3D Számítógépes Geometria II.

3. Szabadformájú felületek illesztése és simítása

http://cg.iit.bme.hu/portal/3dgeo2
https://www.vik.bme.hu/kepzes/targyak/VIIIAV16

Dr. Várady Tamás, Dr. Salvi Péter
BME, Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Irányítástechnika és Informatika Tanszék

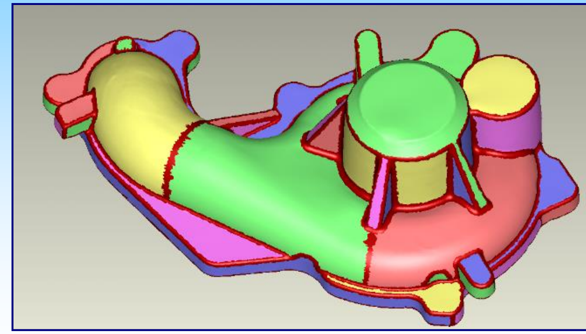
Tartalom

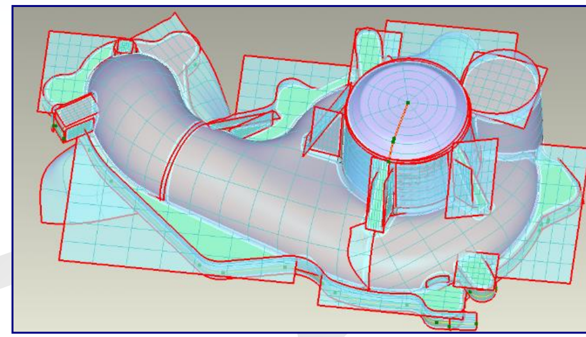
- Felületillesztés B-spline-okkal
  - alkalmazási területek, követelmények
  - a megoldandó egyenletrendszer (ismétlés)
- Szép (fair) görbék és felületek
  - globális simító eljárások (energia integrálok)
  - lokális kontrollpont optimalizálás
- Paraméterezés, gyenge kontrollpontok
- A labeling technika

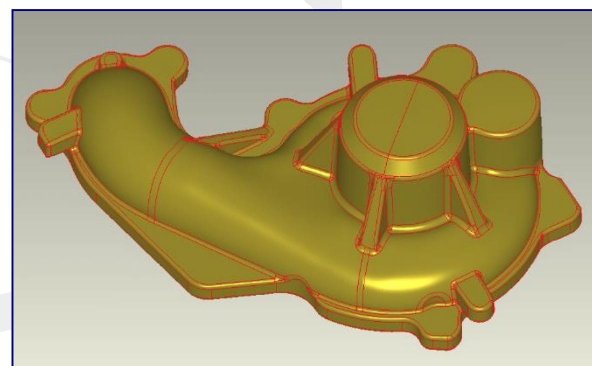
Felületillesztés$_1$

- Cél: általános topológiájú háromszögháló tartományok közelítése parametrikus felületekkel

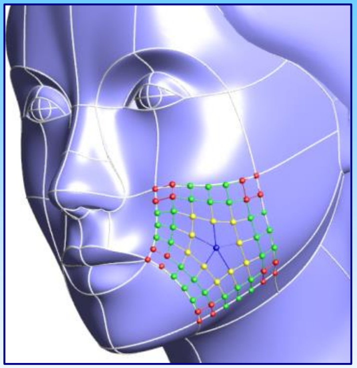
- Digitális alakzatrekonstrukció: szegmentált tartományok → felületmodell



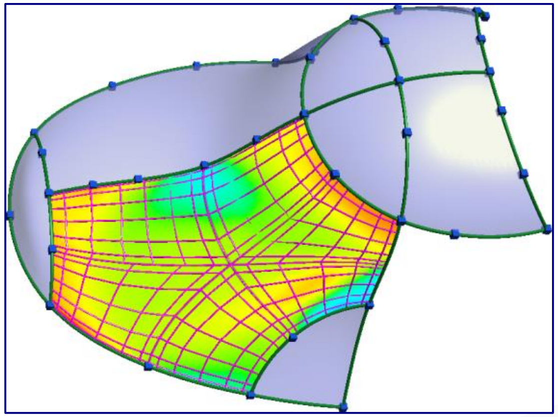


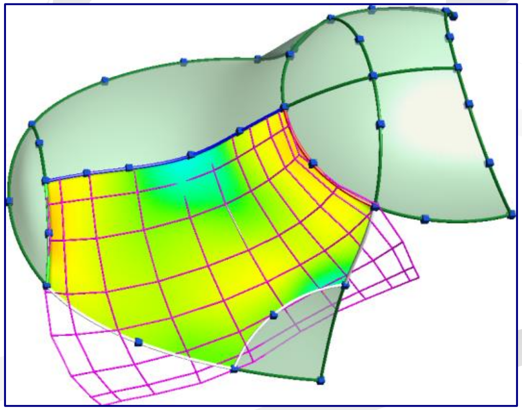


Felületillesztés$_2$



- Nem szabványos felületreprezentációk konverziója szabványos (NURBS) formátumra; export különböző CAD/CAM alkalmazásokhoz
- Példa – általános topológiájú görbeháló alapú modellezése; n-oldalú felületek → visszavágott (trimmelt) felületek

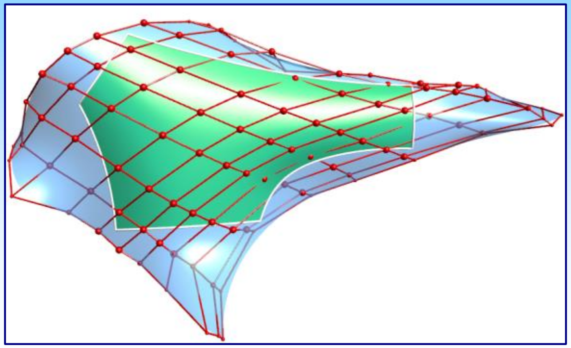


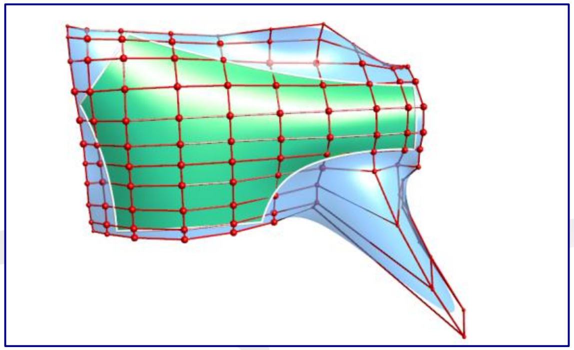


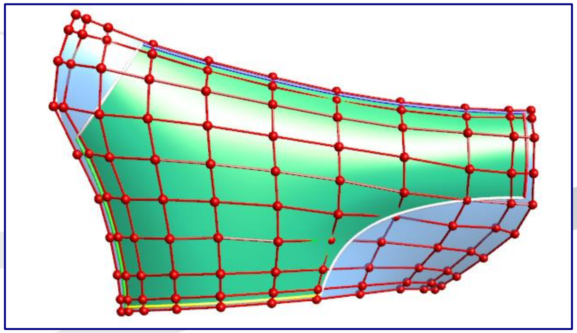
Követelmények$_1$

- Pontosság (előírt tolerancia)
- Egyenletes görbületeloszlás mind a tartomány belsejében, mind azon kívül
- A kontrollpontok száma legyen relatíve alacsony
- A kontrollpontok elrendezése lehetőleg kövesse az alaksajátosságokat
- A felület kiterjedése (konvex burok) legyen a lehető legkisebb

A parametrizáció megválasztása alapvető kérdés !!!

