# 3D Számítógépes Geometria II.

## 2. Racionális görbék és felületek

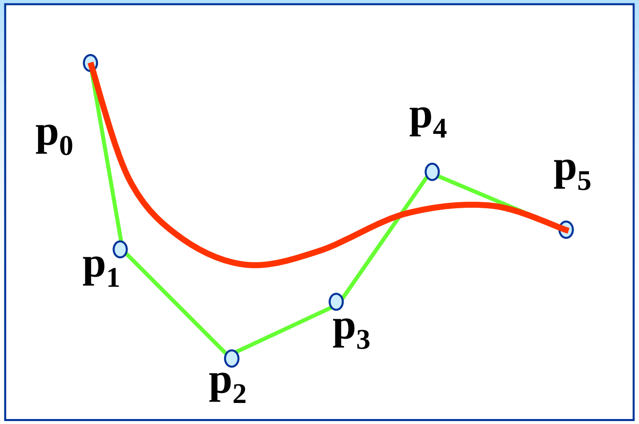
http://cg.iit.bme.hu/portal/3dgeo2
https://www.vik.bme.hu/kepzes/targyak/VIIIAV16

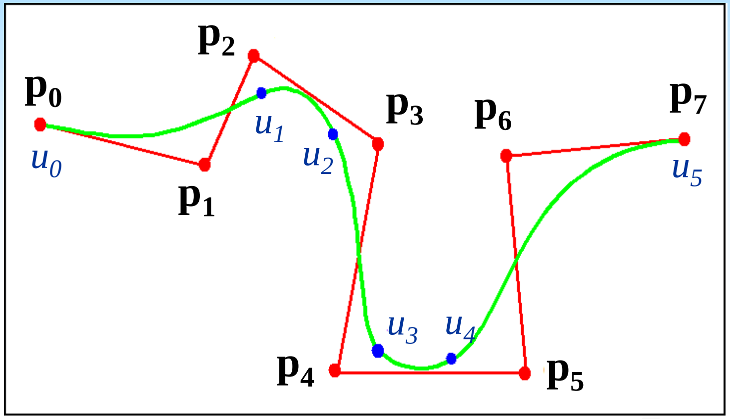
Dr. Várady Tamás, Dr. Salvi Péter
BME, Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Irányítástechnika és Informatika Tanszék

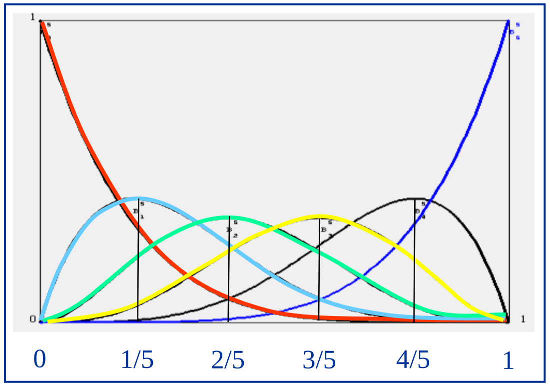
# Tartalom

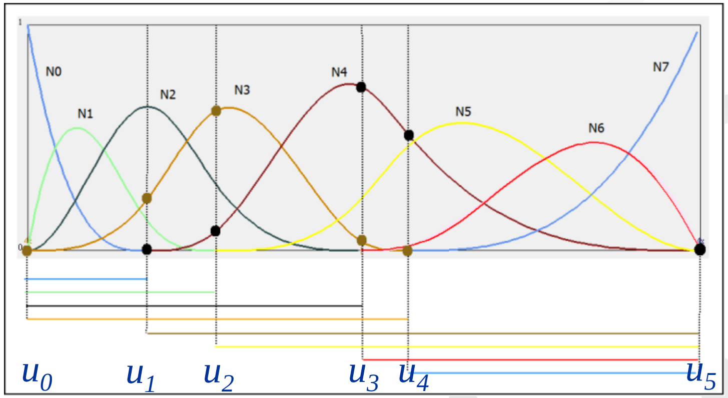
- motiváció
- projektív leképzés, kettősviszony
- kúpszeletek
- körívek
- racionális Bézier görbék
- tulajdonságok, operációk
- racionális B-spline görbék (NURBS)
- racionális felületek

# Bézier vs. B-spline




$$\mathbf{r}(u) = \sum_{i=0}^{5} \mathbf{p}_i B_i^5(u)$$

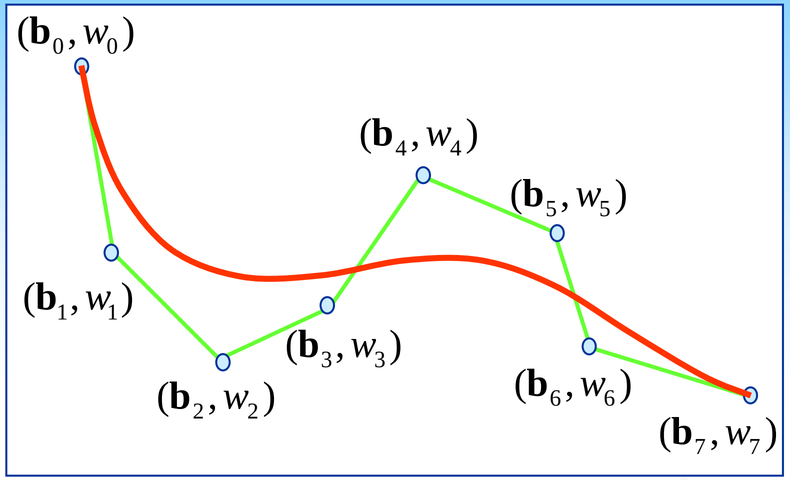
$n = 5,\ [0,1],$
$[p_0, \ldots, p_5]$

$$\mathbf{r}(u) = \sum_{i=0}^{7} \mathbf{p}_i N_i^n(u)$$

$n = 3, [u_0^*, u_1, \ldots, u_5^*],$
$[p_0, \ldots, p_7]$

# Motiváció

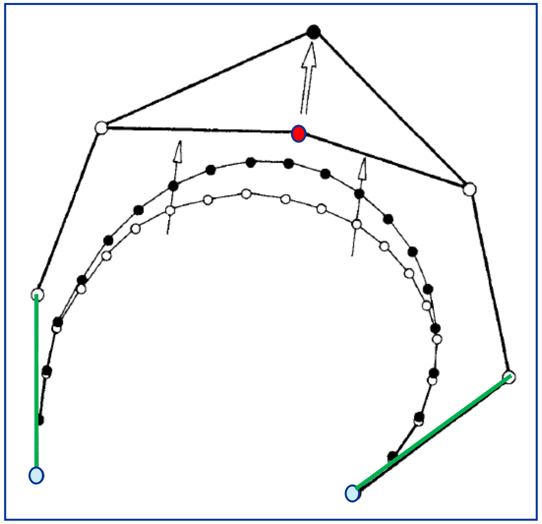
- kontroll poligon → kontroll pontok és súlyok
- bázisfüggvények → súlyozott racionális polinomok



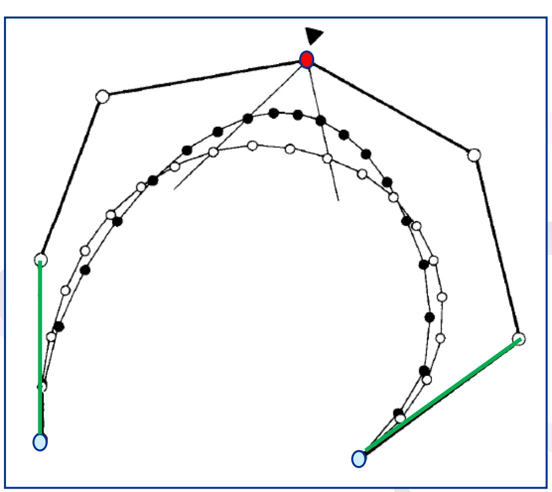

- körök, kúpszeletek pontos reprezentációja
- egyszerű implicit felületek (henger, kúp, gömb, tórusz) parametrikus formában
  - egységes reprezentáció
  - implicit felületeken véges felületdarabok
  - felület-felület metszés – preferencia: implicit x parametrikus
- általános forgásfelületek
- PH-görbék offszet görbéinek reprezentálása

