N-oldalú implicit felületek

Sipos Ágoston

3D számítógépes geometriai algoritmusok

2020. 10. 15.

Tartalom

1. Bevezetés
   - Reprezentációk
2. Implicit módszerek
   - Liming módszere
   - Egyéb módszerek
   - I-patch
3. Alkalmazások
   - Poliéder lekerekítés
   - Setback vertex blending
   - Cellaalapú modellezés

Tartalom

1. Bevezetés
   - Reprezentációk
2. Implicit módszerek
   - Liming módszere
   - Egyéb módszerek
   - I-patch
3. Alkalmazások
   - Poliéder lekerekítés
   - Setback vertex blending
   - Cellaalapú modellezés

Parametrikus megadás

Görbe:

$$\mathsf{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad [a, b] \subset \mathbb{R}$$

Felület:

$$\mathsf{p} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{I} \subset \mathbb{R}^2$$

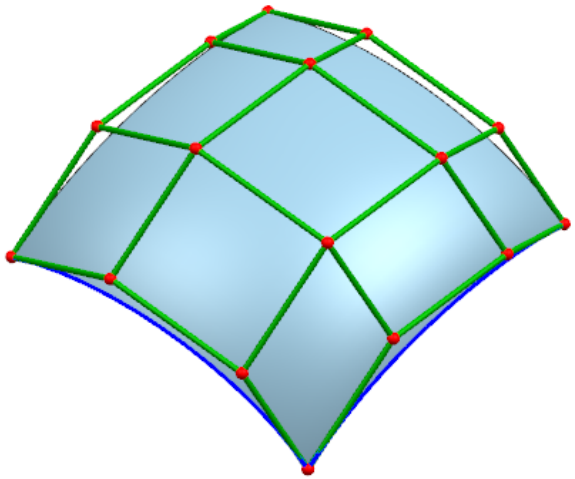
Előny: könnyen kiértékelhető, akár az értelmezési tartomány sok pontjában egyszerre ($\to$ könnyen konvertálható diszkrét reprezentációkra)
Elterjedt, sztenderd bázisok (Bernstein-, Hermite-, stb. polinomok)

Parametrikus felületek

Általában: ún. tenzorszorzat felületek

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} f_i(u) g_i(v) \mathrm{p}_{i,j}$$

$$(u,v) \in [a,b] \times [c,d]$$



Hátrányuk: csak négy oldalú (négy határgörbe által határolt) felületeket állítanak elő.

Bonyolultabb topológiák esetén: n-oldalú, vagy trimmelt felületek[1]; megvannak a kényelmetlenségeik.

[1] lásd VT, ill. VM előadások

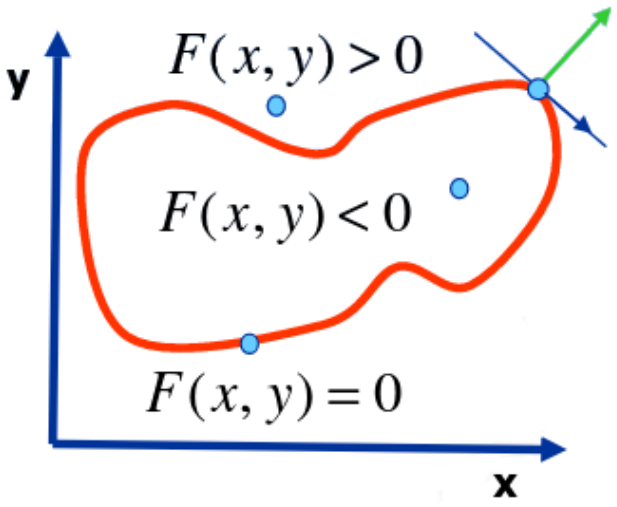
Implicit megadás

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

esetén

$$\{\mathrm{p} \in \mathbb{R}^3 : f(\mathrm{p}) = 0\}$$

implicit felület



Általában felület ($3 - 1 = 2$ dimenziós), de pl.:
$f(\mathrm{p}) = ||\mathrm{p}||_2^2 \to$ egyetlen pont
$f(\mathrm{p}) = ||\mathrm{p}||_2^2 + 1 \to$ üres halmaz
$f \equiv 0 \to$ teljes tér

Valójában a teret szétosztja a „külsejére" és a „belsejére" (ezek sem feltétlenül összefüggők persze)

Implicit megadás

Általában „szabályos” objektumok megadására használják.
Sík: $f(x,y,z) = ax + by + cz + d$
Gömbfelület: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$
Hengerfelület: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - r^2$
Tórusz: $f(x,y,z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 - r^2$

Első ránézésre nehézkesen alkalmazható:

- Pontok kiértékeléséhez gyökkereső algoritmus kell
- Összetettebb felületeket nem látszik, hogyan kell modellezni

De:

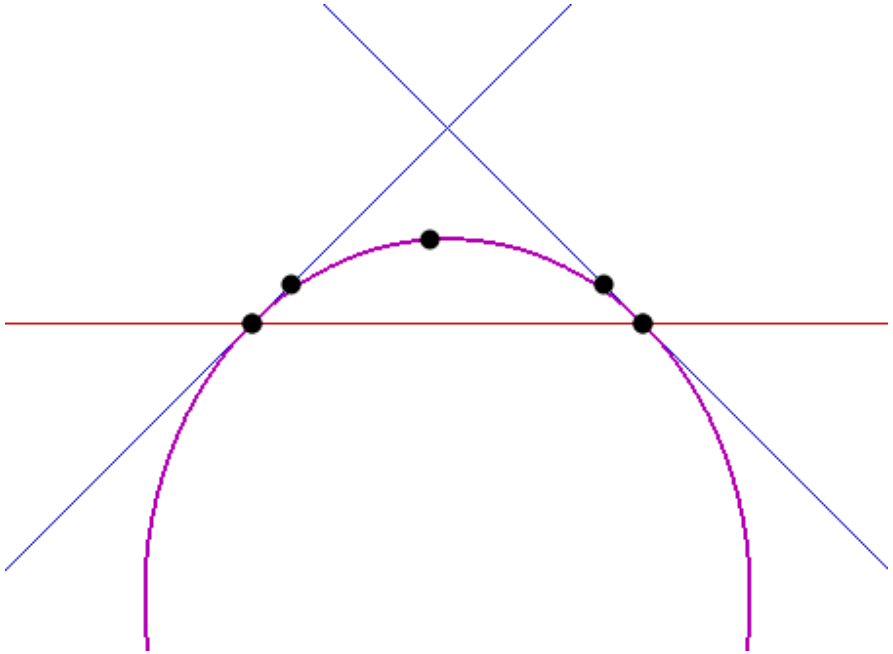
- Approximáció, offszetelés egyszerűbb
- Nem kell értelmezési tartományt „kitalálni”
- Raycasting típusú operációk maguktól értetődők

Tartalom

1. Bevezetés
   - Reprezentációk
2. Implicit módszerek
   - Liming módszere
   - Egyéb módszerek
   - I-patch
3. Alkalmazások
   - Poliéder lekerekítés
   - Setback vertex blending
   - Cellaalapú modellezés

Lekerekítések - Liming módszere

- Adott két metsző egyenes (implicit formában: $L_1(x,y)=0, L_2(x,y)=0$), kerekítsük le a sarkot.
- Megoldás: vegyük a „saroklevágó" egyenest ($C_1(x,y)=0$)
- $F=(1-\lambda)L_1L_2+\lambda C_1^2$ lesz a lekerekítő görbe

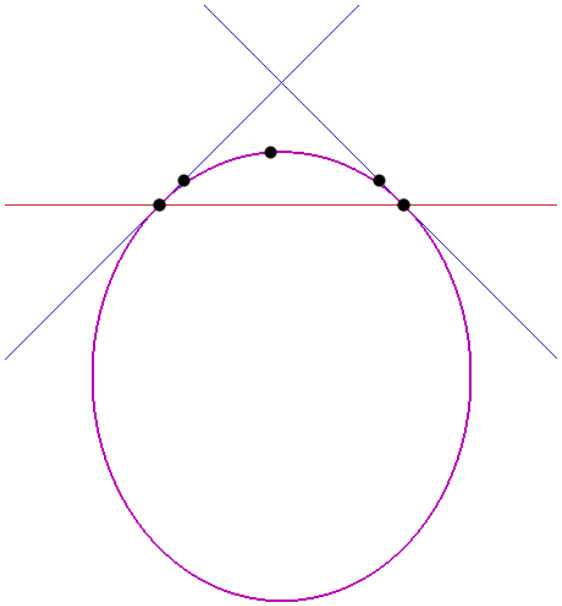


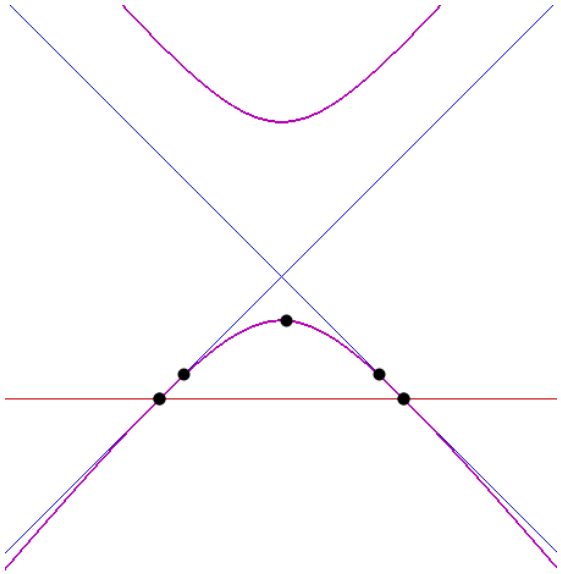
Lekerekítések - Liming módszere

- $F = (1-\lambda)L_1L_2 + \lambda C_1^2$
- Kell:
  - 1.: $\{L_i = 0\} \cap \{C_1 = 0\} \subset \{F = 0\}, i = 1,2$
  - 2.: $p_i \in \{L_i = 0\} \cap \{C_1 = 0\}, \nabla L_i(p_i) = c \cdot \nabla F(p_i)$
- 1. trivi (0+0=0)
- 2.: $(\nabla F)(p_i) = (1-\lambda)((\nabla L_1)(p_i)L_2(p_i) + (\nabla L_2)(p_i)L_1(p_i)) +$
  $+2\lambda(\nabla C_1)(p_i)C_1(p_i) = (1-\lambda)L_{3-i}(p_i)(\nabla L_i)(p_i) = const \cdot (\nabla L_i)(p_i)$