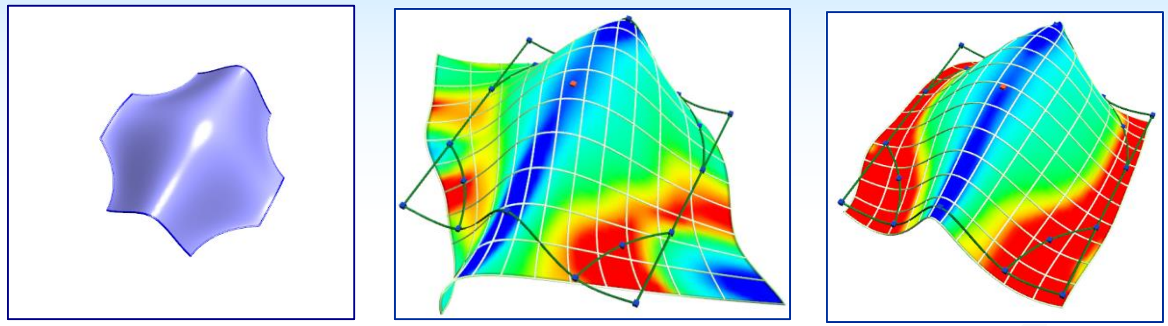




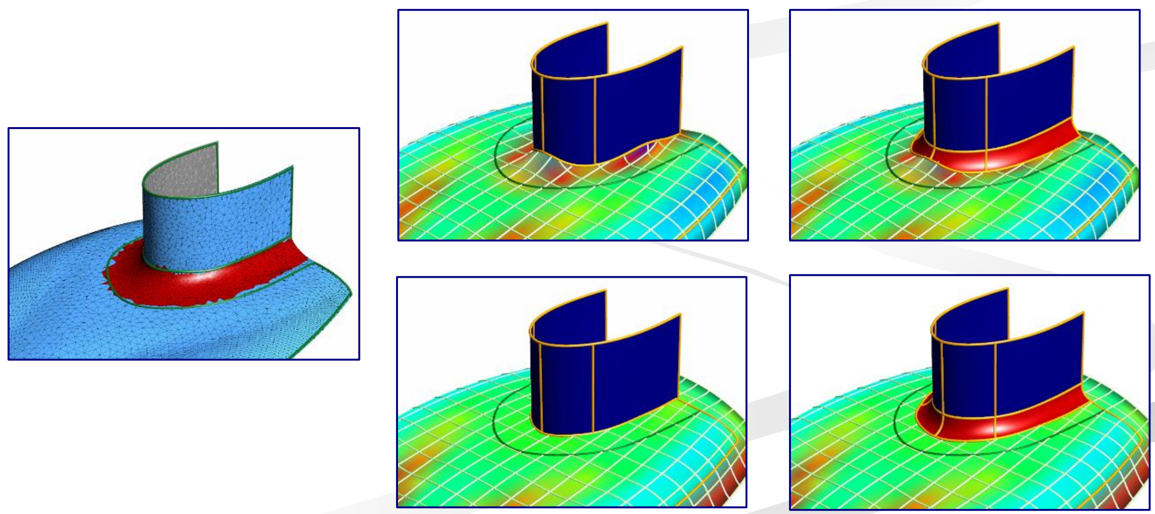


Követelmények$_2$

- Természetes orientáció



- Sima kiterjesztés



Approximáció B-spline felületekkel$_1$

Lineáris egyenletrendszer

- adott pontok paraméterezéssel: $\{\mathbf{P}_i, u_i, v_i\}, i = 0, \ldots, M;$
- B-spline felület $n+1$ x $m+1$ ismeretlen kontrollponttal:

$$\mathbf{S}(u,v) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} \mathbf{c}_{kl} N_k(u)\, N_l(v)$$

$$\{\mathbf{c}_{kl}\}, k = 0, \ldots, n; l = 0, \ldots, m; \quad \rightarrow \{\mathbf{c}_j\},\ j = 0, \ldots, N;$$

- $M >> N$ egyenlet $\Rightarrow$ távolságfüggvény minden adatpontra

$$d_i = \left| \mathbf{P}_i - \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} \mathbf{c}_{kl} N_k(u_i)\, N_l(v_i) \right| = \left| \mathbf{P}_i - \sum_{j=0}^{N} \mathbf{c}_j \overline{N}_j(u_i, v_i) \right|;$$

$$j = k(m+1) + l,\ \mathbf{c}_j = \mathbf{c}_{kl},\ \overline{N}_j(u_i, v_i) = N_k(u_i) N_l(v_i);\ j = 0, \ldots, N$$

- négyzetes távolság függvény:

$$F_{lsq}(\mathbf{c}_0, \ldots, \mathbf{c}_N) = \sum_{i=0}^{M} \left| \mathbf{P}_i - \mathbf{S}(u_i, v_i) \right|^2 = \sum_{i=0}^{M} \sum_{j=0}^{N} \left| \mathbf{P}_i - \mathbf{c}_j \overline{N}_j(u_i, v_i) \right|^2$$

- minimalizálás:

$$\frac{\partial F_{lsq}}{\partial \mathbf{c}_k}(\mathbf{c}) = -2 \sum_{i=0}^{M} \left(\sum_{j=0}^{N} \mathbf{P}_i - \mathbf{c}_j \overline{N}_j(u_i, v_i) \right) \overline{N}_k(u_i, v_i), \quad k = 0, 1, \ldots, N$$

Approximáció B-spline felületekkel$_2$

- mátrix alakban:

$$\min\ ([\mathbf{N}][\mathbf{c}]-[\mathbf{P}])^2 \Rightarrow [\mathbf{N}]^T[\mathbf{N}][\mathbf{c}]=[\mathbf{N}]^T[\mathbf{P}],$$

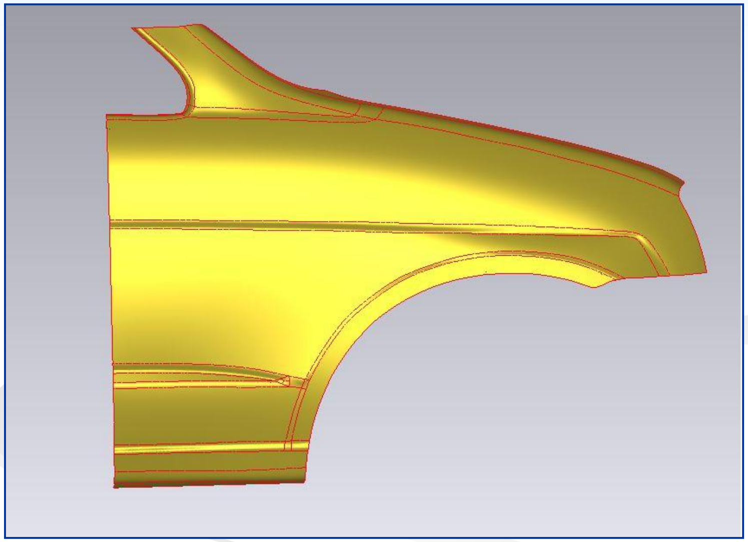
$$[\mathbf{M}_{\mathbf{lsq}}][\mathbf{c}]=[\mathbf{b}]$$

- ahol

$$[\mathbf{M}_{\mathbf{lsq}}]=[\mathbf{N}]^T[\mathbf{N}], \quad [\mathbf{b}]=[\mathbf{N}]^T[\mathbf{P}].$$

- a megoldás:

$$[\mathbf{c}]=[\mathbf{M}_{\mathbf{lsq}}]^{-1}[\mathbf{b}]$$



Simító integrál:

$$F_{smooth}(\mathbf{c}_0,\ldots,\mathbf{c}_N)=\iint_{\Omega}(\mathbf{S}_{uu}^2+2\mathbf{S}_{uv}^2+\mathbf{S}_{vv}^2)\,du\,dv$$

- minimalizálás:

$$F_{comp}(\mathbf{c})=F_{lsq}(\mathbf{c})+\lambda\,F_{smooth}(\mathbf{c}) \quad \Rightarrow [\mathbf{c}]=[\mathbf{M}_{\mathbf{lsq}}+\lambda\mathbf{M}_{smooth}]^{-1}[\mathbf{b}]$$

- simítási súly λ , helyes beállítása kritikus lehet

Approximáció B-spline felületekkel$_3$

Hibabecslés:

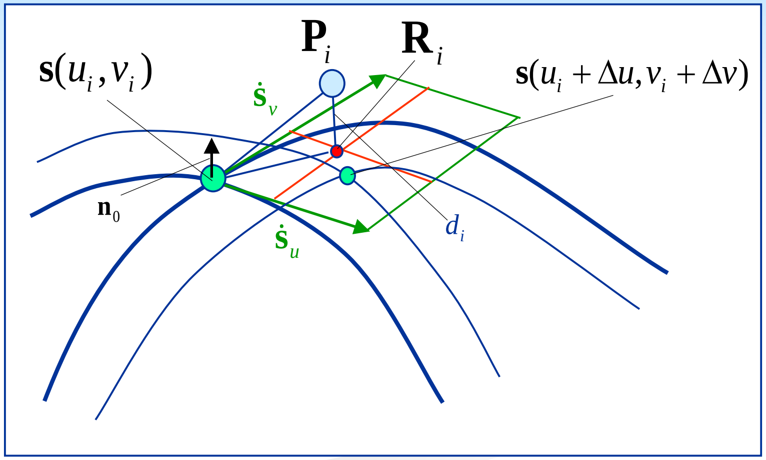
$$\mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{s}_u \times \mathbf{s}_v}{|\mathbf{s}_u \times \mathbf{s}_v|}, \; d_i \cong |\mathbf{P}_i - \mathbf{s}(u_i + \Delta u, v_i + \Delta v)|$$

$$\boxed{d_i = |\mathbf{P}_i - \mathbf{s}(u_i, v_i)| \, |\mathbf{n}_0| \cos\varphi = (\mathbf{P}_i - \mathbf{s}(u_i, v_i), \mathbf{n}_0)}$$

$$d_i \le \varepsilon$$

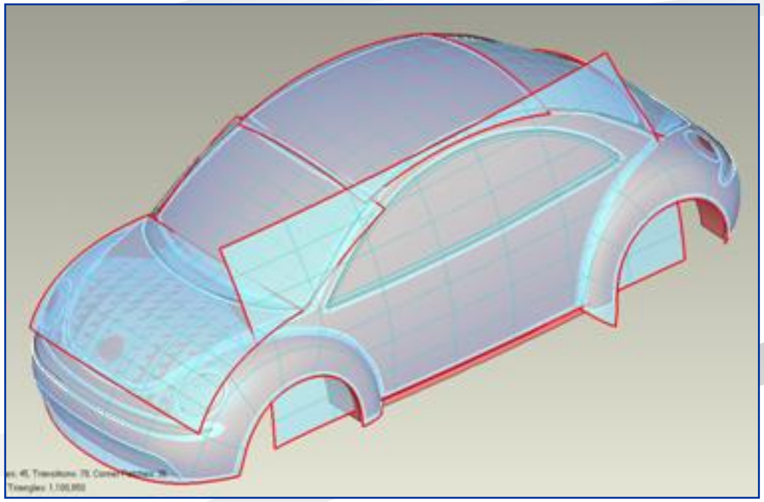
$$\mathbf{R}_i = \mathbf{P}_i - d_i \mathbf{n}_0 \cong \mathbf{s}(u_i, v_i) + \Delta u \dot{\mathbf{s}}_u + \Delta v \dot{\mathbf{s}}_v,$$

$$\Rightarrow (\Delta u, \Delta v)$$



Paraméterkorrekció:

$$\boxed{(u_i, v_i)^{k+1} = (u_i, v_i)^k + (\Delta u_i, \Delta v_i), \; i = 0, \ldots, M}$$

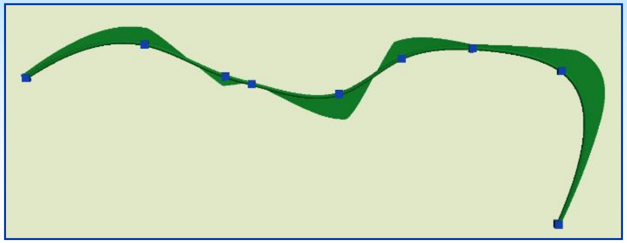


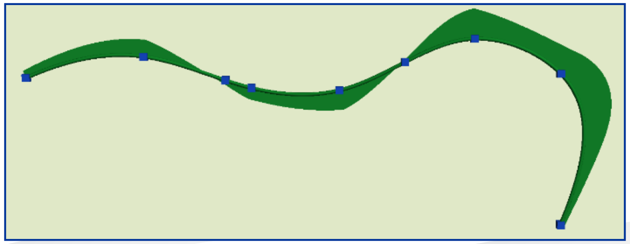
Általános problémák:

- kezdeti paraméterezés – n-oldalú szabálytalan ponttartományra
- nagyon sok lehetőség van – jelentősen befolyásolja a felületminőséget

Szép (fair) görbék és felületek

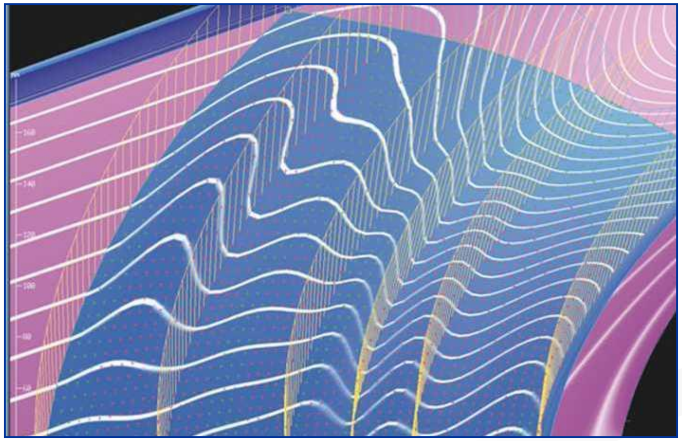
- nincs egyértelmű matematikai definíció...
- fair: a görbületeloszlás egyenletes és a lehető legkevesebb monoton szakaszból áll
- kerülendő: felesleges inflexiók, erős görbületi szélsőértékek, lapos szakaszok

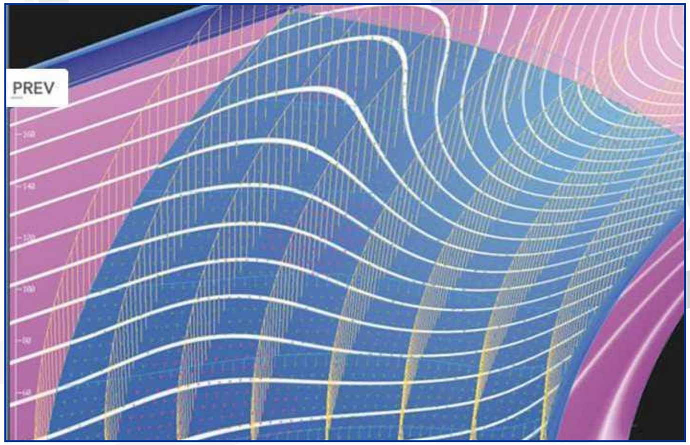




<u>1. globális eljárás:</u> ponthalmaz illesztése simaságot optimalizáló tagokkal

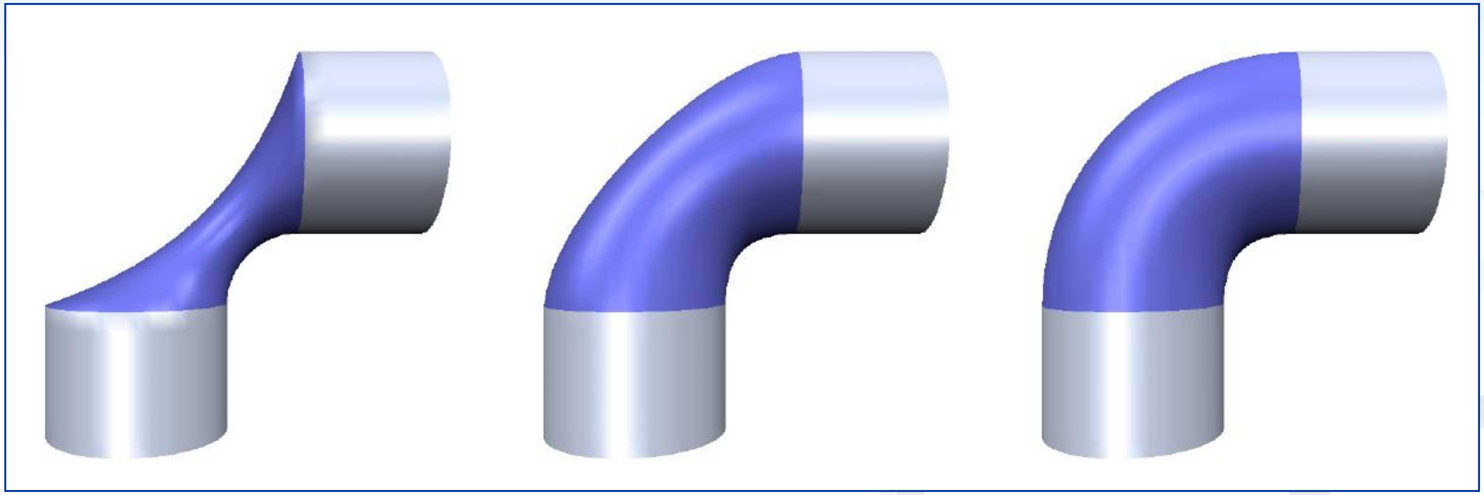
<u>2. lokális eljárás:</u> kontrollpontok poziciójának optimalizálása





Simasági mértékek

- Energia-minimalizálás (fairing) – minőségmérő integrálok: a „tökéletlenséget” büntetik
- A simaság fontos: pl. megjelenítésnél, anyagtulajdonságok, megmunkálás stb.