# Racionális Bézier görbék….

- racionális Bézier görbe: $$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i \overline{B}_i^n(t)$$



$$(\mathbf{b}_i, w_i) \Rightarrow (\mathbf{b}_i + \Delta\mathbf{b}, w_i)$$



$$(\mathbf{b}_i, w_i) \Rightarrow (\mathbf{b}_i, w_i + \Delta w)$$

# 3D → 2D projekció

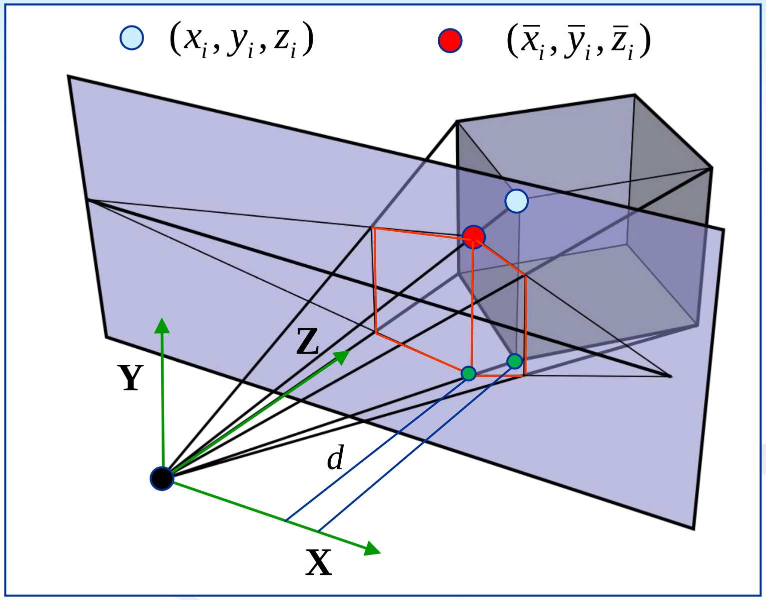
$$3\text{D}:[x_i, y_i, z_i]$$

$$\text{Képsík}:[\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i]$$

$$\frac{x_i}{\bar{x}_i} = \frac{z_i}{d}, \frac{y_i}{\bar{y}_i} = \frac{z_i}{d} \quad \Rightarrow$$

$$\bar{x}_i = d\frac{x_i}{z_i}, \bar{y}_i = d\frac{y_i}{z_i}, \bar{z}_i = d$$

$$2\text{D}: [x^* = x_i / z_i, y^* = y_i / z_i]$$



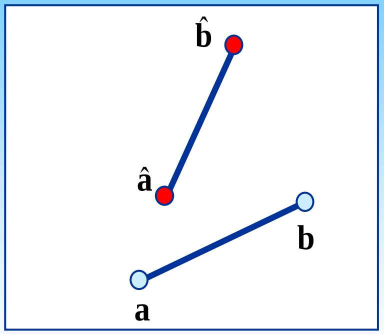

Homogén koordináták: $n$ dimenziós tér, $n+1$ koordináta

$$(a,b,c) \to (wa, wb, wc, w); \quad (p,q,r,s) \to (\frac{p}{s}, \frac{q}{s}, \frac{r}{s})$$

# Projektív leképzés$_1$

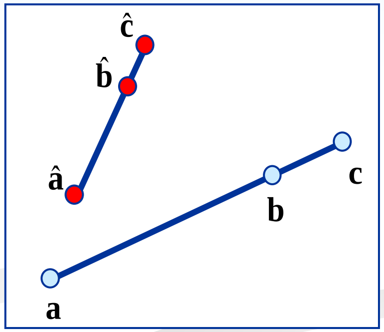
## Hasonlósági leképzés

- egyenes → egyenes
- szakaszok hossza őrződik: $|\mathbf{ab}| = |\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}|$




## Affin leképzés

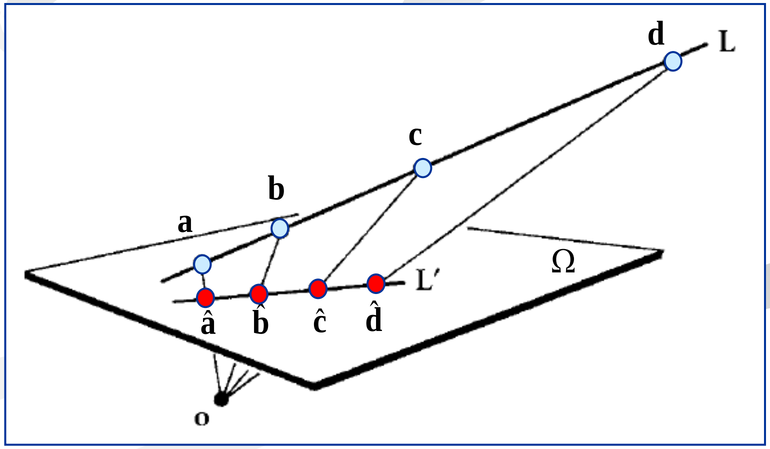
- egyenes → egyenes
- szakaszok aránya őrződik: $|\mathbf{ab}|/|\mathbf{bc}| = |\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}|/|\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{c}}|$




## Projektív leképzés

- egyenes → egyenes
- négy pont egy egyenesen;
  kettősviszony (cross ratio) definició:

$$[\mathbf{abcd}] = \frac{|\mathbf{ab}|/|\mathbf{bd}|}{|\mathbf{ac}|/|\mathbf{cd}|}$$




- *o* vetítési középpont
- *Ω* vetítési sík (képsík)
- a kettősviszony őrződik: $[\mathbf{abcd}] = [\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{c}}\hat{\mathbf{d}}]$

# Projektív leképzés$_2$

- $\Delta$ területek aránya alapján:

$$|\mathbf{ab}|/|\mathbf{bd}| = \Delta(\mathbf{abo})/\Delta(\mathbf{bdo}) = (l_1 l_2 \sin\alpha)/(l_2 l_4 \sin(\beta+\gamma))$$
$$|\mathbf{ac}|/|\mathbf{cd}| = \Delta(\mathbf{aco})/\Delta(\mathbf{cdo}) = (l_1 l_3 \sin(\alpha+\beta))/(l_3 l_4 \sin\gamma)$$