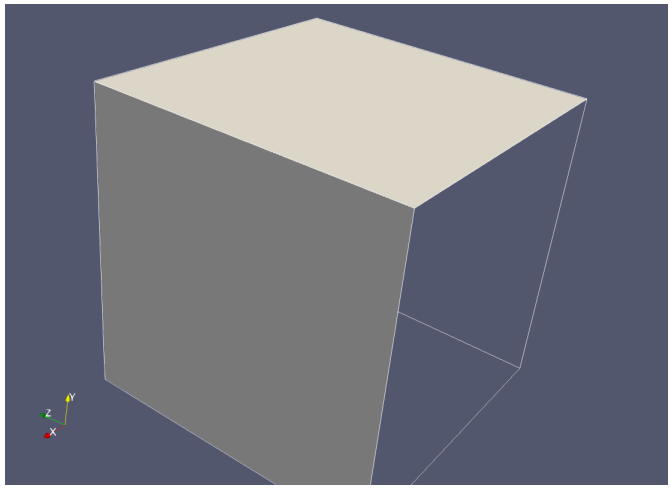
Lekerekítések - Liming módszere

- Ezek valójában kúpszeletek
- Egyenes és egyenes szorzata (elfajult) kúpszelet, kúpszeletek összege kúpszelet

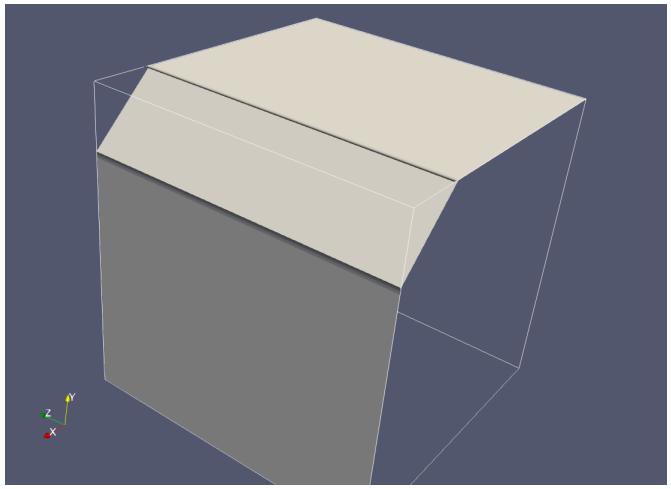




Felületek lekerekítése

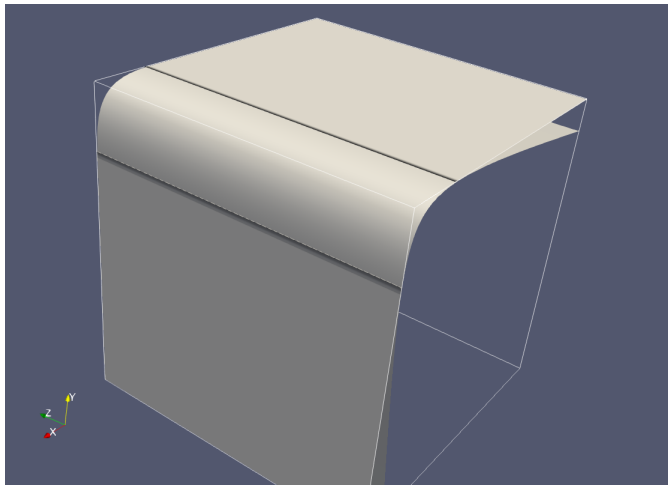


Lekerekítendő él

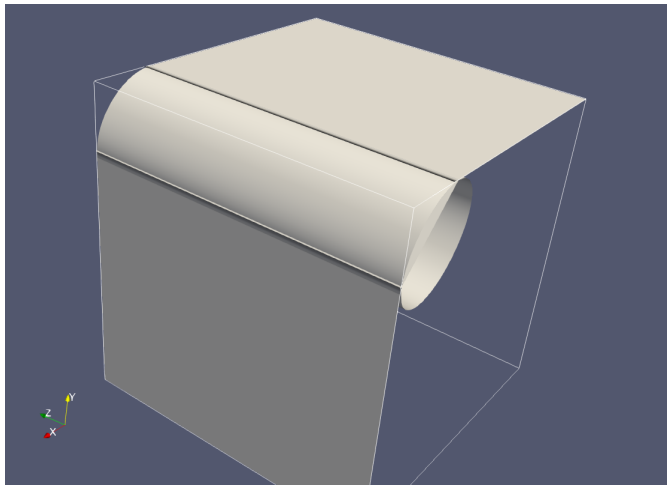


Levágott él

Felületek lekerekítése



Liming-lekerekítés, $\lambda = 0.2$



Liming-lekerekítés, $\lambda = 0.6$

Funkcionális spline

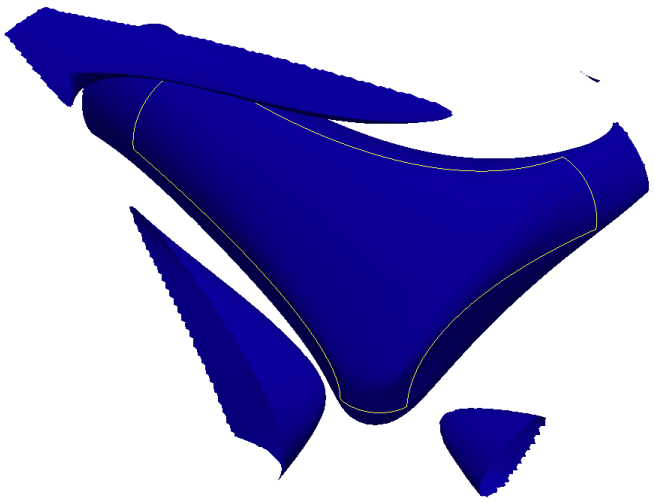
Általánosítás n lekerekítendő felületre

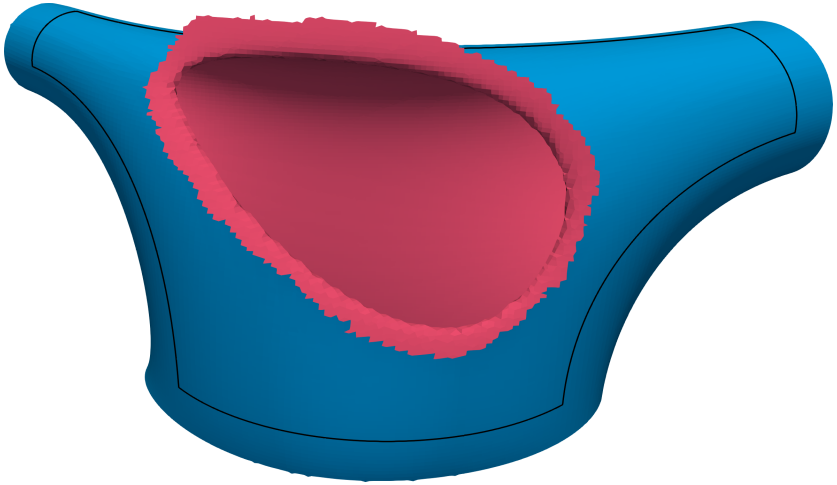
- $F = (1-\lambda)\prod_{i=1}^{n} P_i + \lambda \prod_{i=1}^{m} B_i^2$, ahol P_i, $i = 1..n$ elsődleges felületek (amihez elsőrendben simul az eredményfelület), B_i, $i = 1..m$ vágó felületek
- Hiszen a produktum valójában unió
- Probléma: nem csoportosulnak a geometriai elemek, pedig általában nem minden vágó tartozik minden elsődlegeshez

Li, Jinggong, Josef Hoschek, and Erich Hartmann.
G^{n*}-functional splines for interpolation and approximation of curves, surfaces and solids
Computer Aided Geometric Design 7.1-4: 209-220., 1990

Algebrai illesztés

Peremfeltételekre egyenletrendszer felírása és megoldása.