(Kobbelt)

Membrán energia:
- a felület legyen kicsi

$$\int_S dA = min.$$
$$\iint_\Omega |\mathbf{r}_u|^2 + |\mathbf{r}_v|^2 \, dudv$$

Rugalmas lap energia (thin plate):
- ne legyen nagy a görbület

$$\int_S \kappa_1^2 + \kappa_2^2 dA = min.$$
$$\iint_\Omega |\mathbf{r}_{uu}|^2 + 2|\mathbf{r}_{uv}|^2 + |\mathbf{r}_{vv}|^2 \, dudv$$

Minimális görbület variáció:
- ne változzon gyorsan a görbület

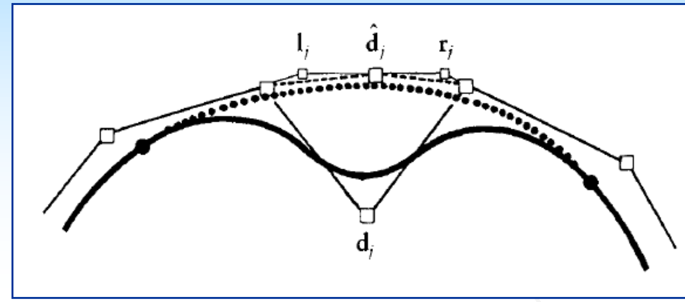
$$\int_S \left(\frac{\partial \kappa_1}{\partial \mathbf{k}_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \kappa_2}{\partial \mathbf{k}_2}\right)^2 dA = min.$$

Kontrollpontok optimalizálása$_1$

Harmadfokú B-spline - C^2 folytonos:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{tt}(t_0^-) = \ddot{\mathbf{r}}_{tt}(t_0^+) \rightarrow \kappa(t_0^-) = \kappa(t_0^+)$$

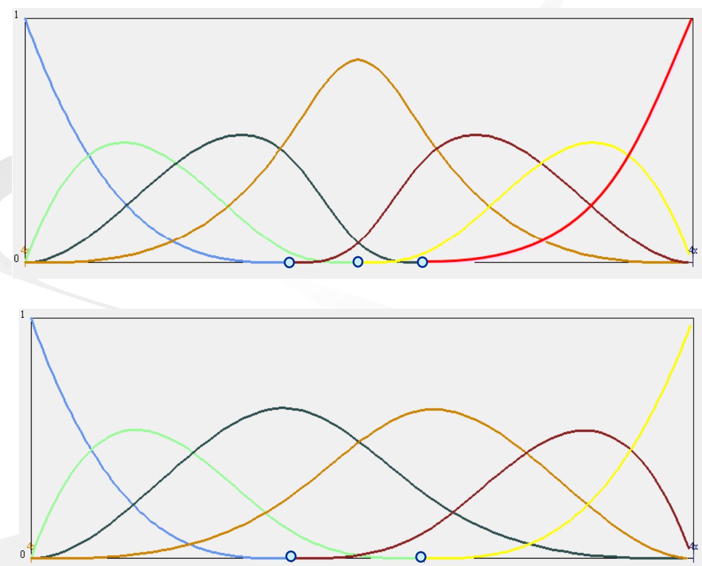
$$\dddot{\mathbf{r}}_{ttt}(t_0^-) \neq \dddot{\mathbf{r}}_{ttt}(t_0^+) \rightarrow \kappa'(t_0^-) \neq \kappa'(t_0^+)$$



- simasági mérték - a görbületváltozások összege:

$$\sum_i |\kappa'(t_i^-) - \kappa'(t_i^+)| \Rightarrow \sum_i |\dddot{\mathbf{r}}_{ttt}(t_0^-) - \dddot{\mathbf{r}}_{ttt}(t_0^+)|$$

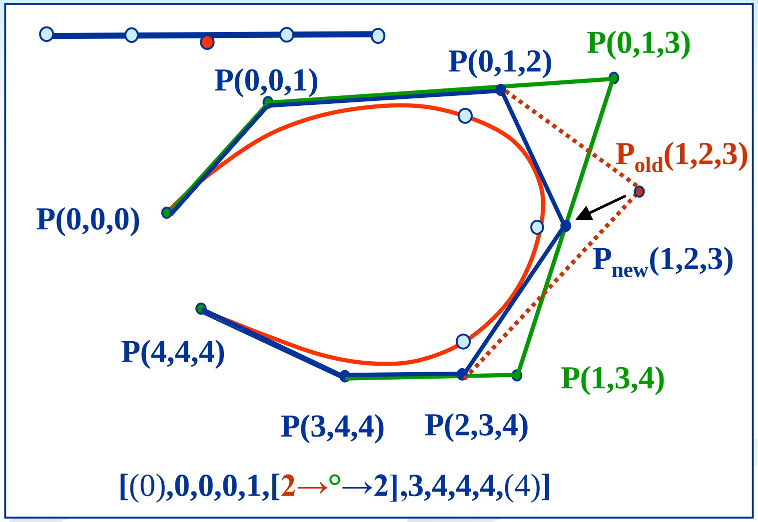
- lokális optimalizálás a csomóértékeknél: a folytonossági ugrás csökkentése
  - (i) csomótörlés → módosított görbe
  - (ii) két szegmens közelítése eggyel → új súlyfüggvények, új tartópontok
  - (iii) csomóbeszúrás → görbe nem változik
- csomótörlés - nem egyértelmű; legegyszerűbb, ha csak egy kontrollpont változik

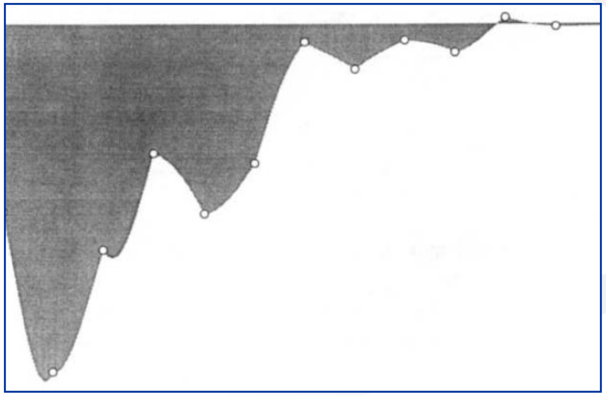


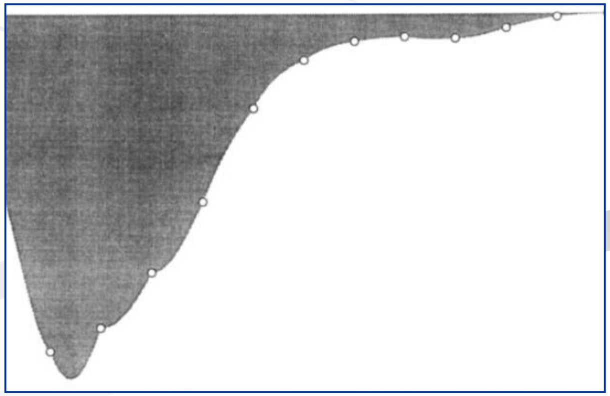
Csomótörlés

Kontrollpontok optimalizálása$_2$

- csomóbeszúrás poláris koordináták segítségével (lásd B-spline fejezet)
- csomótörlés: azonos logika visszafele
- javítandó kontrollpontok sorba állítása a folytonossági ugrások alapján:
  - harmadfokú B-spline esetén: három csomóbeli ugrás összege
  - kontrollpont javítás → prioritás sor módosítása