- $\Rightarrow$ a kettősviszony csak az *o*-beli szögektől függ

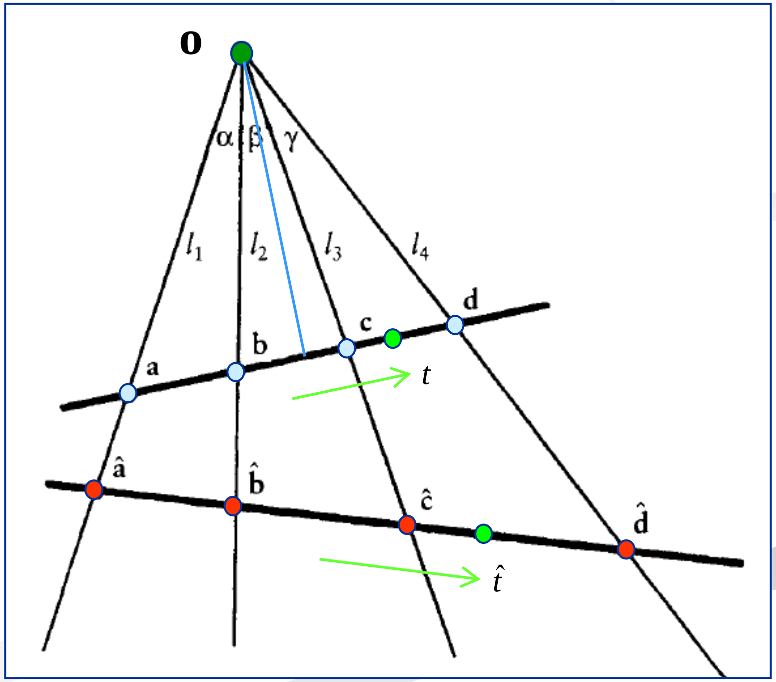
$$[\mathbf{abcd}] = \frac{|\mathbf{ab}|/|\mathbf{bd}|}{|\mathbf{ac}|/|\mathbf{cd}|} = f(\alpha,\beta,\gamma)$$

- legyen

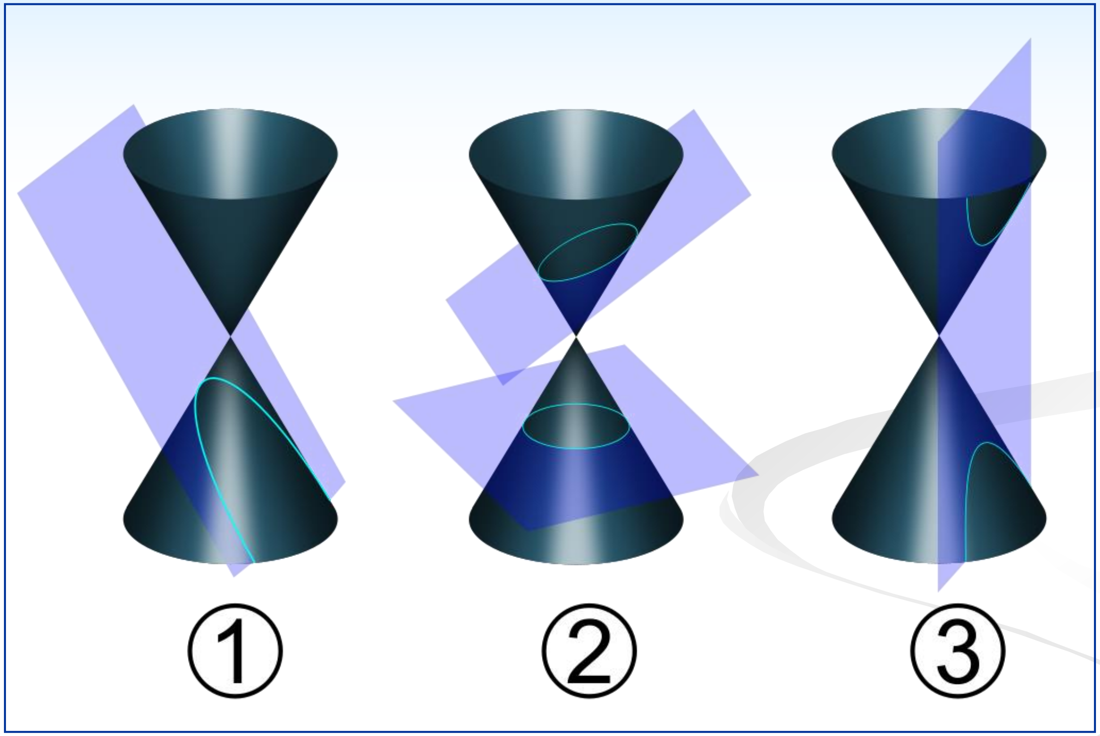
$$[\mathbf{abcd}] \to [0bt1]; \quad [\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{c}}\hat{\mathbf{d}}] \to [0\hat{b}\hat{t}1]$$

- a két egyenes közötti parametrizáció racionális, felírható az alábbi alakban:

$$\frac{\dfrac{b}{1-b}}{\dfrac{t}{1-t}} = \frac{\dfrac{\hat{b}}{1-\hat{b}}}{\dfrac{\hat{t}}{1-\hat{t}}} \Rightarrow \frac{\dfrac{t}{1-t}}{\dfrac{\hat{t}}{1-\hat{t}}} = \rho \qquad \hat{t} = \frac{t}{\rho(1-t)+t}$$



# Kúpszeletek




[wikimedia/Pbroks]

1. Parabola, 2. Kör és ellipszis, 3. Hiperbola

# Kúpszeletek$_1$

- kúpszelet létrehozása projekcióval
- térbeli parabola síkba vetítése
  - a projekció középpontja az origó
  - a projekció síkja a $z=1$ sík

    $$2\text{D}: \mathbf{b} = [b_x, b_y];\ \ 3\text{D}: \mathbf{b}^* = [b_x, b_y, 1]$$

  - vetítés:

    $$3\text{D}: \mathbf{p} = [p_x, p_y, p_z] \rightarrow 2D: \mathbf{p}^*[p_x / p_z, p_y / p_z, 1]$$

  - tetszőleges $w$-re (projektív egyenes)

    $$[b_x, b_y] \rightarrow [wb_x, wb_y, w];\quad [\mathbf{b}] \rightarrow [w\mathbf{b}, w] = \mathbf{p}$$

- parabola (3D):

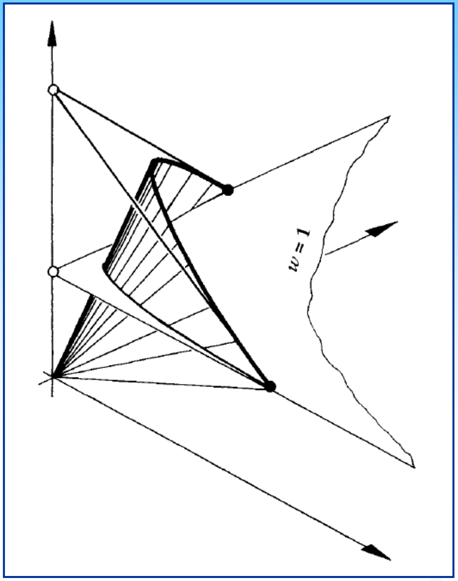
  $$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 B_0^2(t) + \mathbf{p}_1 B_1^2(t) + \mathbf{p}_2 B_2^2(t)$$

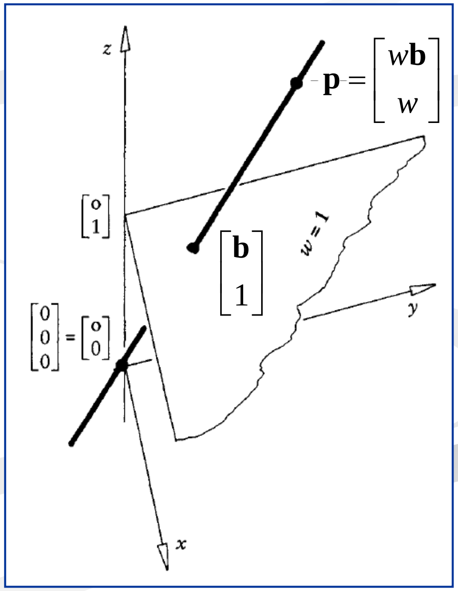
- kúpszelet (2D):

  $$\mathbf{c}(t) = \mathbf{b}_0 \overline{B}_0^2(t) + \mathbf{b}_1 \overline{B}_1^2(t) + \mathbf{b}_2 \overline{B}_2^2(t),$$

  $$\mathbf{p}_i = [w_i \mathbf{b}_i, w_i],\ i = 0,1,2$$

$(\overline{B}_i^2(t) - \textit{következő slide})$



# Kúpszeletek$_2$

- parabola (3D):

$$\mathbf{p}(t)=\mathbf{p}_0B_0^2(t)+\mathbf{p}_1B_1^2(t)+\mathbf{p}_2B_2^2(t)=\begin{bmatrix}p_{x0}\\p_{y0}\\p_{z0}\end{bmatrix}B_0^2(t)+\begin{bmatrix}p_{x1}\\p_{y1}\\p_{z1}\end{bmatrix}B_1^2(t)+\begin{bmatrix}p_{x2}\\p_{y2}\\p_{z2}\end{bmatrix}B_2^2(t)$$