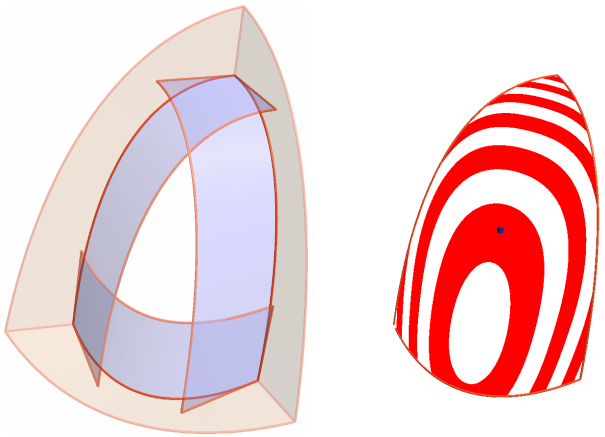


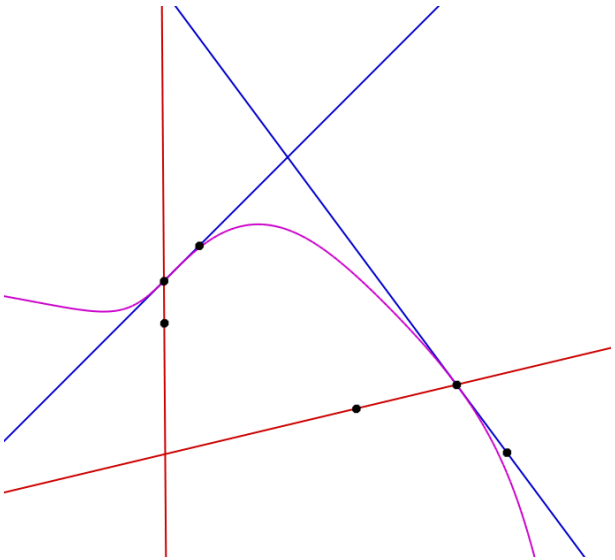


Bajaj, Chandrajit L., and Ihm, Insung.
Algebraic surface design with Hermite interpolation.
ACM Transactions on Graphics (TOG) 11.1: 61-91., 1992

I-patch

- P_i, $i = 1..n$ elsődleges felületek, B_i, $i = 1..n$ vágó felületek, az azonos indexűek közösen adnak meg egy határgörbét
- $I = \sum_{i=1}^{n} (w_i P_i \prod_{j \neq i} B_j^2) + w \prod_{i=1}^{n} B_i^2$, $w_i, w \in \mathbb{R}$
- Azaz pl. $n = 2$-ra: $I = w_1 P_1 B_2^2 + w_2 P_2 B_1^2 + w B_1^2 B_2^2$
- n szabad paraméter van (valamelyikkel le lehet osztani)





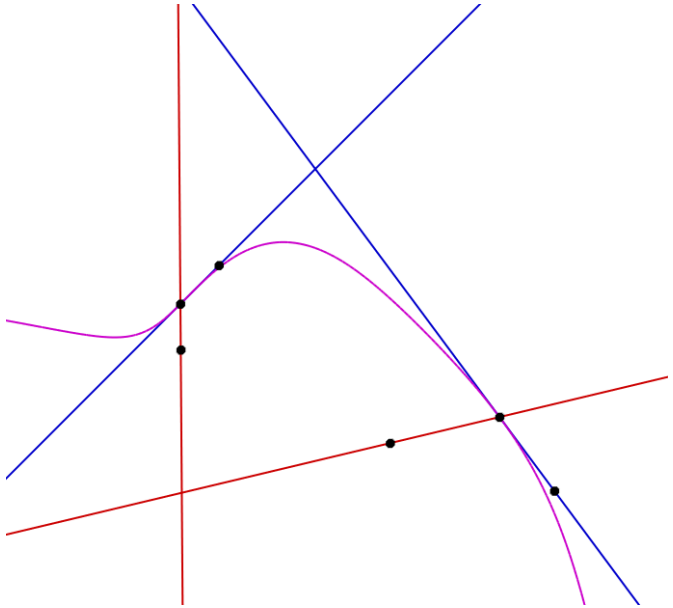
Várady, T., Benkő, P., Kós, G., Rockwood, A.
Implicit surfaces revisited—I-patches.
Geometric Modelling 323-335., 2001

Tulajdonságok

$I = w_1 P_1 B_2^2 + w_2 P_2 B_1^2 + w B_1^2 B_2^2$

Határinterpoláció:

- i. határ: $\{P_i = 0\} \cap \{B_i = 0\}$
- Triviálisan 0 a függvényérték



Folytonos csatlakozás:

- Kell: az i. határon elsőrendben simán kapcsolódjon P_i-hez
- $I = QP_i + WB_i^2, \qquad Q, W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- $(\nabla I) = (\nabla Q) P_i + Q (\nabla P_i) + (\nabla W) B_i^2 + W\, 2B_i (\nabla B_i) =$
  $= 0 + Q (\nabla P_i) + 0 + 0$
- G^n folytonossághoz: az egyenletben a B_i-k kitevője legyen $n+1$

Patch belseje - interpoláció

- A szabad paraméterek felhasználhatók a patch belsejének kontrollálására.
- Egy darab interpolálandó pont (x_0, y_0) esetén

$$w = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(w_i P_i(x_0, y_0) \prod_{j \neq i} B_j^2(x_0, y_0) \right)}{\prod_{i=1}^{n} B_i^2(x_0, y_0)}$$

garantálja, hogy az I-patch átmenjen a ponton

Patch belseje - approximáció

Approximáció pontfelhőre

$p_i \in \mathbb{R}^3$, $i \in 1..N$ pontfelhő

$\min_I \sum_{i=1}^{N} I(p_i)^2$ legkisebb négyzetes hibaminimalizálás

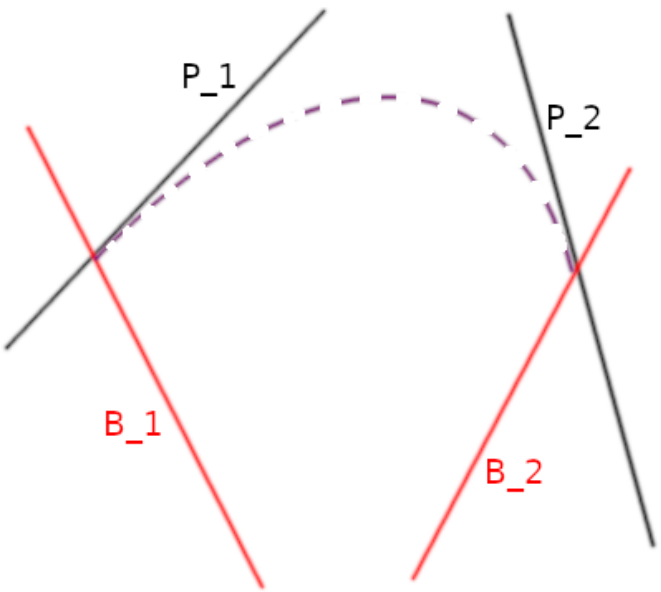
$\vdots$

$$\frac{\partial}{\partial w_k} \sum_{i=1}^{N} I(p_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} 2\Big(\sum_{j=1}^{n}(w_j M_j(p_i)) + F(p_i)\Big) M_k(p_i) = 0$$

$\vdots$

Lineáris egyenletrendszer adódik w_i-kre.

Ujjgyakorlat



$$L = P_1 P_2 + \hat{\lambda} C^2$$
$$I = w_1 P_1 B_2^2 + w_2 P_2 B_1^2 + w B_1^2 B_2^2$$

$$P_1(x,y) = y - x$$

$$P_2(x,y) = 4x + y - 12$$

$$B_1(x,y) = 2x + y$$

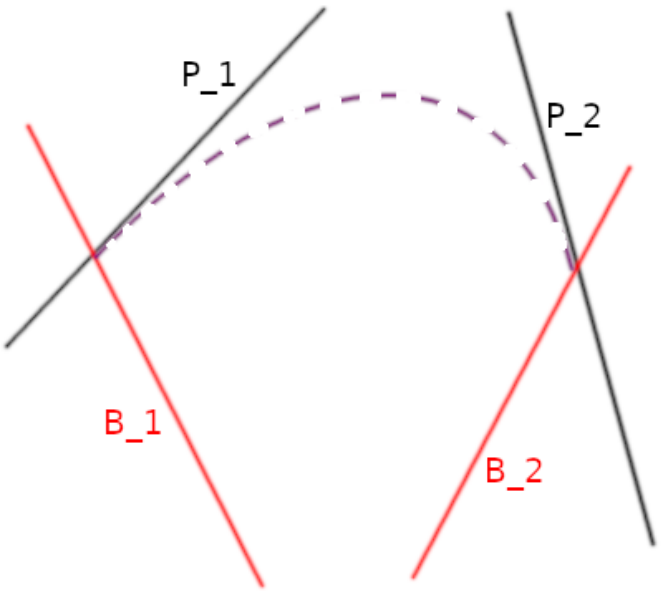
$$B_2(x,y) = 2x - y - 6$$

A megadott peremfeltételek mellett írjuk fel a $(2,1)$ ponton áthaladó

- másodfokú görbe
- I-szegmens ($w_1 = w_2 = 1$) implicit egyenletét

(Lehet rekurzívan, a megadott egyeneseket használva, nem kell kifejteni hatványbázisba)

Ujjgyakorlat - megoldás



$$L = P_1 P_2 + \hat{\lambda} C^2$$
$$I = w_1 P_1 B_2^2 + w_2 P_2 B_1^2 + w B_1^2 B_2^2$$

$$P_1(x,y) = y - x$$

$$P_2(x,y) = 4x + y - 12$$

$$B_1(x,y) = 2x + y$$

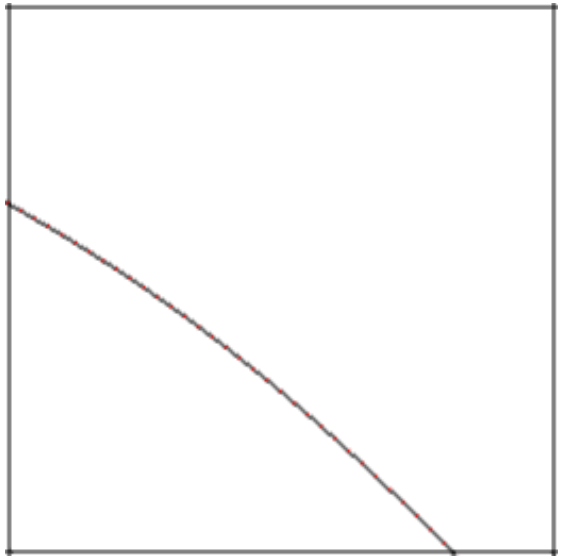
$$B_2(x,y) = 2x - y - 6$$

Liming: $C(x,y) = y,\ L(2,1) = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = -\frac{P_1(2,1)\cdot P_2(2,1)}{C^2(2,1)} = -\frac{(-1)\cdot(-3)}{1^2} = -3,$
$L = P_1 P_2 - 3y^2$