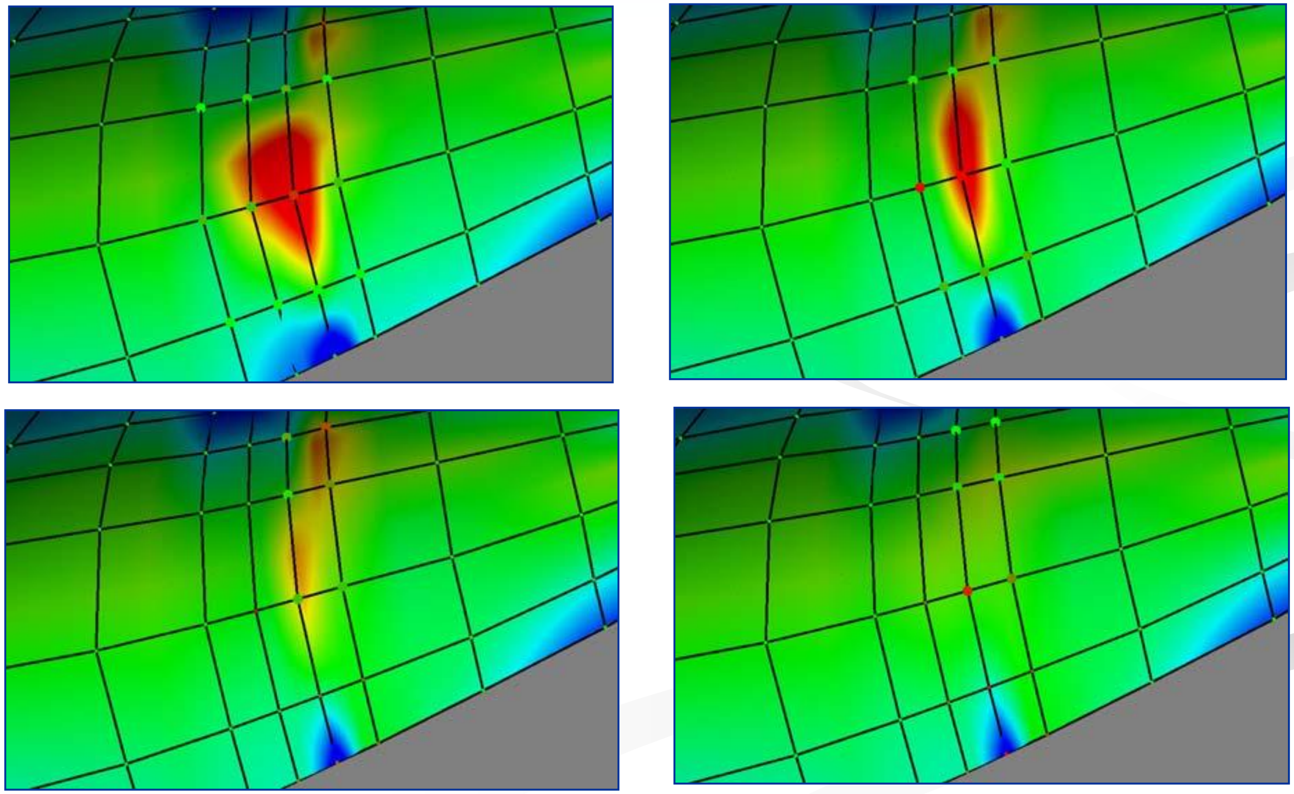




Kontrollpontok optimalizálása$_3$

Általánosítás felületekre

- a csomók által alkotott rács pontjaiban
  a simasági mérték: $|\ddot{\mathbf{r}}_{uuu}(u_0^-, v_0) - \ddot{\mathbf{r}}_{uuu}(u_0^+, v_0)|^2 + |\ddot{\mathbf{r}}_{vvv}(u_0, v_0^-) - \ddot{\mathbf{r}}_{vvv}(u_0, v_0^+)|^2$
- a javítandó kontrollpontokat sorba rendezzük és optimalizáljuk



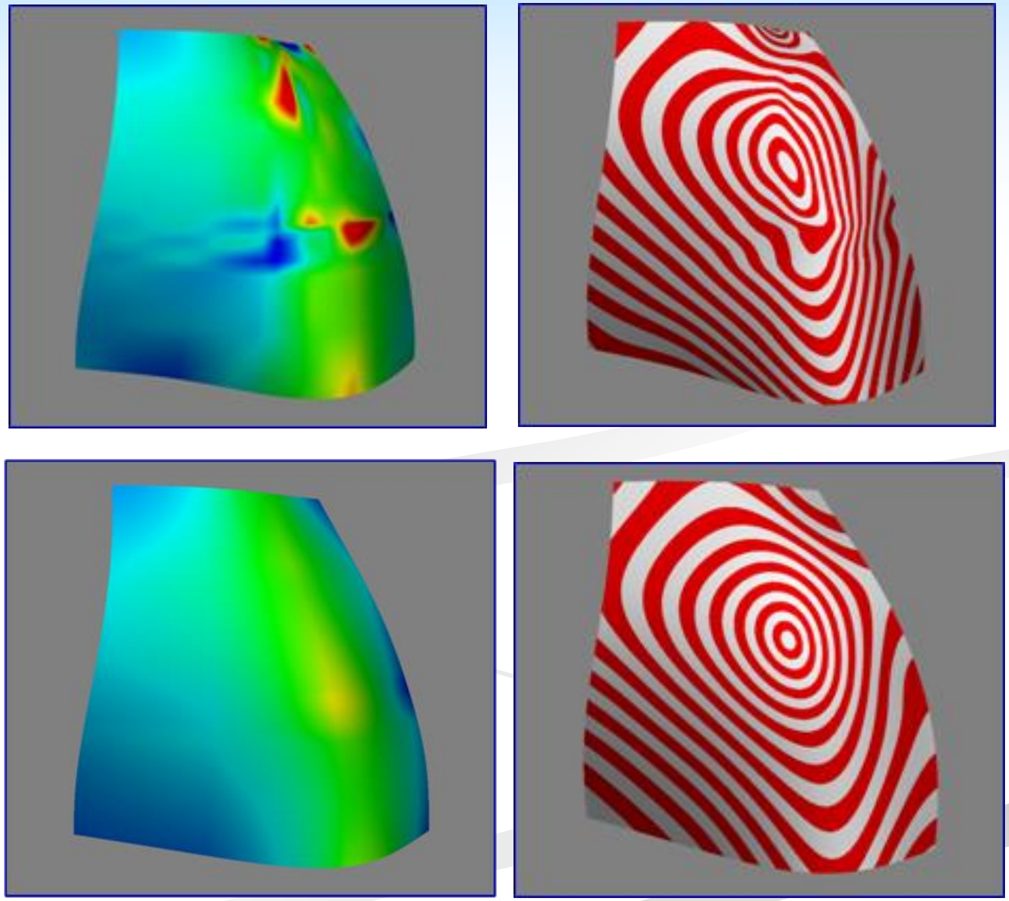
Kontrollpontok optimalizálása$_4$

Grafikus indikátorok

- síkmetszetek (G^1)
- átlaggörbületi térkép (G^2)
- Gauss görbületi térkép (G^2)
- fényvonalak (isophotes) (G^2)

  - a fény beesési szögét mutatja a normálvektorhoz viszonyítva (diszkrétizált csíkok)