- parabola kontroll pontok homogén koordinátákkal:

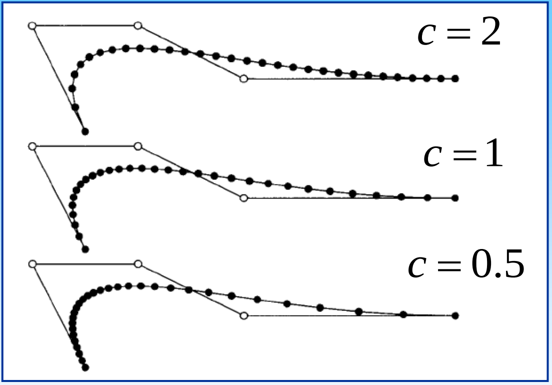
$$\mathbf{p}_i=\begin{bmatrix}p_{xi}\\p_{yi}\\p_{zi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}w_i\dfrac{p_{xi}}{w_i}\\w_i\dfrac{p_{yi}}{w_i}\\w_i\\ \\ \end{bmatrix}=w_i\begin{bmatrix}b_{xi}\\b_{yi}\\1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{p}^*(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_0\\1\end{bmatrix}w_0B_0^2(t)+\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\\1\end{bmatrix}w_1B_1^2(t)+\begin{bmatrix}\mathbf{b}_2\\1\end{bmatrix}w_2B_2^2(t),$$

- 3D parabola projektálva → 2D kúpszelet:

$$\mathbf{c}(t)=\frac{\mathbf{p}^*(t)}{w(t)}=\frac{\mathbf{b}_0w_0B_0^2(t)+\mathbf{b}_1w_1B_1^2(t)+\mathbf{b}_2w_2B_2^2(t)}{w_0B_0^2(t)+w_1B_1^2(t)+w_2B_2^2(t)}=\mathbf{b}_0\overline{B}_0^2(t)+\mathbf{b}_1\overline{B}_1^2(t)+\mathbf{b}_2\overline{B}_2^2(t)$$

- racionális bázisfüggvények: $\overline{B}_i^2(t)=\dfrac{w_iB_i^2(t)}{w_0B_0^2(t)+w_1B_1^2(t)+w_2B_2^2(t)}$

# Kúpszeletek$_3$




- racionális vektor polinom:

$$\mathbf{c}(t)=\frac{w_0\mathbf{b}_0B_0^2(t)+w_1\mathbf{b}_1B_1^2(t)+w_2\mathbf{b}_2B_2^2(t)}{w_0B_0^2(t)+w_1B_1^2(t)+w_2B_2^2(t)}$$

- a racionális görbéket <u>mindig</u> át lehet paraméterezni:

$$t\to t^* \quad , \; t=\frac{t^*}{\rho(1-t^*)+t^*}, \quad [w_0,w_1,w_2]\to[1,w_1^*,1]$$

$$T=\rho(1-t^*)+t^*;\; t=\frac{1}{T}t^*;\; (1-t)=\frac{1}{T}\rho(1-t^*)$$

$$w_0(1-t)^2+w_1 2t(1-t)^2+w_2t^2=\frac{w_2}{T^2}\left(\rho^2\frac{w_0}{w_2}(1-t^*)^2+\rho\frac{w_1}{w_2}2(1-t^*)t^*+t^{*2}\right)$$

$$\Rightarrow w_0^*(1-t^*)^2+w_1^*2(1-t^*)t^*+w_2^*t^{*2}$$

$$w_2^*:=1;\; w_0^*=\rho^2\frac{w_0}{w_2}:=1\to\rho=\sqrt{\frac{w_2}{w_0}};\; w_1^*=\rho\frac{w_1}{w_2}=\frac{w_1}{\sqrt{w_0w_2}}$$

$$\mathbf{c}(t^*)=\frac{\mathbf{b}_0B_0^2(t^*)+w_1^*\,\mathbf{b}_1B_1^2(t^*)+\mathbf{b}_2B_2^2(t^*)}{B_0^2(t^*)+w_1^*\,B_1^2(t^*)+B_2^2(t^*)}$$

# Kúpszeletek$_4$

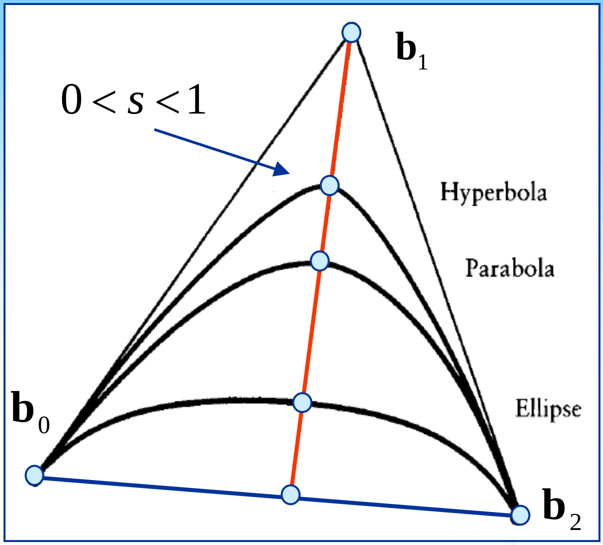
- racionális vektor-polinom:

$$\mathbf{c}(t) = \frac{\mathbf{b}_0 B_0^2(t) + w_1^* \mathbf{b}_1 B_1^2(t) + \mathbf{b}_2 B_2^2(t)}{B_0^2(t) + w_1^* B_1^2(t) + B_2^2(t)}$$

- kúpszeletek osztályozása:

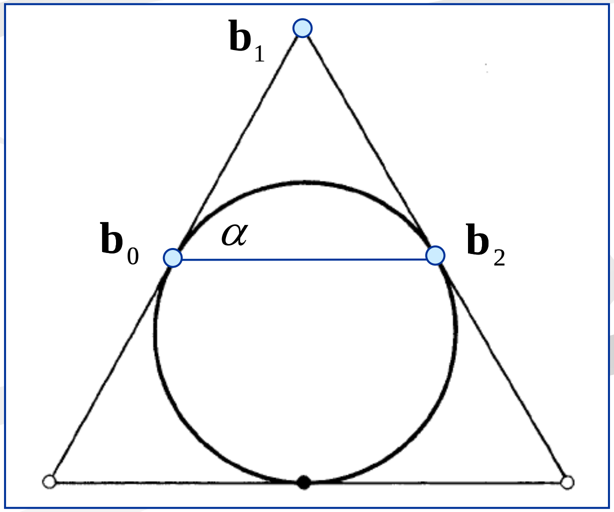
$$s = \frac{w_1^*}{1 + w_1^*}$$

  - parabola $w_1^* = 1, s = 0.5$
  - hiperbola $w_1^* > 1, s > 0.5$
  - ellipszis $w_1^* < 1, s < 0.5$