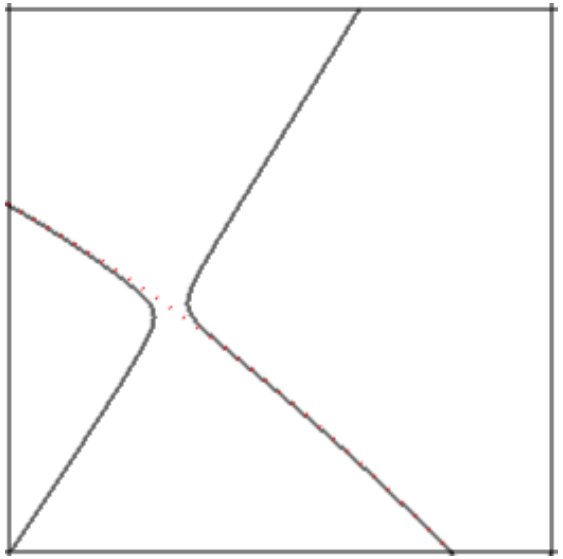
I-szegmens:
$I(2,1) \Rightarrow w = -\frac{P_1(2,1)B_2^2(2,1)+P_2(2,1)B_1^2(2,1)}{B_1^2(2,1)B_2^2(2,1)} = -\frac{(-1)\cdot(-3)^2+(-3)\cdot 5^2}{5^2\cdot(-3)^2} = \frac{84}{225},$
$I = P_1 B_2^2 + P_2 B_1^2 + \frac{28}{75} B_1^2 B_2^2$

Összefüggőségi feltételek

Nem garantált, hogy az I-patch összefüggő (el lehet jutni a görbén az egyik végpontból a másikba)



Összefüggő görbe



Nem összefüggő görbe

A probléma a P_i-k előjeleivel van.

Összefüggőségi feltételek

Tétel

Két végpontú I-patch görbe esetén $B_1(Q) = 0, B_2(Q) = 0 \Rightarrow I(Q) = 0$

Triviális, az összes tag 0.

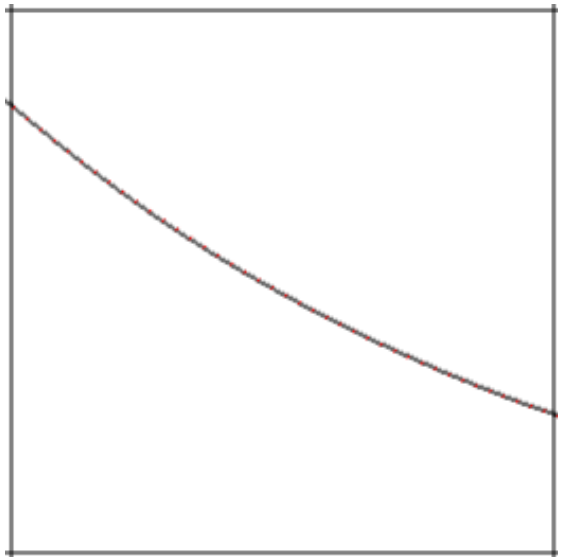
Tétel

Ha még $P_1(Q) \cdot P_2(Q) > 0$, akkor $\exists \varepsilon > 0 : k_\varepsilon(Q) \setminus Q$ nem tartalmaz görbepontot.

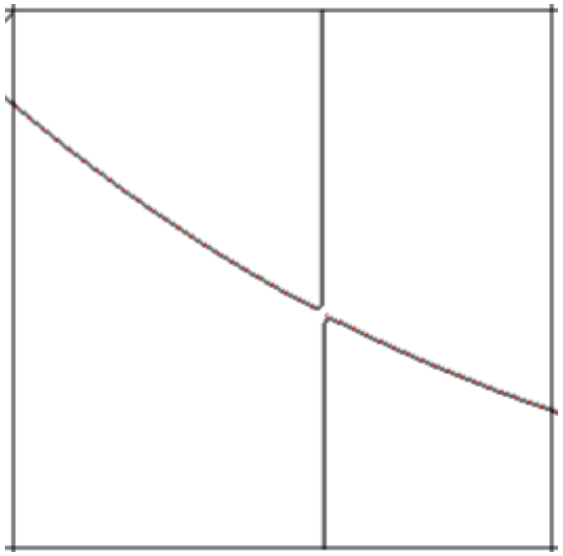
Ugyanis (vázlat): az egyenlet harmadik tagja $O(\varepsilon^4)$, az első kettő $O(\varepsilon^2)$. Válasszuk ε-t úgy, hogy (a) a környezeten semelyik P_i ne váltson előjelet, és (b) az utolsó tag legyen abszolútértékben kicsi. Ekkor az implicit egyenlet a teljes környezeten állandó előjelű lesz.

Összefüggőségi feltételek

A probléma akkor is fennáll, ha a határok nem metszik egymást.



Összefüggő görbe

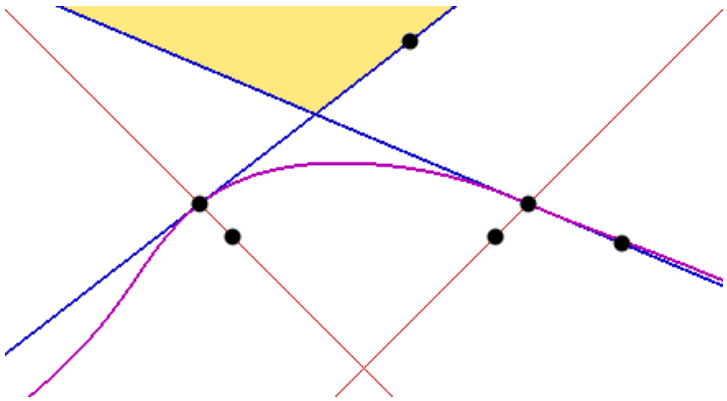


Nem összefüggő görbe

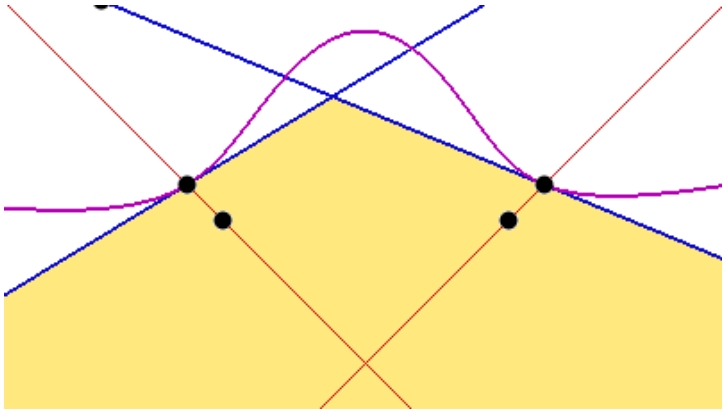
Hasonlóan kezelhető, vizsgálni kell az ideális pontban levő metszéseket is.

A görbe belsejének irányítása

Általánosan meghatározhatók görbepontot nem tartalmazó területek.



$w > 0$

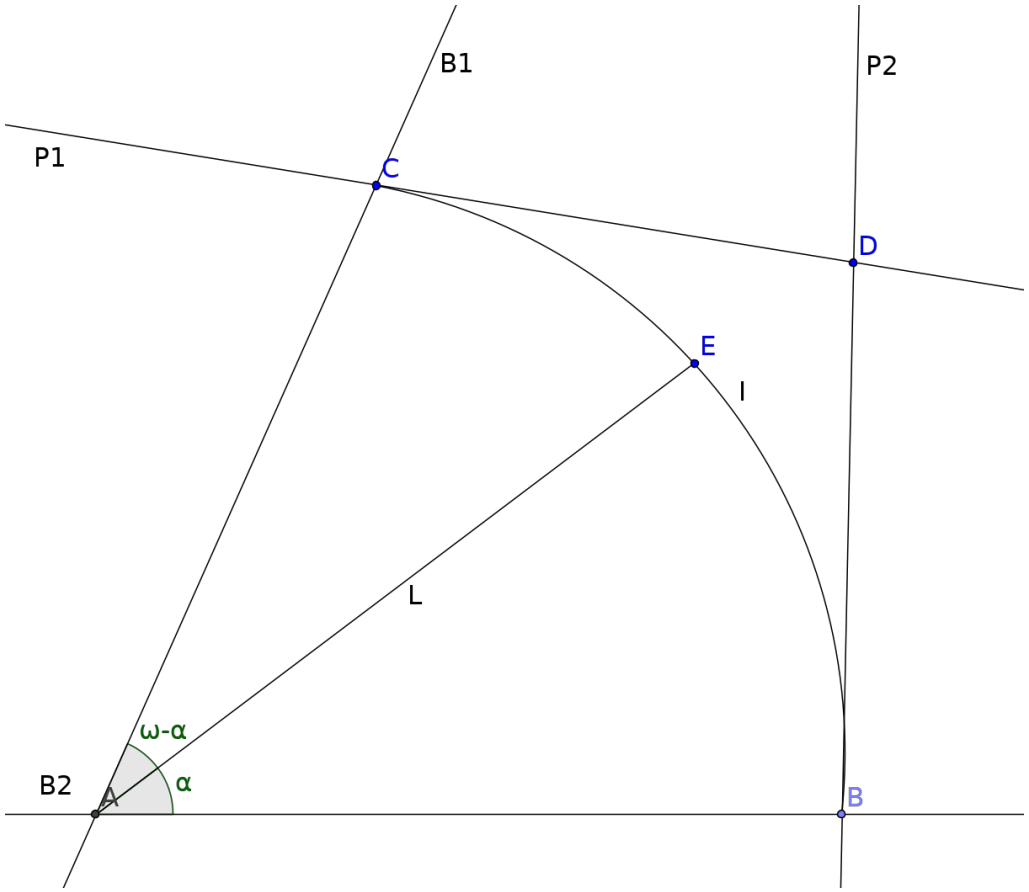


$w < 0$

Tétel

Legyen R összefüggő halmaz, melyen P_1, P_2 állandó előjelű, $Q \in R$. Ekkor, ha $P_1(Q), P_2(Q)$ és w azonos előjelűek, akkor R nem tartalmaz görbepontot. (Kivéve esetleg a határ-metszéspontot.)