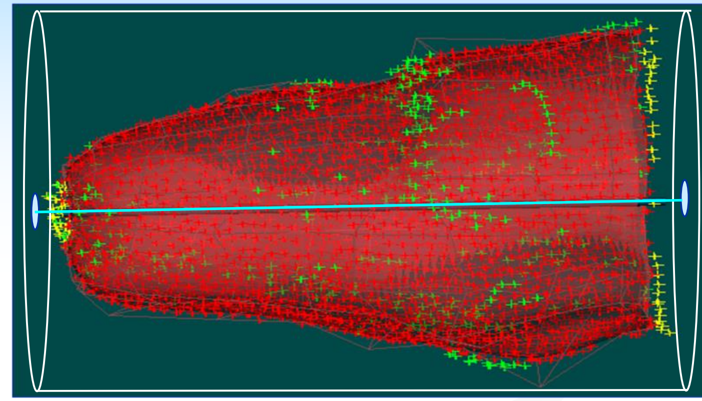
  - nagyon érzékeny felületi jellemző



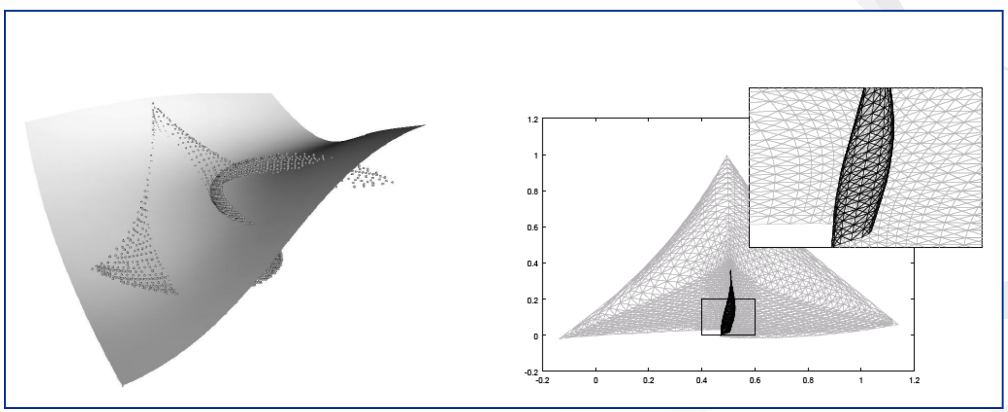
Felületek paraméterezése$_1$

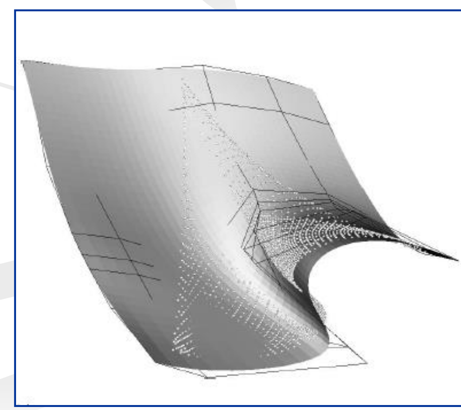
$$|\,\mathbf{P}_i - \mathbf{S}(u_i, v_i)\,|^2$$

Alapkövetelmény: a jó illesztés feltétele



- legegyszerűbb - projekció az LSQ síkra
- referencia felület - tág toleranciával
  közelítő felület, amely paraméterezhető
  - (i) hengerfelület
  - (ii) alacsony fokszámú Bézier felület
- érvényes parametrizáció: leképzett háromszögek
  nem torzulnak és nem fordulnak át



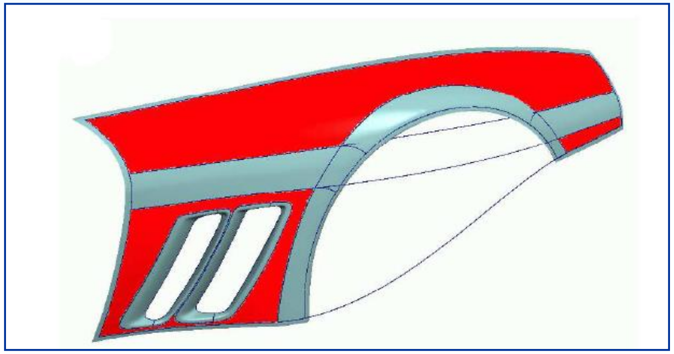


Felületek paraméterezése$_2$

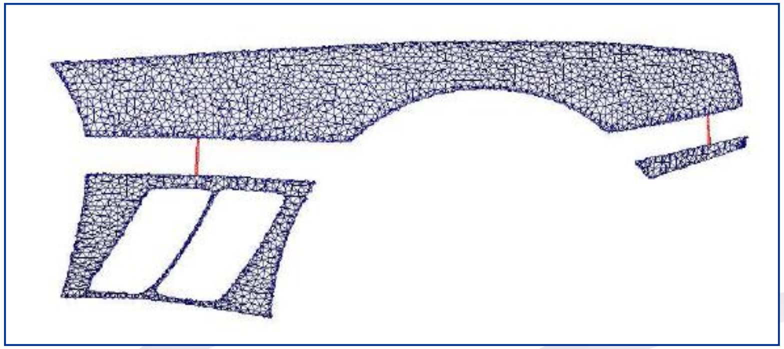
$$|\mathbf{P}_i - S(u_i, v_i)|^2$$

Általános megoldás: síkbaterítés (flattening vagy mesh-parametrization)

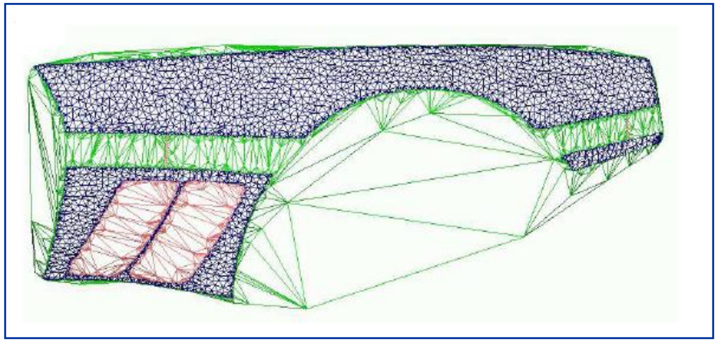
Nagyon komplex kérdés – lásd: Vaitkus Márton előadása !!!



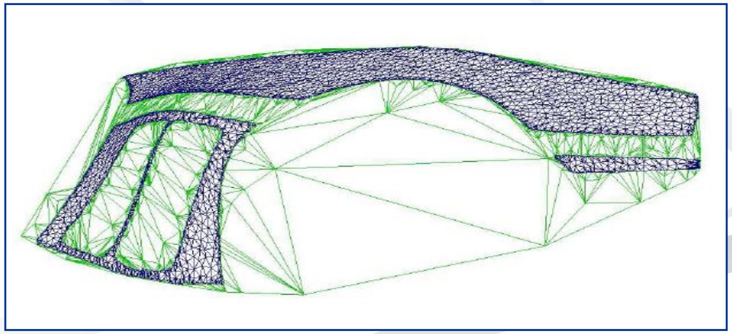
3D modell



Háromszögháló



Lyukak és konkáv részek kitöltése



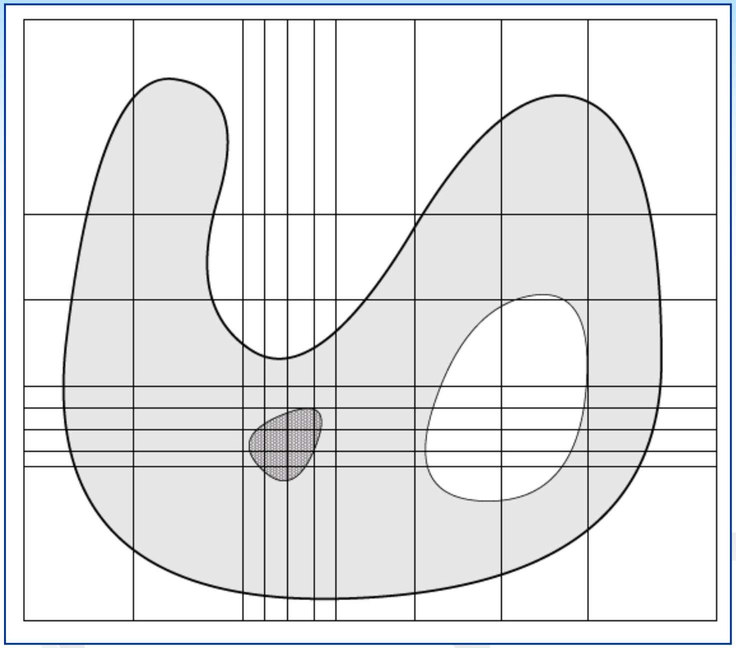
2D parametrizáció

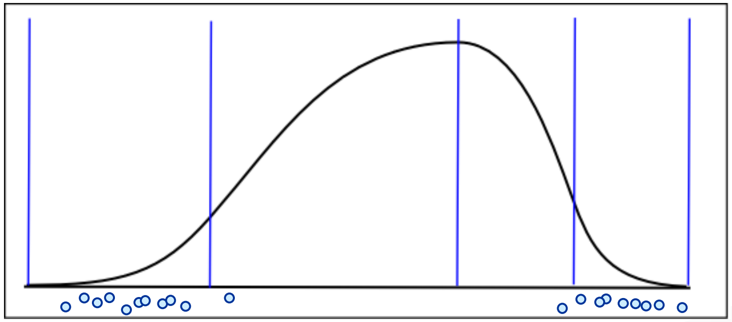
Gyenge kontrollpontok$_1$

<u>Vágott tartományok illesztése</u>

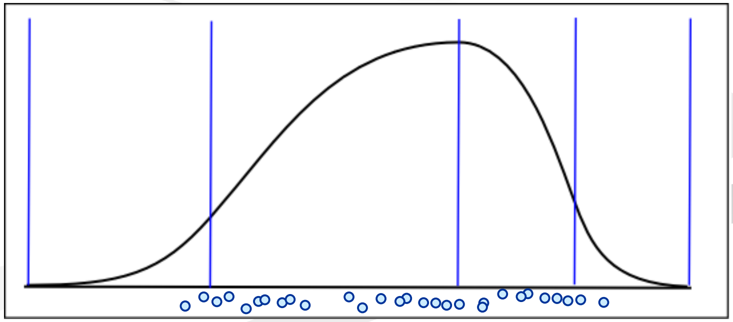
- lyukak, konkáv részek
- különböző részletgazdaság
- egyenlőtlen csomóeloszlás