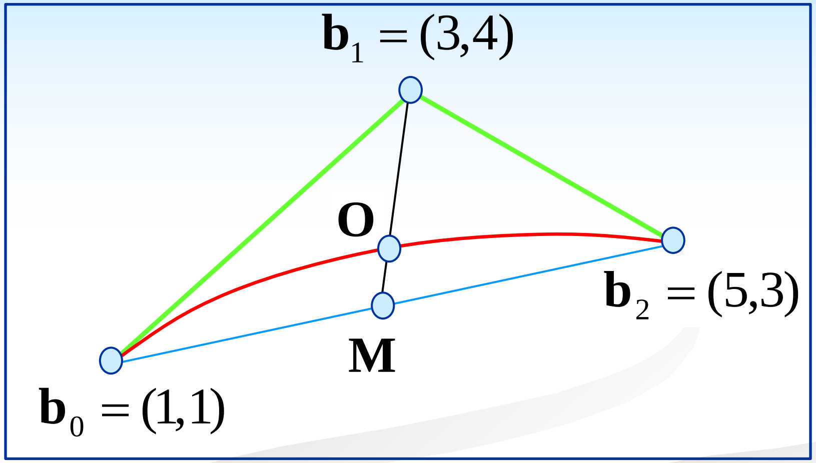

- kör: $w_1^* = \cos\alpha$

$$\mathbf{c}(t) = \frac{\mathbf{b}_0 B_0^2(t) + \cos\alpha\, \mathbf{b}_1 B_1^2(t) + \mathbf{b}_2 B_2^2(t)}{B_0^2(t) + \cos\alpha\, B_1^2(t) + B_2^2(t)}$$



# Ujjgyakorlat*

$$\mathbf{c}(t)=\frac{\mathbf{b}_0(1-t)^2+w_1\,\mathbf{b}_1 2(1-t)t+\mathbf{b}_2 t^2}{(1-t)^2+w_1\,2(1-t)t+t^2}$$




- hozzunk létre egy ellipszisívet, amelyre $s = 0.25$

$$s=\frac{w_1}{1+w_1}\rightarrow w_1(s)=\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

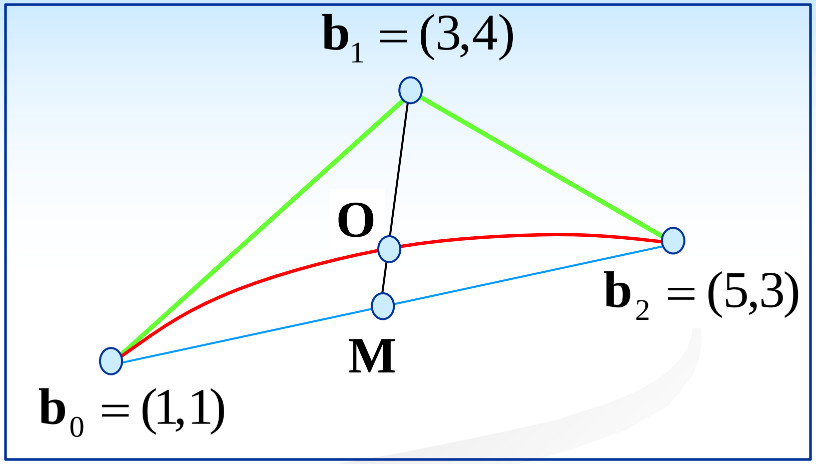
$$w_1=\dots\dots\dots;\qquad \mathbf{c}(0.5)=\frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}=(\dots\dots,\dots\dots)$$

- ellenőrzésként határozzuk meg az **M** felezőpont, majd az **O** negyedelő pont ($s = 0.25$) koordinátáit

$$\mathbf{M}=(\dots\dots\dots\dots,\dots\dots\dots\dots),\quad \mathbf{O}=(\dots\dots\dots\dots,\dots\dots\dots\dots)$$

# Ujjgyakorlat

$$\mathbf{c}(t) = \frac{\mathbf{b}_0(1-t)^2 + w_1\,\mathbf{b}_1 2(1-t)t + \mathbf{b}_2 t^2}{(1-t)^2 + w_1\,2(1-t)t + t^2}$$




- hozzunk létre egy ellipszisívet, amelyre $s = 0.25$

$$s = \frac{w_1}{1+w_1} \rightarrow w_1(s) = \frac{s}{1-s}$$

$$w_1 = \frac{1}{3}; \quad \mathbf{c}(0.5) = \frac{\frac{1}{4}\left[(1,1) + 2w_1(3,4) + (5,3)\right]}{\frac{1}{4}\left[1 + 2w_1 + 1\right]} = (3,2.5)$$

- ellenőrzésként határozzuk meg az $\mathbf{M}$ felezőpont, majd az $\mathbf{O}$ negyedelő pont ($s = 0.25$) koordinátáit

$$\mathbf{M} = (3,2), \quad \mathbf{O} = (3,2.5)$$

# Körív egyenlete

- egyenlet:

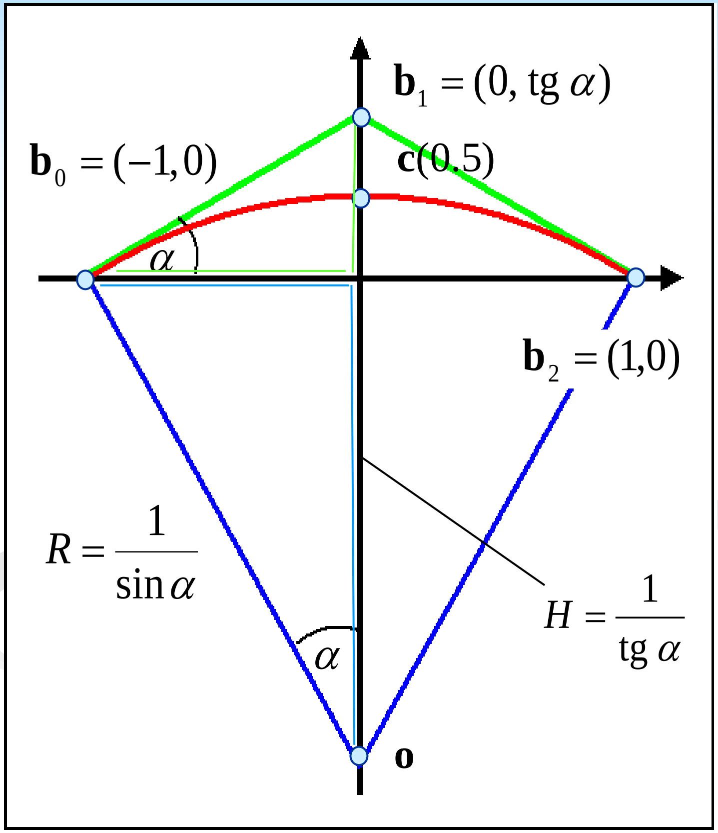
$$\mathbf{c}(t) = \frac{\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}(1-t)^2 + \cos\alpha \begin{bmatrix}0\\ \mathrm{tg}\alpha\end{bmatrix} 2(1-t)t + \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} t^2}{(1-t)^2 + \cos\alpha\, 2(1-t)t + t^2}$$

- egyenletek ($\mathbf{o}$ középpont, $R$ sugár):

$$R\sin\alpha = 1,\ H\ \mathrm{tg}\alpha = 1$$

- határozzuk meg a görbe felezőpontját; a fenti súllyal kört kapunk, mert az alábbi egyenlet teljesül:

$$H + c_y(0.5) = R$$




- félkörív: $\alpha \to 90^\circ$

$$\mathbf{c}(t) = \left( \frac{-(1-t)^2 + t^2}{(1-t)^2 + t^2}, \frac{2t(1-t)}{(1-t)^2 + t^2} \right); \quad u = \frac{1-t}{t} \Rightarrow \mathbf{c}(u) = \left( \frac{1-u^2}{u^2+1}, \frac{2u}{u^2+1} \right)$$