Paraméterezhetőség



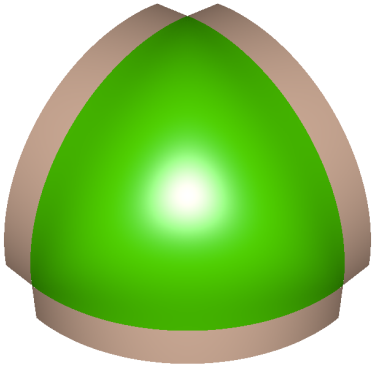
α függvényében *másodfokú* egyenlet írható fel a görbepontokra

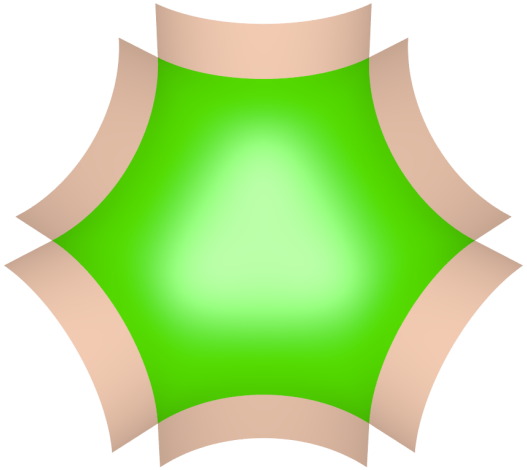
Diszkriminánssal elégséges feltételek adhatók görbeösszefüggőségre

Kiértékelésre is jó

3D felírás - határokkal

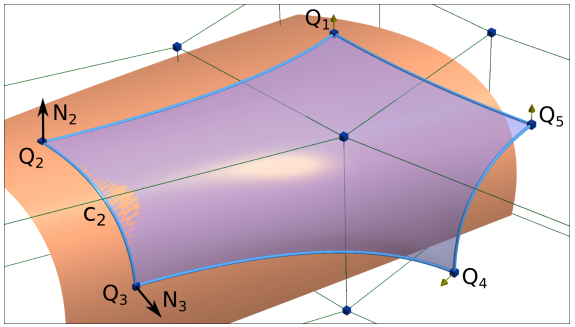
$$I = \sum_{i=1}^{n} (w_i P_i \prod_{j \neq i} B_j^2) + w \prod_{i=1}^{n} B_i^2, \; w_i, w \in \mathbb{R}$$

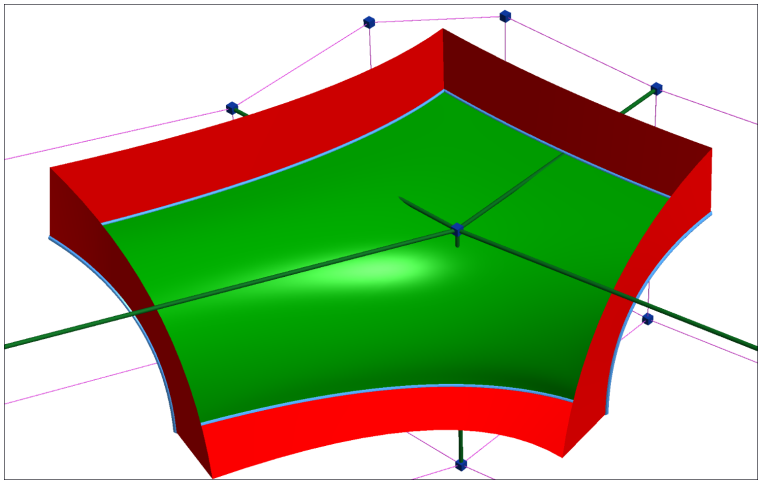




Határok orientációja 3D-ben

- Orientáció: a normálvektor irányába pozitív, ellenkező irányba negatív az implicit függvény
- Közös *primary* garantálja a folytonosságot a szomszéd felülettel



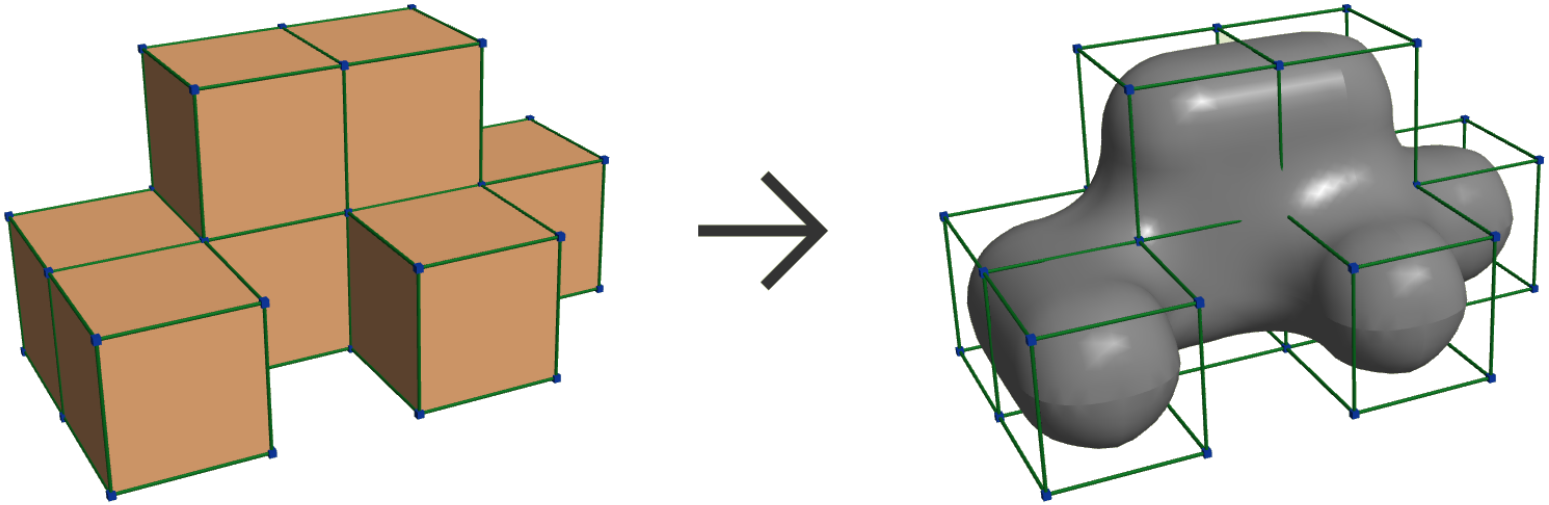


- A határ mentén konzisztensnek kell lennie az orientációknak
- Egy normalfence alapján pl. beállíthatók az előjelek

Tartalom

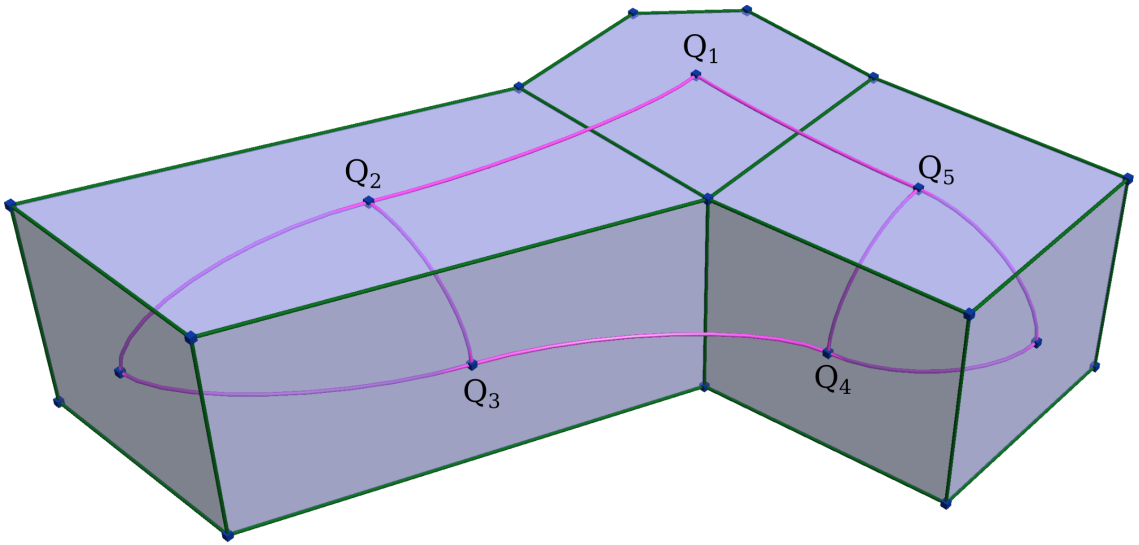
1. Bevezetés
   - Reprezentációk
2. Implicit módszerek
   - Liming módszere
   - Egyéb módszerek
   - I-patch
3. Alkalmazások
   - Poliéder lekerekítés
   - Setback vertex blending
   - Cellaalapú modellezés