- gyenge kontroll pont - a bázisfüggvény csak nagyon kis súlyokat hoz be a minimalizálási egyenletbe
- ezen pontok pozíciója kis mértékben meghatározott → nem kívánatos hullámzás





Gyenge kontrollpont

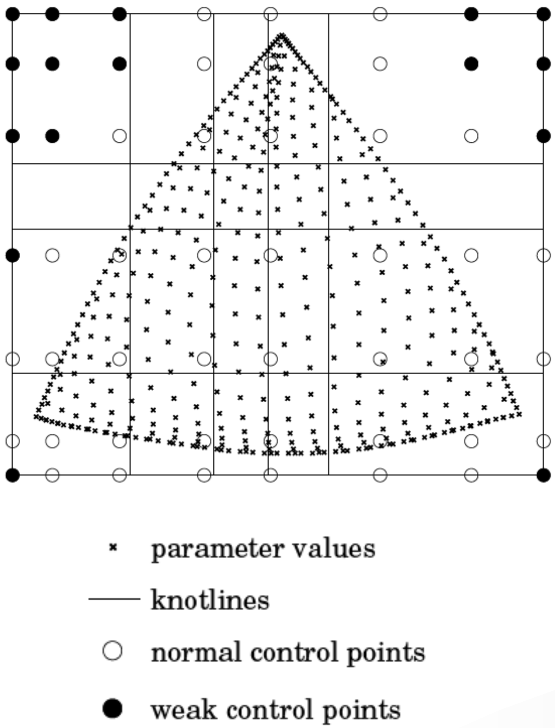


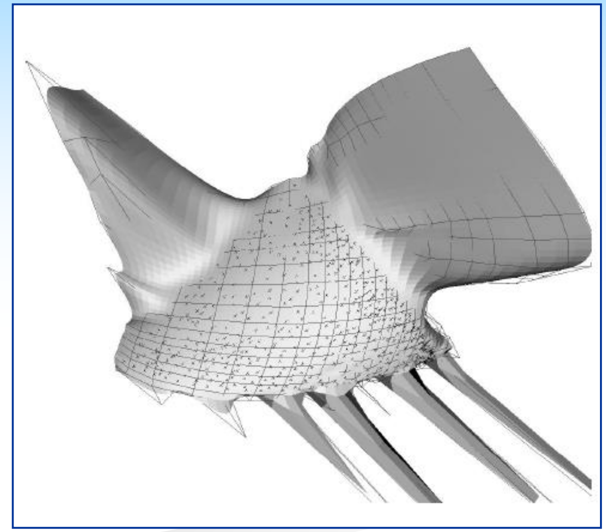
Erős kontrollpont

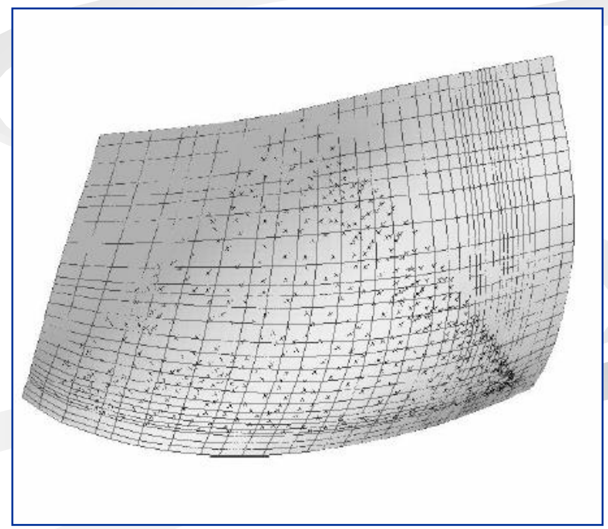
Gyenge kontrollpontok$_2$

Megoldás: gyenge kontrollpontok kényszerezése

- kontrollpontok lekötése
- simító függvények alkalmazása
- mesterséges adatpontok generálása



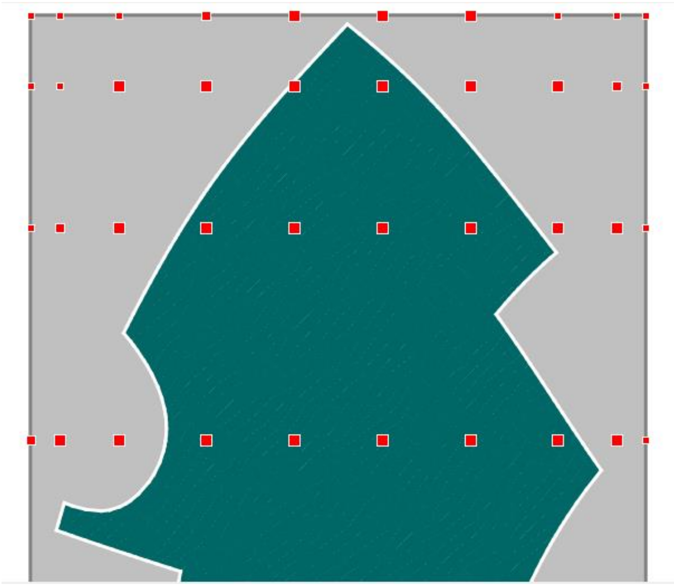


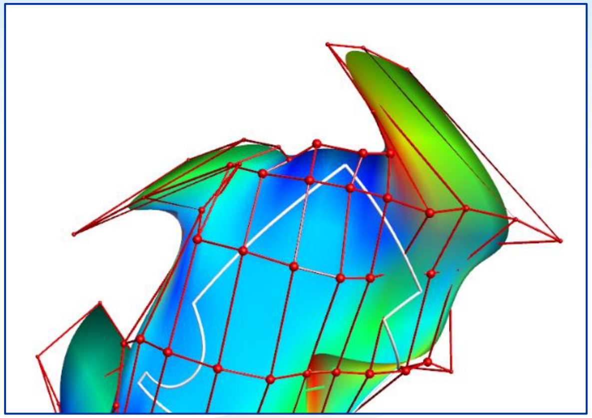


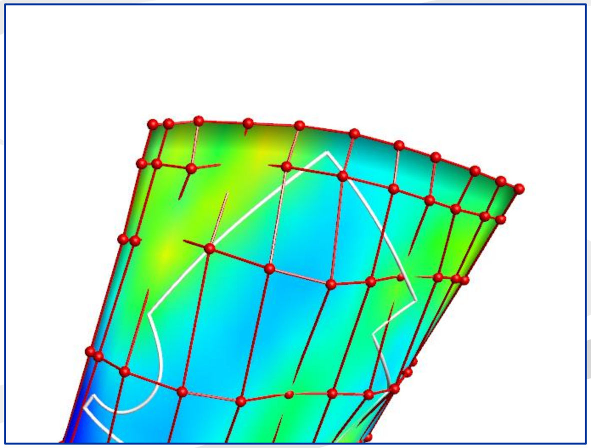
Gyenge kontrollpontok$_2$

Megoldás: gyenge kontrollpontok kényszerezése

- kontrollpontok lekötése
- simító függvények alkalmazása
- mesterséges adatpontok generálása