# Ujjgyakorlat*

- egyenlet:

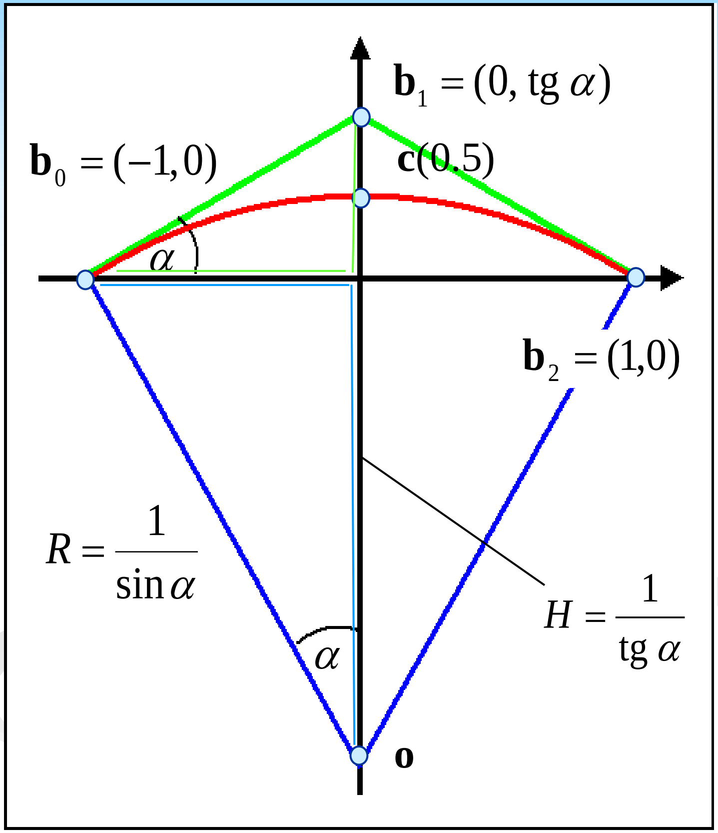
$$\mathbf{c}(t) = \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}(1-t)^2 + \cos\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{tg}\,\alpha \end{bmatrix} 2(1-t)t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} t^2}{(1-t)^2 + \cos\alpha \; 2(1-t)t + t^2}$$

- egyenletek (**o** középpont, $R$ sugár):

$$R\sin\alpha = 1,\; H\ \mathrm{tg}\,\alpha = 1$$

- a felezőpont $y$ koordinátája:

$$c_y(0.5) = \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$$




- fejezzük ki $R$-t és $H$-t és bizonyítsuk be, hogy az egyenlet teljesül

$$H + c_y(0.5) = R \rightarrow \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots} + \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \frac{1}{\ldots\ldots\ldots} \rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

# Ujjgyakorlat

- egyenlet:

$$\mathbf{c}(t)=\frac{\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}(1-t)^2+\cos\alpha\begin{bmatrix}0\\ \mathrm{tg}\alpha\end{bmatrix}2(1-t)t+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}t^2}{(1-t)^2+\cos\alpha\, 2(1-t)t+t^2}$$

- egyenletek (**o** középpont, $R$ sugár):

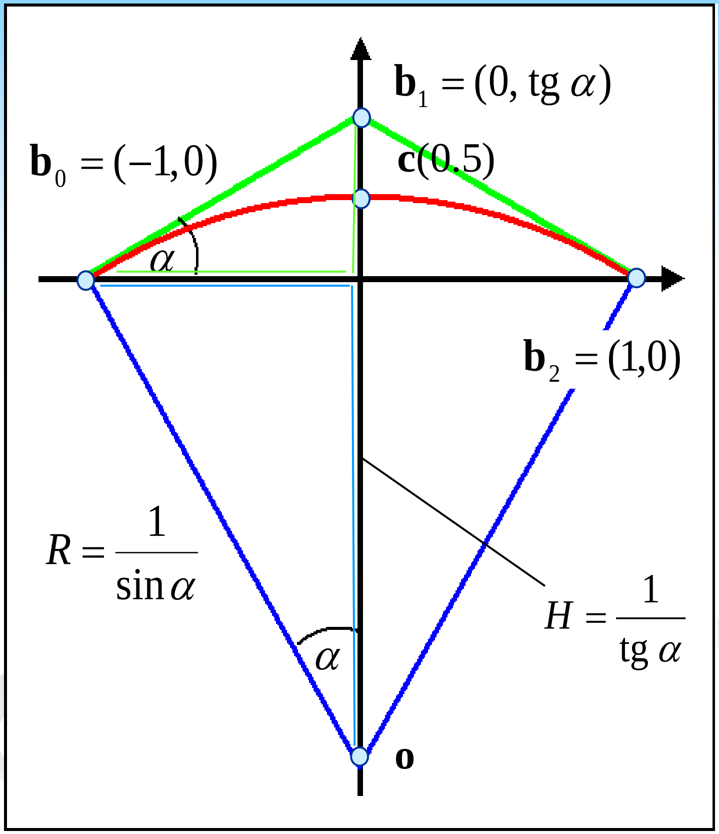
$$R\sin\alpha=1,\ H\ \mathrm{tg}\alpha=1$$

- a felezőpont $y$ koordinátája:

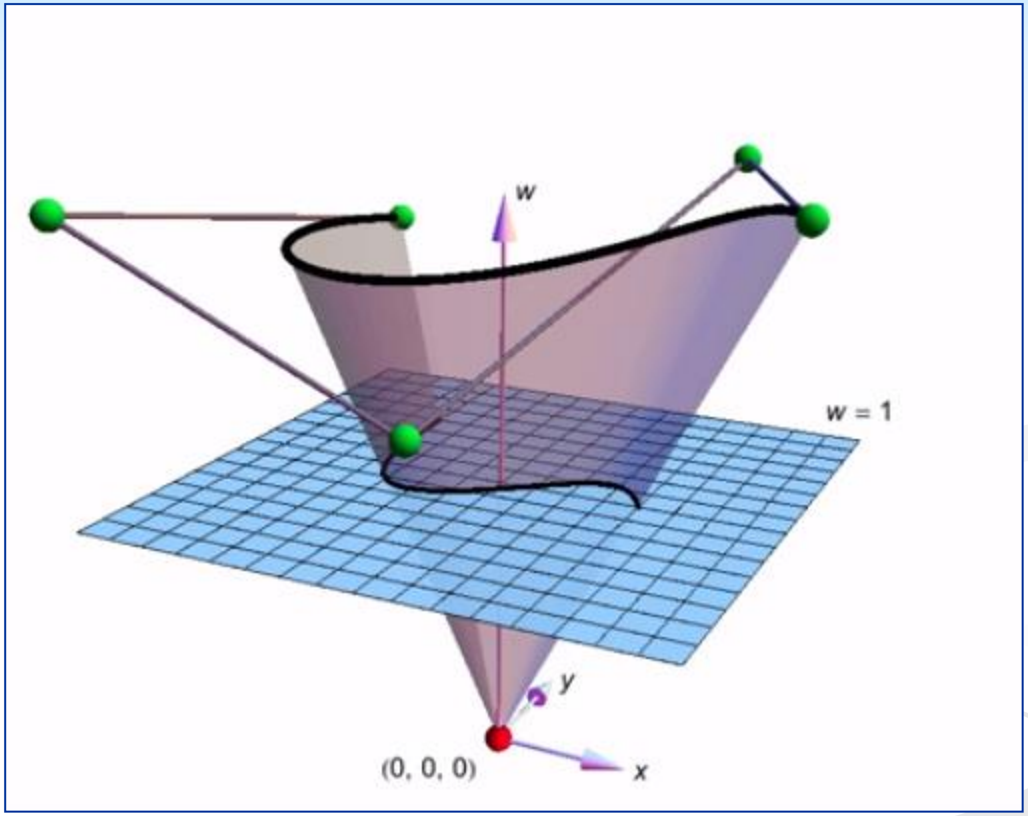
$$c_y(0.5)=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