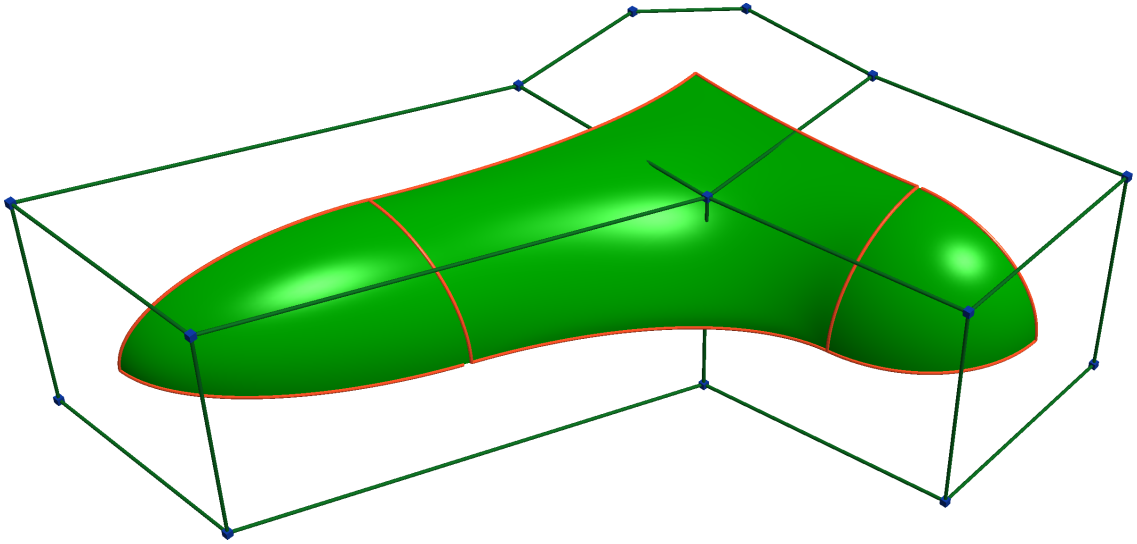
Poliéder lekerekítés



Poliéder lekerekítés

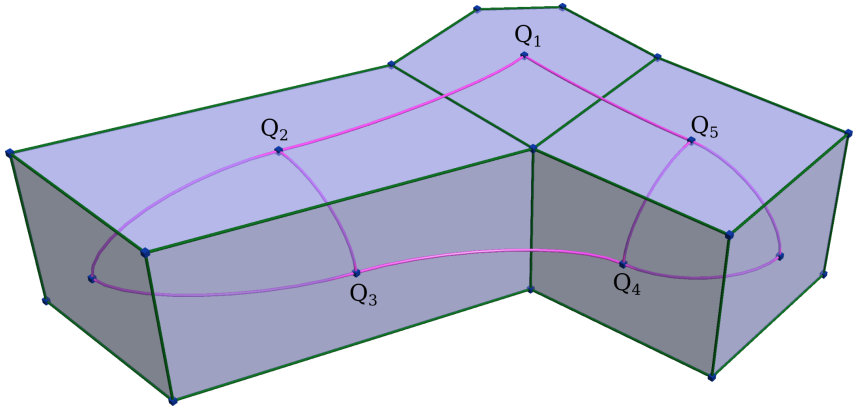
- Bemenet: kontrollpoliéder
- Kimenet: folytonosan csatlakozó, I-patchekből álló összetett felület

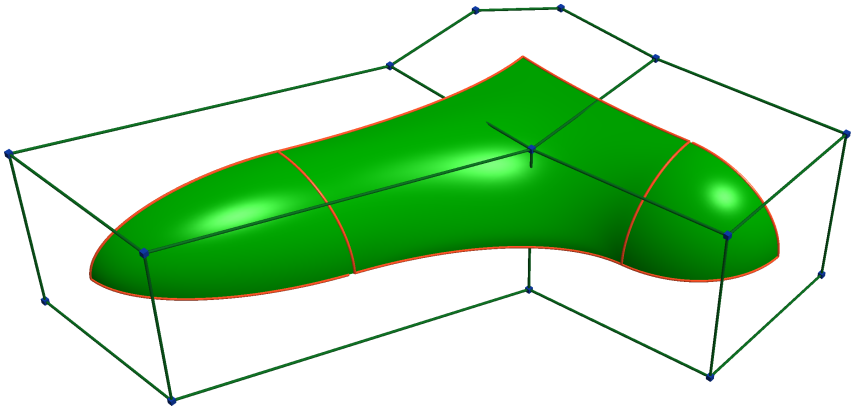




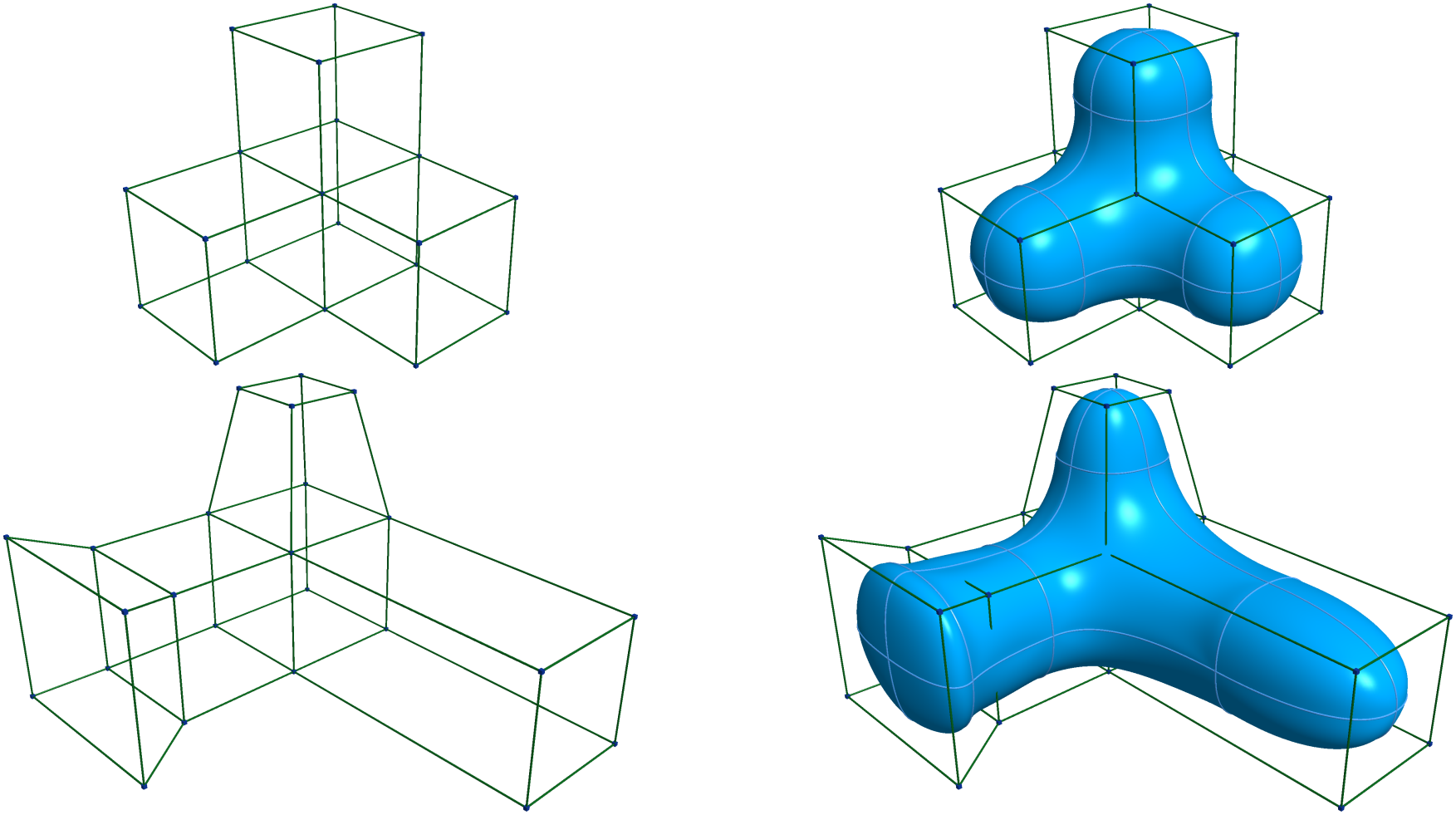
Poliéder lekerekítés

- Görbeháló
  - folytonosan összeköti a lapközéppontokat
  - a poliéder duálisa
- Ribbonok
  - csak a poliédertől függően generálódnak
  - automatikus G^1 csatlakozás patch-ek között