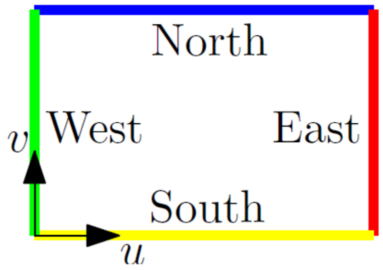


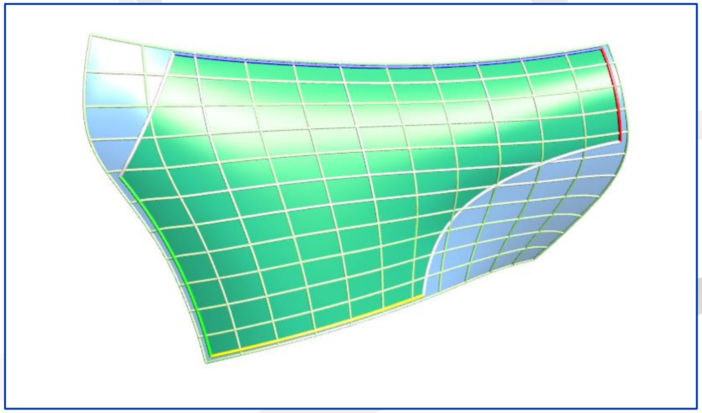




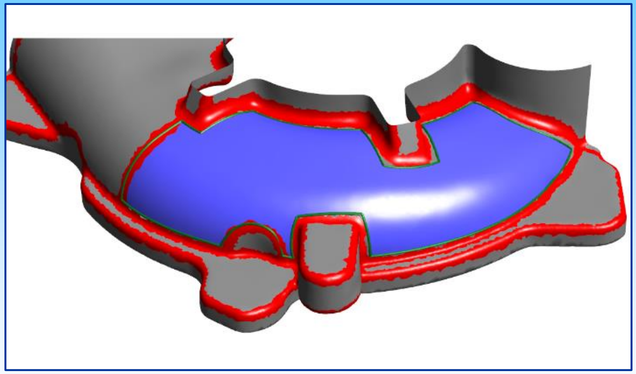
Labeling

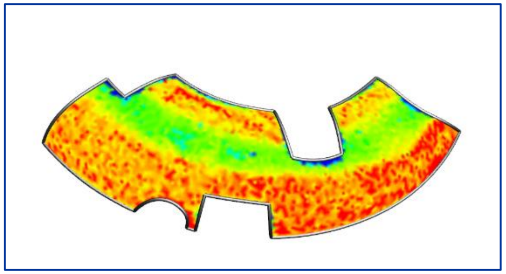
- Cél: az ismeretlen felület orientálása
- Tenzor szorzat felületek – négyoldalú domén
- Labeling – az n-oldalú tartomány határgörbéinek és az illesztendő felület határgörbéinek összerendelése (interaktív vagy automatikus)
- North, East, South, West, Unlabeled (trim görbe)
- Több határgörbének is lehet ugyanolyan labele
- Nem kell az összes labelnek szerepelnie

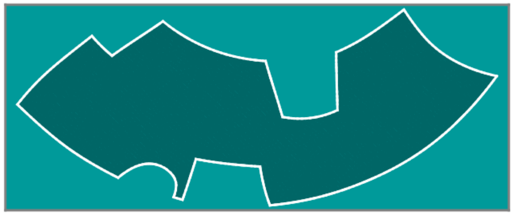


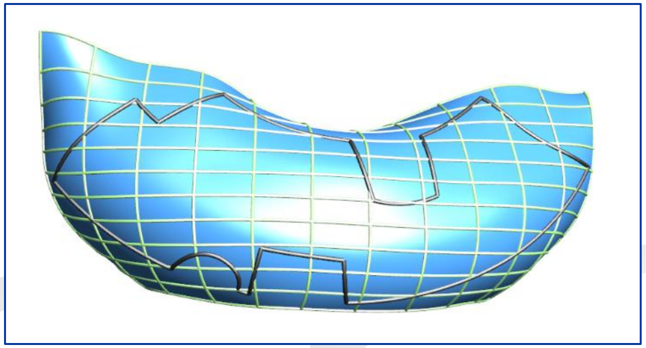


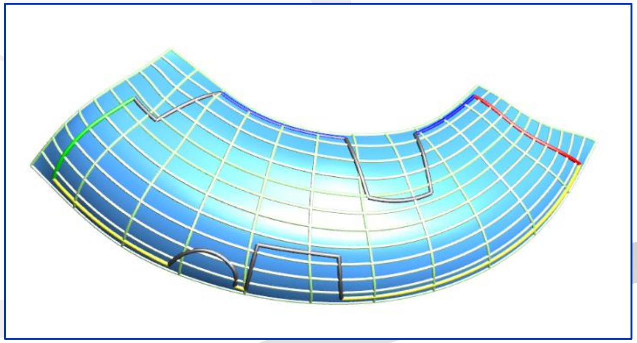
Labeling -példa$_1$



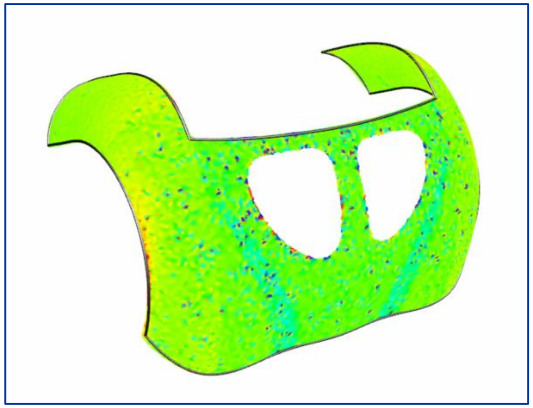


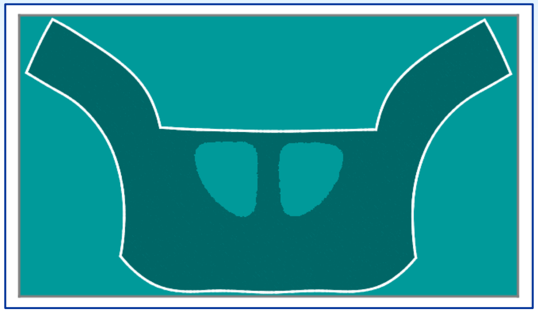


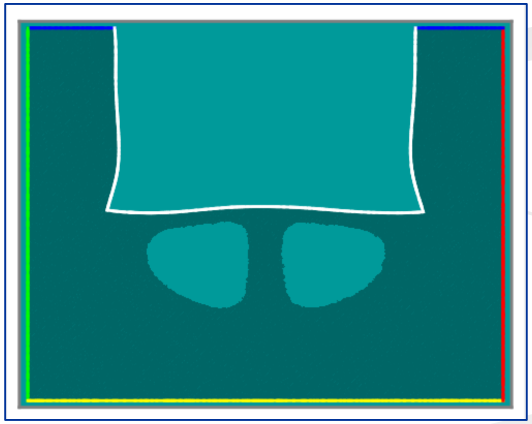


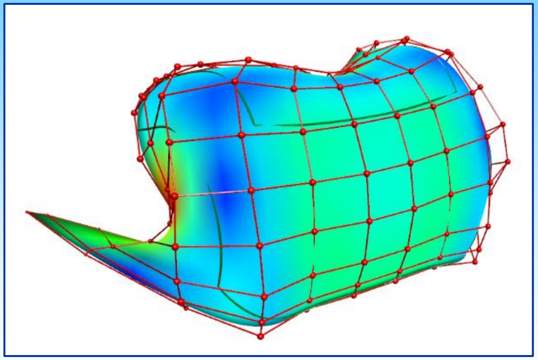


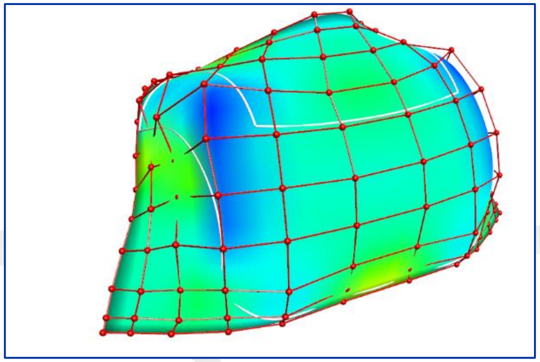
Labeling – példa$_2$

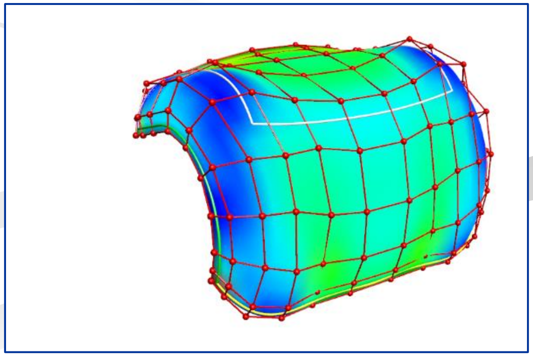












A labeling work-flow