- fejezzük ki $R$-t és $H$-t és bizonyítsuk be, hogy az egyenlet teljesül

$$H+c_y(0.5)=R\rightarrow\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}\rightarrow\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$



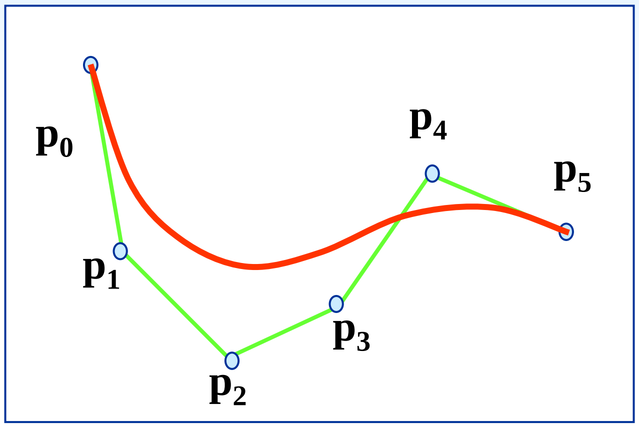
# Racionális Bézier görbék

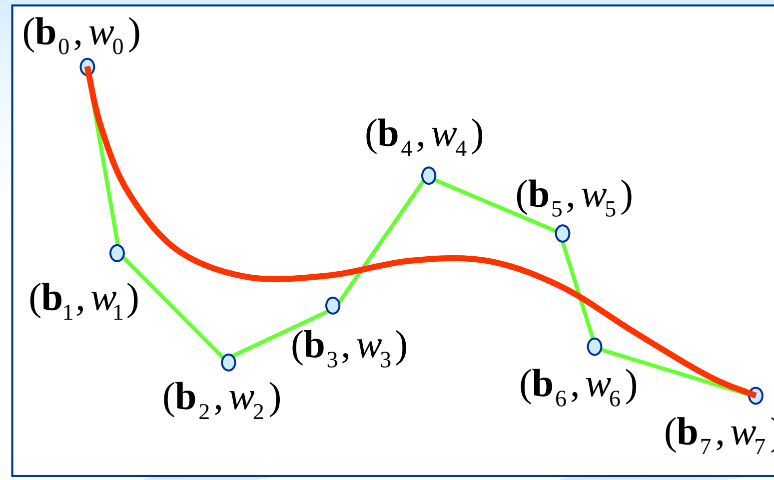



[codiecodemonkey]

A projekció szemléltetése (3D→2D)

# Polinomiális és racionális Bézier görbék - ismétlés




$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^{5} \mathbf{p}_i B_i^5(t)$$

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i \overline{B}_i^n(t),\ \overline{B}_i^n(t) \geq 0,\ \sum_{i=0}^{n} \overline{B}_i^n(t) = 1$$

$$(x, y, w) \to \left( \frac{x}{w}, \frac{y}{w} \right)$$

$$\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t), w(t)) \to \mathbf{b}(t) = \left( \frac{x(t)}{w(t)}, \frac{y(t)}{w(t)} \right)$$

# Racionális Bézier görbék$_1$

- 4D polinomiális Bézier görbe, kontroll pontok: $\mathbf{p}_i$

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 B_0^n(t) + \mathbf{p}_1 B_1^n(t) + \ldots + \mathbf{p}_n B_n^n(t) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ w_0 \end{bmatrix} B_0^n(t) + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{bmatrix} B_1^n(t) + \ldots + \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ w_n \end{bmatrix} B_n^n(t)$$

- homogén koordináták, 3D kontroll pontok: $[x_i, y_i, z_i, w_i,] \rightarrow [w_i \mathbf{b}_i, w_i]$

$$\mathbf{p}^*(t) = (x(t), y(t), z(t), w(t)) = \begin{bmatrix} w_0 \mathbf{b}_0 \\ w_0 \end{bmatrix} B_0^n(t) + \begin{bmatrix} w_1 \mathbf{b}_1 \\ w_1 \end{bmatrix} B_1^n(t) + \ldots + \begin{bmatrix} w_n \mathbf{b}_n \\ w_n \end{bmatrix} B_n^n(t)$$

- 3D racionális Bézier görbe, projekció után:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{p}^*(t)}{w(t)} = \frac{w_0 \mathbf{b}_0 B_0^n(t) + w_1 \mathbf{b}_1 B_1^n(t) + \ldots + w_n \mathbf{b}_n B_n^n(t)}{w_0 B_0^n(t) + w_1 B_1^n(t) + \ldots + w_n B_n^n(t)} = \mathbf{b}_0 \overline{B}_0^n(t) + \mathbf{b}_1 \overline{B}_1^n(t) + \ldots + \mathbf{b}_n \overline{B}_n^n(t)$$

- racionális bázisfüggvények: $\overline{B}_i^n(t) = \dfrac{w_i B_i^n(t)}{w_0 B_0^n(t) + w_1 B_1^n(t) + \ldots + w_n B_n^n(t)}$

# Racionális Bézier görbék$_2$

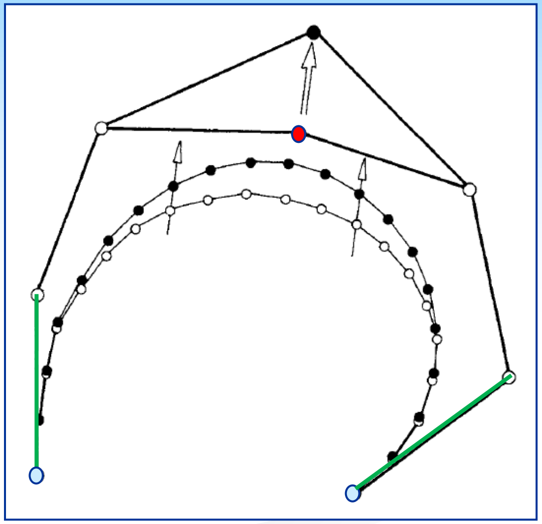
- racionális Bézier görbe:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i \overline{B}_i^n(t)$$

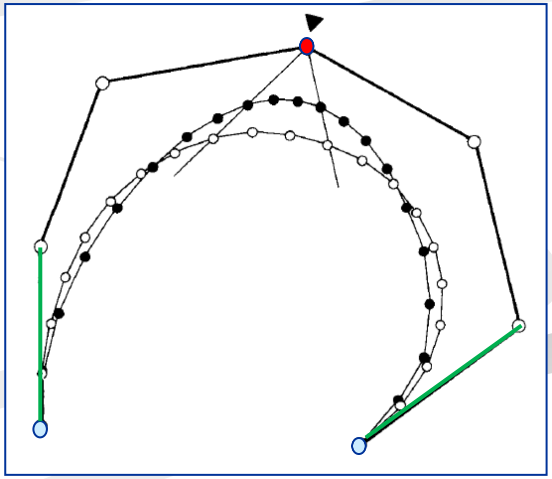
- tulajdonságok
  - a kontroll poligon approximálja a görbét
  - a görbe első és utolsó pontja, valamint a végtangensek származtathatók a poligonból
  - a súly módosítása a kontrollpont felé húzza a görbét
- racionális súlyfüggvények
  - függnek a súlyoktól!