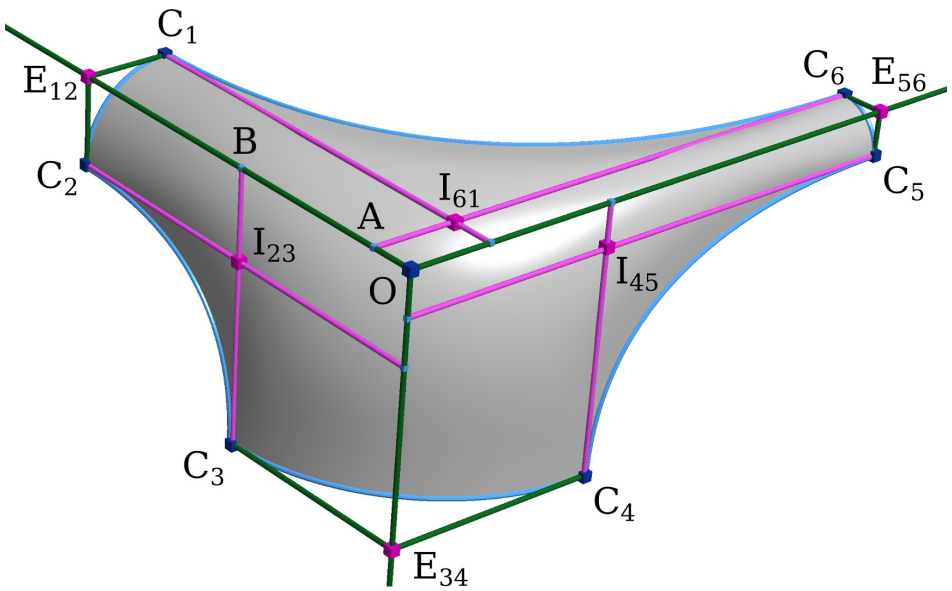




Poliéder lekerekítés



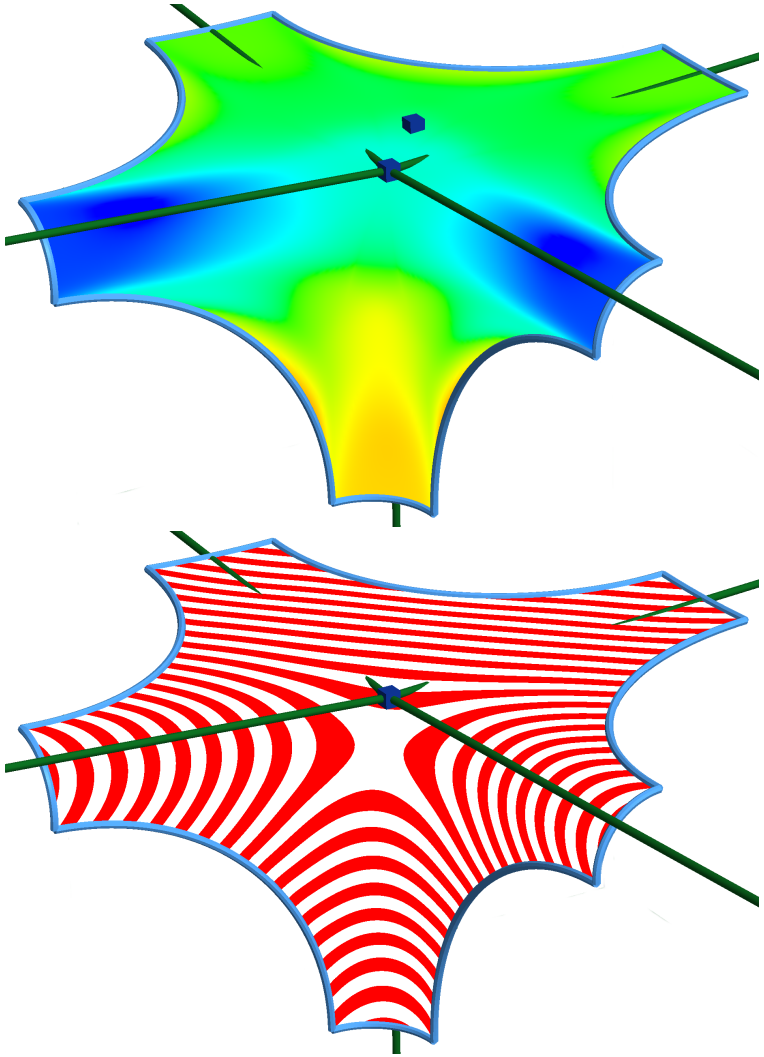
Setback vertex blending

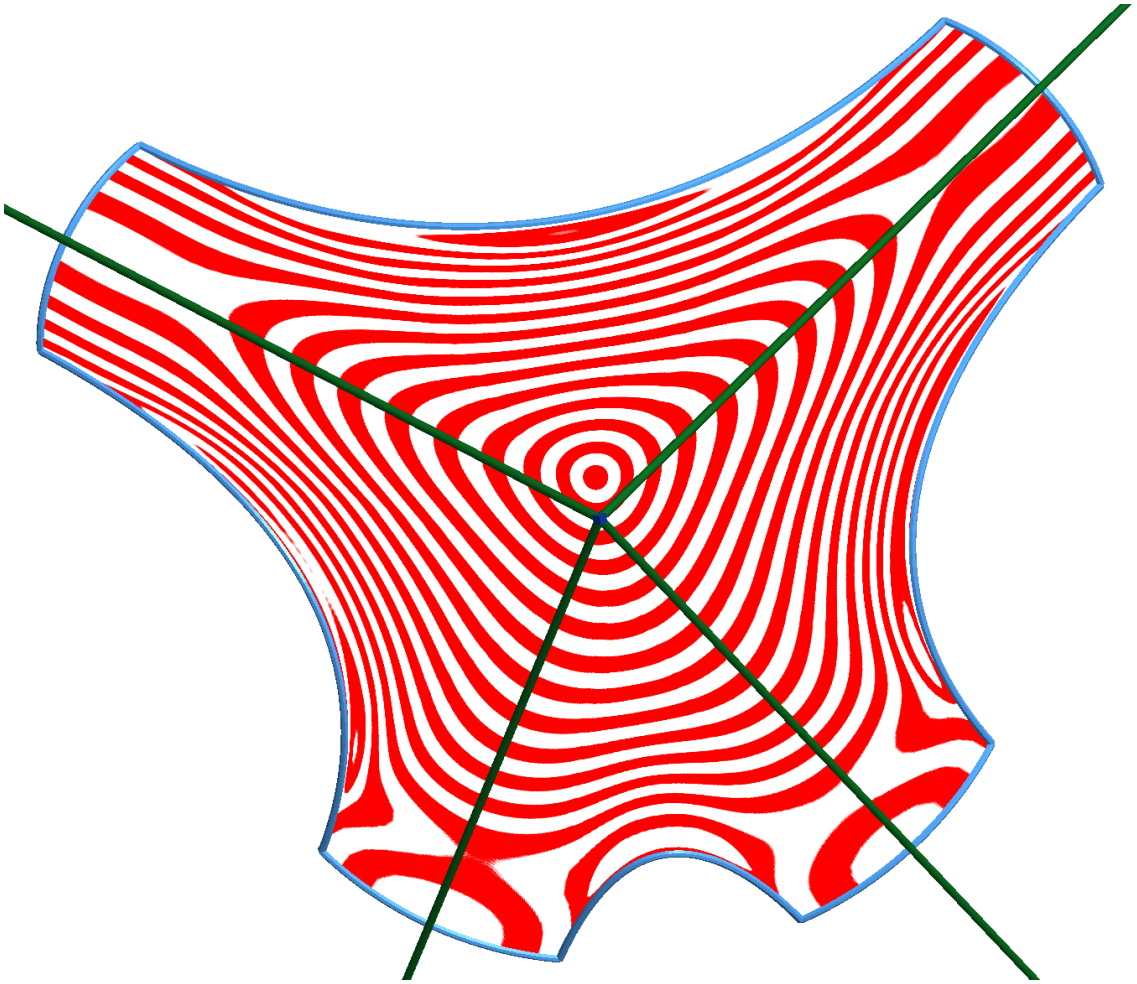


- Bemenet: egy csúcs, és oda befutó lekerekített élek (k darab, adott sugárral)
- Kimenet: $2k$-oldalú I-patch, csatlakozva az éllekerekítésekhez és a lapokhoz

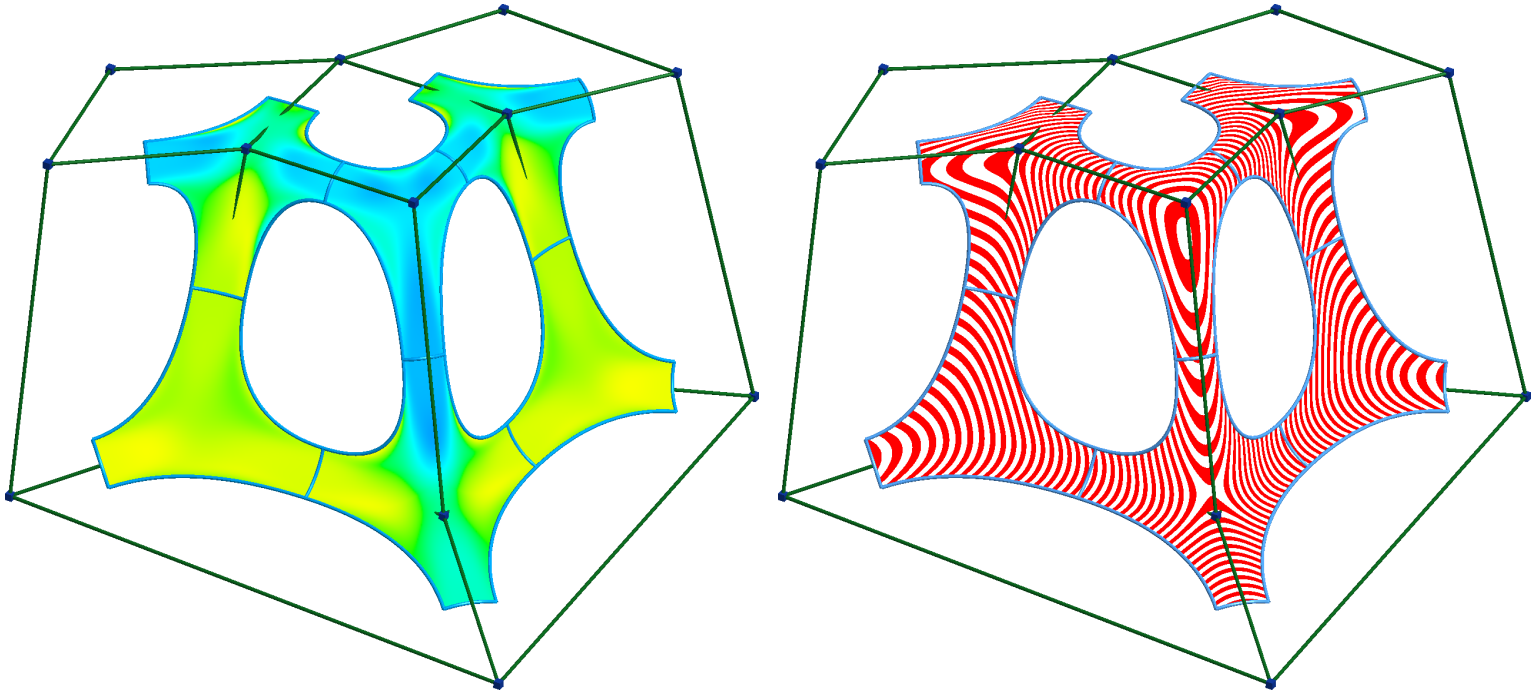
- A görbeháló az alábbiak váltakozó sorozata:
  - metszetgörbék (az éllekerekítésekhez csatlakoznak)
  - összekötő görbék (a lapokon futnak)

