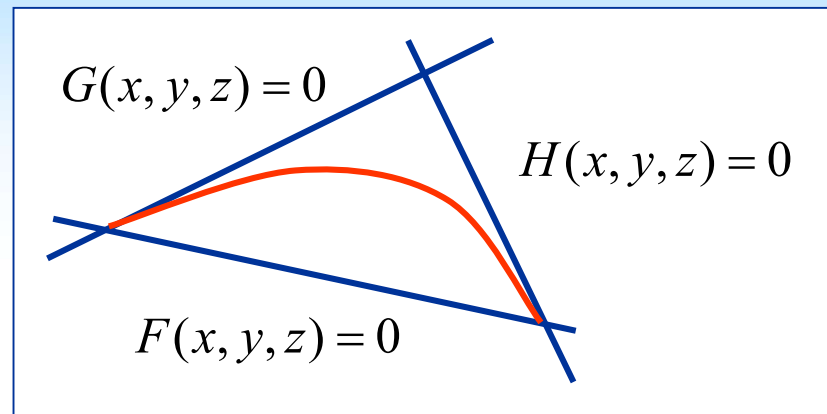
$$\nabla F(x_0, y_0) = \text{const.} \times \nabla S_1(x_0, y_0)$$

Lekerekítő felületek₃

3D általánosítás

Implicit lekerekítő felületek

- két implicit felület:
- szorzatfelület:
- lineáris kombináció
 λ teltségi tényező:
- lekerekítő felület az F
vágófelület segítségével:



$$G(x, y, z) = 0, H(x, y, z) = 0$$

$$S(x, y, z) = G(x, y, z) H(x, y, z) = 0$$

$$S(x, y, z) = (1 - \lambda)G(x, y, z) + \lambda H(x, y, z) = 0$$

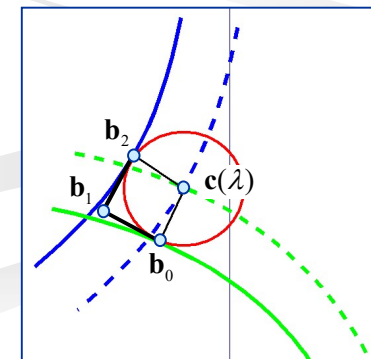
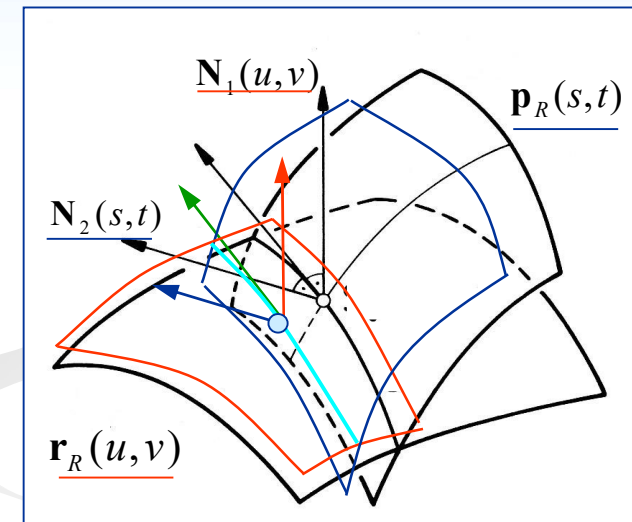
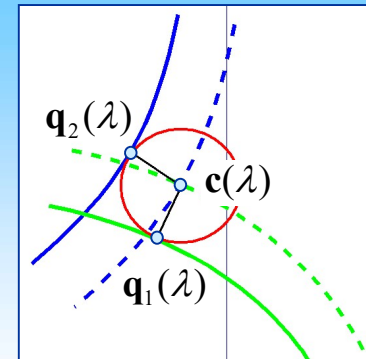
$$S(x, y, z) = (1 - \lambda)G(.)H(.) + \lambda F^2(.) = 0$$

Lekerekítő felületek₄

Gördülő gömb lekerekítés:

- érinti a két szomszédos felületet
- ponthármas három összerendelt görbén
 gerincgörbe: $\mathbf{c}(\lambda)$
 határgörbe: $\mathbf{q}_1(\lambda) = \mathbf{r}(u(\lambda), v(\lambda))$,
 $\mathbf{q}_2(\lambda) = \mathbf{p}(s(\lambda), t(\lambda))$
- a középpont mértani helye az
 ofszet-felületek metszésvonala
 - normálvektorok alapján görbekövetés
 - mintavételezés, söprő sík: $\pi(\lambda_k)$
- minden körív Bézier alakban (racionális
 másodfokú) adott:

$$\{\mathbf{b}_0(\lambda_k), \mathbf{b}_1(\lambda_k), \mathbf{b}_2(\lambda_k), w(\lambda_k)\}$$
- felület: 10-dimenziós hosszanti
 görbeapproximáció



Ujjgyakorlat* - lekerekítés

Feltétel:

$$|\mathbf{C} - \mathbf{T}_1| = |\mathbf{C} - \mathbf{T}_2| = R$$

Feladat:

$$\mathbf{r}_1 : x^2 + y^2 = 25$$

$$\mathbf{r}_2 : y = 0$$

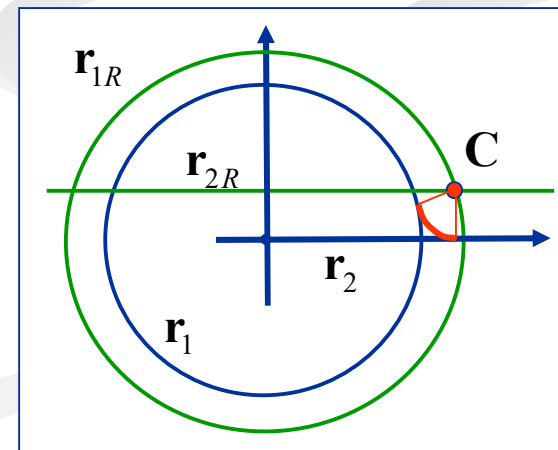
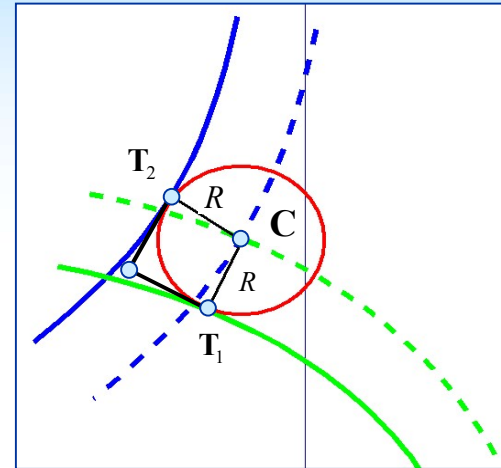
$$R = +2$$

$$\mathbf{r}_{1R} : ?$$

$$\mathbf{r}_{2R} : ?$$

$$\mathbf{C} : (x_0, y_0) \quad x_0 = ? \quad y_0 = ?$$

Összes megoldás (+/-) száma: ?



Ujjgyakorlat - lekerekítés

Feltétel:

$$|\mathbf{C} - \mathbf{T}_1| = |\mathbf{C} - \mathbf{T}_2| = R$$

Feladat:

$$\mathbf{r}_1 : x^2 + y^2 = 25$$

$$\mathbf{r}_2 : y = 0$$

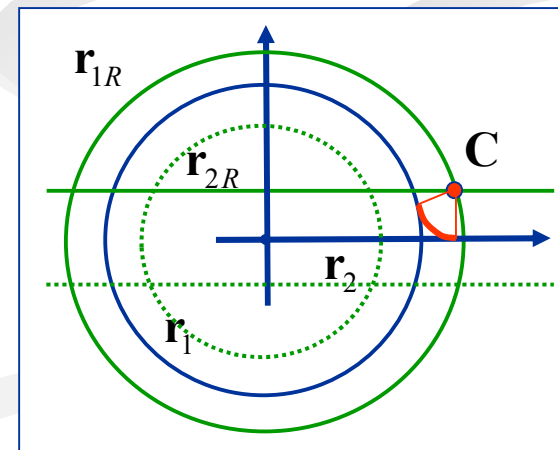
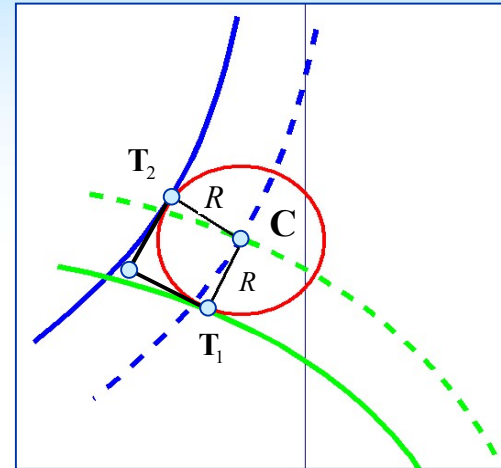
$$R = +2$$

$$\mathbf{r}_{1R} : x^2 + y^2 = 49$$

$$\mathbf{r}_{2R} : y = 2$$

$$\mathbf{C} : (x_0, y_0) \quad x_0 = \pm\sqrt{49-4}, y_0 = 2$$

Összes megoldás (+/-) száma: 8



Lekerekítő felületek₅

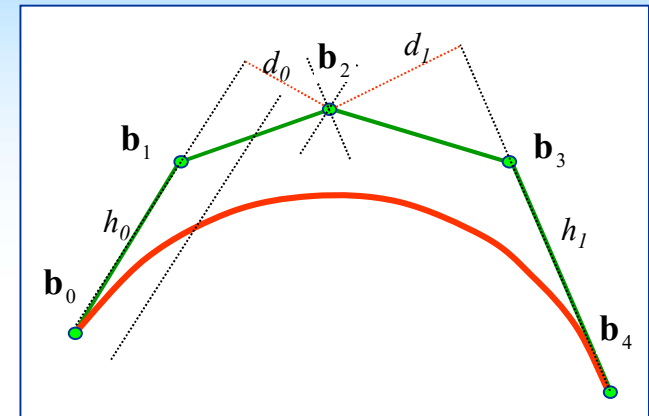
Gördülő gömb lekerekítés (folyt.):

- nagyon intuitív módszer
- határgörbék és a körívek automatikusan adódnak
- egyszerű lekerekítések: henger, tórusz
- csak G^1 csatlakozás a felületekhez (!)
- változó sugarú lekerekítés:

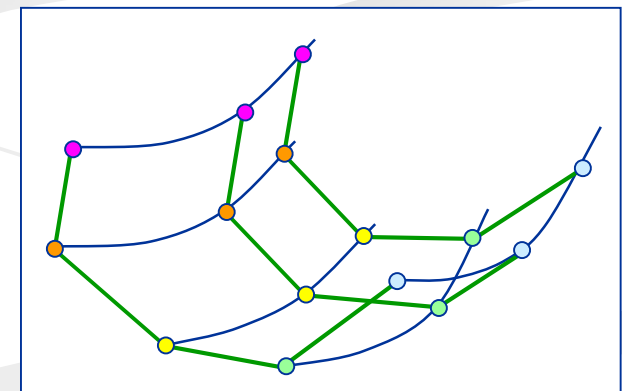
$$R(\lambda) \Rightarrow \mathbf{c}(\lambda), \mathbf{q}_1(\lambda), \mathbf{q}_2(\lambda)$$

Parametrikus lekerekítő felületek:

- racionális közelítés kiváltható
- harmad-, negyed vagy ötödfokú polinomiális görbeívek sorozata
- illesztés - párhuzamosan 12, 15, 18 dimenziós görbék hosszanti approximációja
- G^2 is lehetséges, görbület öröklődik
- szabadon választható határgörbék



Negyedfokú ív, G^2 kapcsolódás



Kontrollpoligon sorozat