$$\sum_{i=0}^{n} \overline{B}_i^n(t) = 1$$

  - ha az összes $w_i > 0$, a konvex burkoló és a változást csökkenő tulajdonságok érvényben maradnak



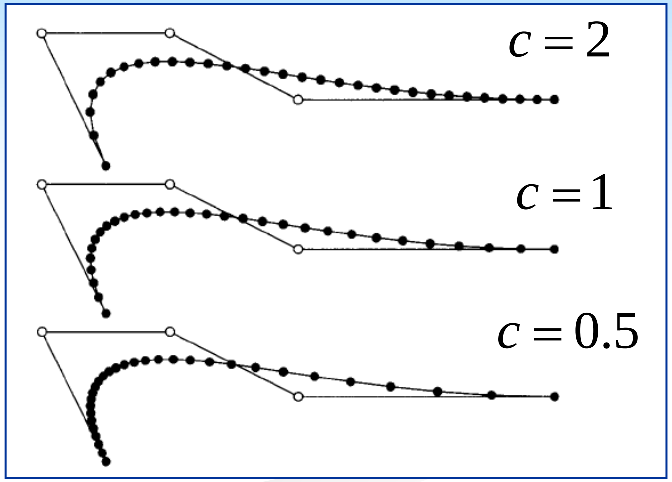
$$(\mathbf{b}_i, w_i) \Rightarrow (\mathbf{b}_i + \Delta\mathbf{b}, w_i)$$



$$(\mathbf{b}_i, w_i) \Rightarrow (\mathbf{b}_i, w_i + \Delta w)$$

# Racionális Bézier görbék$_3$

- átparaméterezés $w_i^* = c^i w_i$




- de Casteljau algoritmus (ismételt lineáris interpoláció)
  - (a) ismételt osztás a 4D homogén koordinátarendszerben, utána vetítés 3D-be

$$\mathbf{p}_i^r := (1-t)\mathbf{p}_i^{r-1} + t\,\mathbf{p}_{i+1}^{r-1}$$

  - (b) osztás 3D-ben

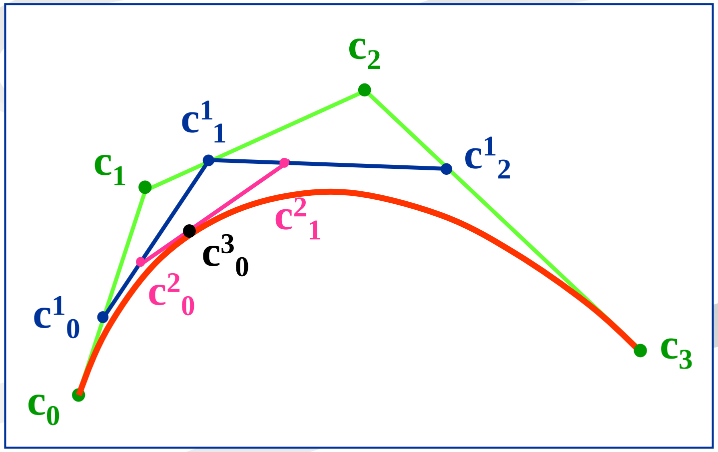
$$w_i^r := (1-t)w_i^{r-1} + t\,w_{i+1}^{r-1}$$

$$w_i^r\mathbf{b}_i^r := (1-t)w_i^{r-1}\mathbf{b}_i^{r-1} + t\,w_{i+1}^{r-1}\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}$$

- derivált számítás (bonyolult)

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{p}(t)}{w(t)};\ \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{1}{w(t)}\left[\dot{\mathbf{p}}(t) - \dot{w}(t)\mathbf{r}(t)\right]$$

$$\dot{\mathbf{r}}(0) = \frac{nw_1}{w_0}\left[\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0\right];\ \dot{\mathbf{r}}(1) = \frac{nw_{n-1}}{w_n}\left[\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}\right];$$



# Racionális Bézier felületek

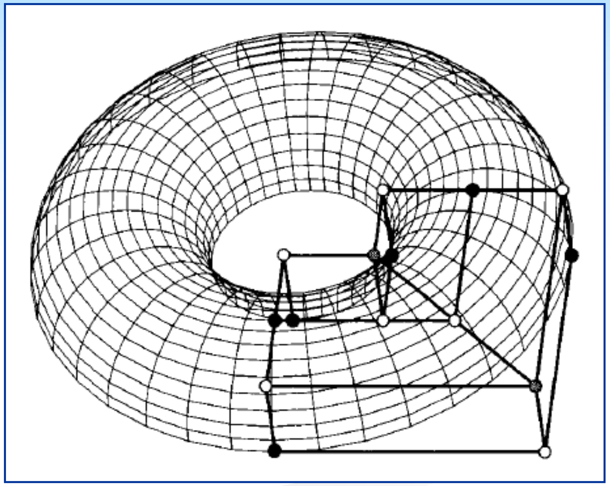
- racionális Bézier görbe:

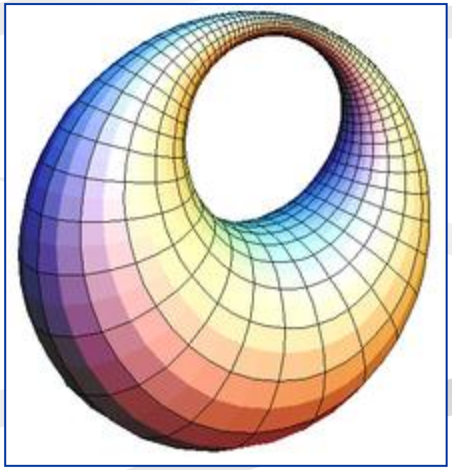
$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i \mathbf{c}_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^{n} w_j B_j^n(t)}$$

- racionális Bézier felület:

$$\mathbf{s}(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{ij}\mathbf{c}_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)}$$

- elsődleges alkalmazás
  - szabályos másodrendű felületek
  - forgásfelületek
- speciális felületek: létezik implicit <u>és</u> parametrikus reprezentáció





[wiki]

Dupin cyclides

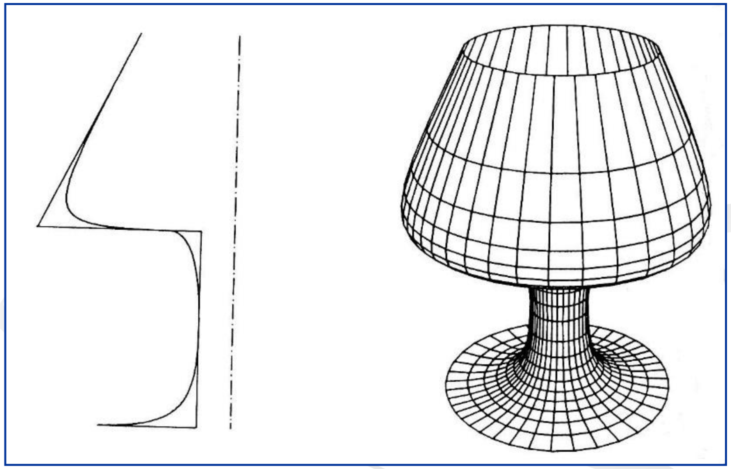
# Racionális B-spline (NURBS) görbék és felületek

- NURBS = Non-uniform Rational B-spline; egységes reprezentáció (!?)
- racionális B-spline görbe - ez is projektív alapon keletkezik

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{L} w_i \mathbf{d}_i N_i^n(t)}{\sum_{j=0}^{L} w_j N_j^n(t)}$$

- adott csomóvektor és súlyok esetén a racionális súlyfüggvényeket meg lehet határozni
- racionális B-spline felület:

$$\mathbf{s}(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{ij} \mathbf{d}_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v)}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v)}$$



- elsődleges alkalmazás - forgásfelületek