Setback vertex blending





Setback vertex blending

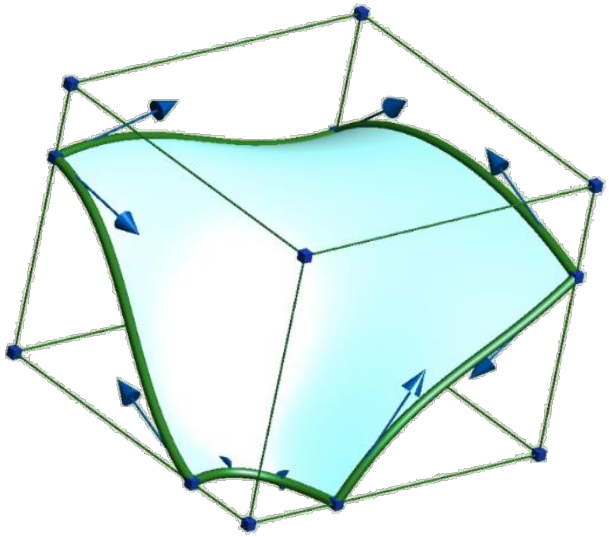


Sipos, Á., Várady, T., Salvi, P., Vaitkus, M.
Multi-sided implicit surfacing with I-patches.
Computers & Graphics 90: 29-42., 2020

Cellaalapú modellezés

- Adott (praktikusan szabályos) térparticionálás mellett definiálja a felületet minden cellára egy-egy implicit függvény
- Cellahatáron ezek csatlakozzanak folytonosan

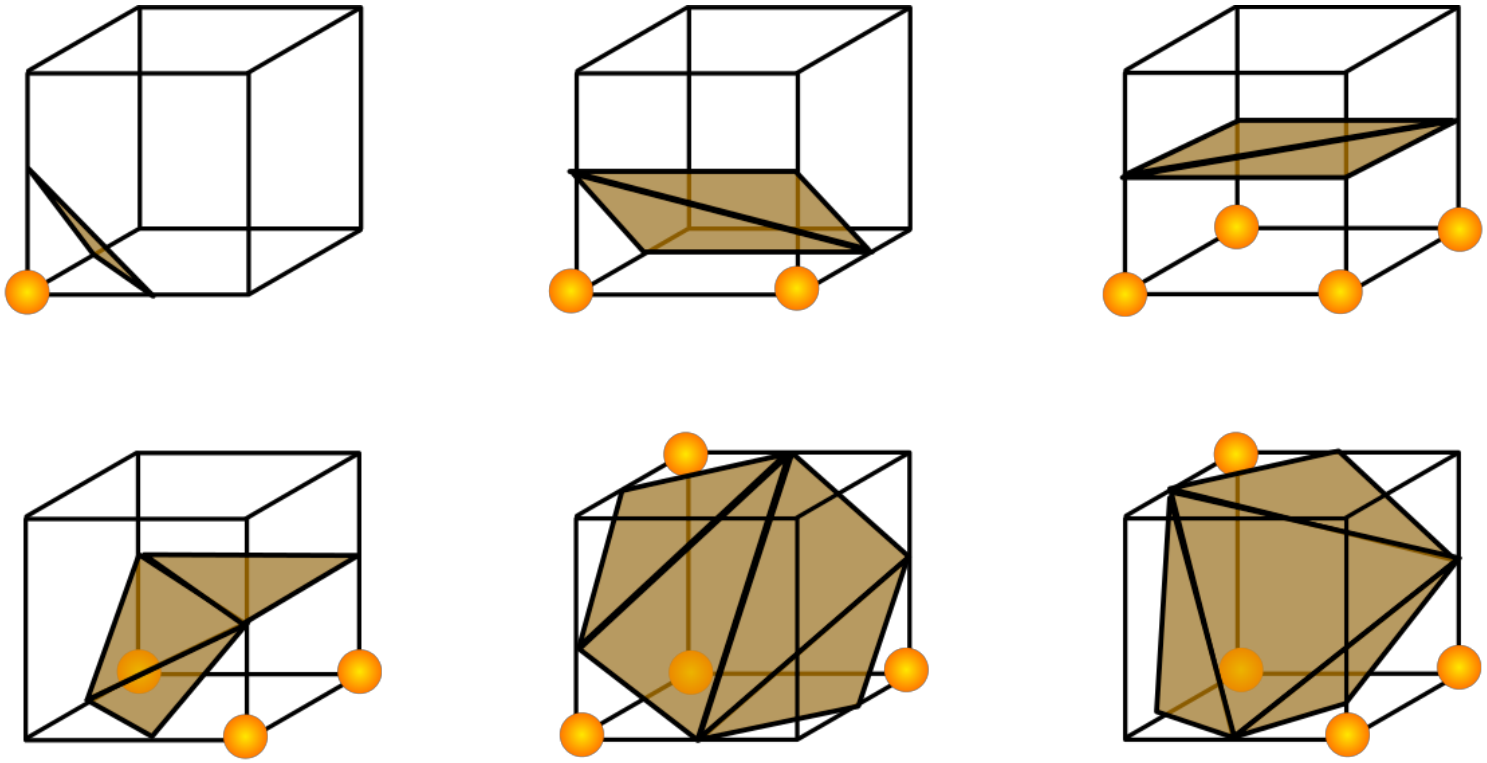
Célszerű bemenet:
sarokpontokban rögzített érintősíkok



N-oldalú patch

Felülettopológiák

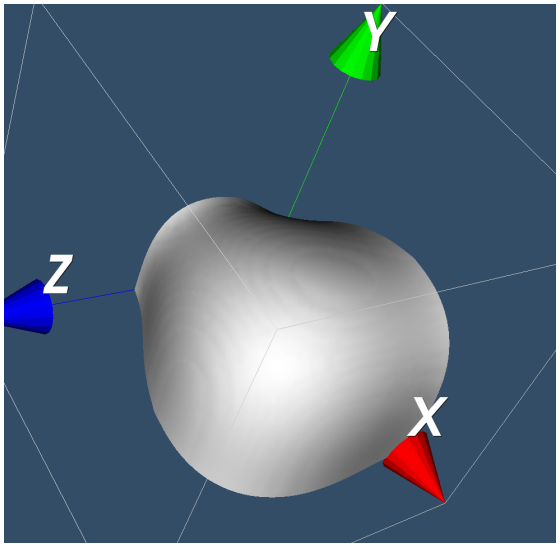
A csúcsok osztályozásával



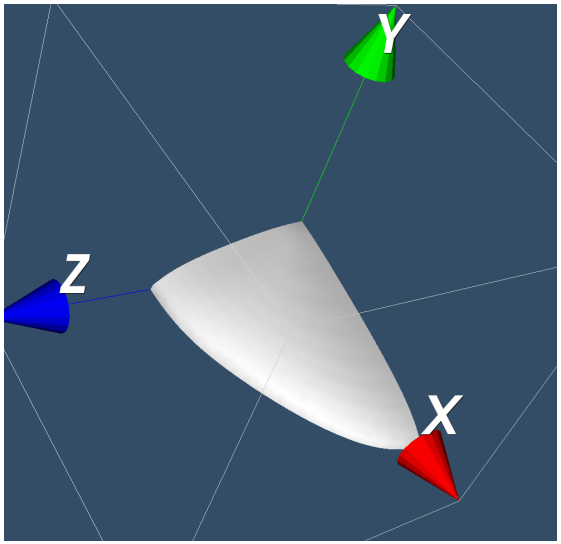
3-, 4-, 5-, vagy 6-oldalú felületek

Probléma

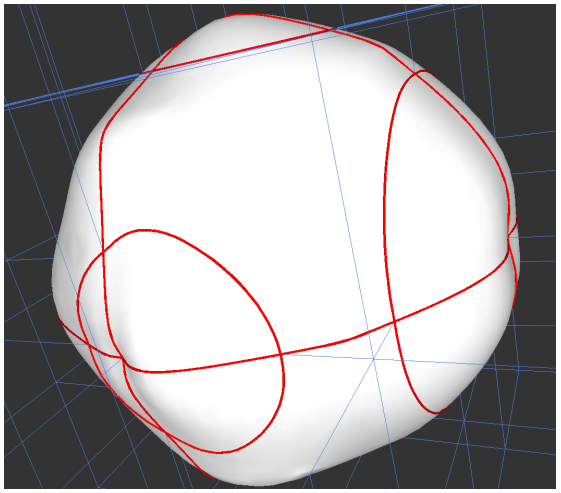
Együtthatók beállítása nem nyilvánvaló



Rossz együtthatók



Behangolt együtthatók



Összetett felület (kissé göcsörtös)

Folyamatban levő kutatás

Összefoglalás

Előnyök:

- Szabadformájú implicit felületek
- Praktikus pl. approximáció, offszetelés, sugárkövetés céljára
- Automatikusan teljesülő folytonossági feltételek

Nehézségek:

- Nehéz megakadályozni a felületek szétesését bizonyos geometriákra
- Együtthatók jelentése, meghatározása nem világos

Kérdések?