

3D Számítógépes Geometria II.

9. Négyoldalú felületekből összetett 3D modellek

<http://cg.iit.bme.hu/portal/3dgeo2>

<https://www.vik.bme.hu/kepzes/targyak/VIII/V16>

Dr. Várady Tamás, Dr. Salvi Péter
BME, Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Irányítástechnika és Informatika Tanszék

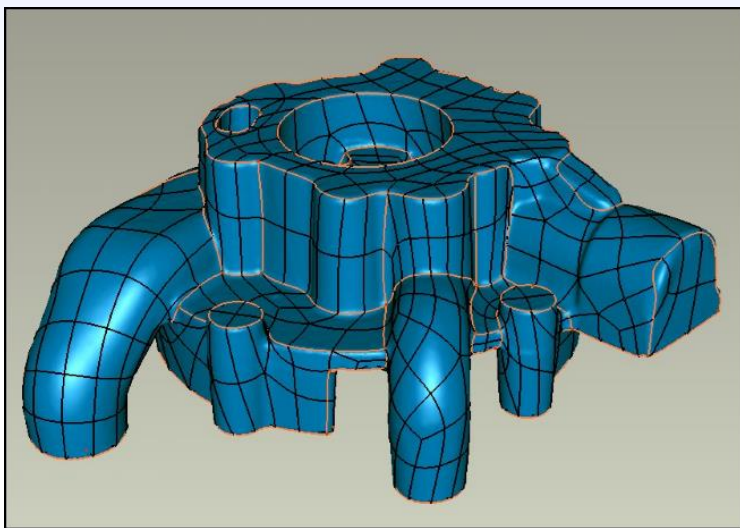


Tartalom

1. Alkalmazások
2. Görbehálók osztályozása
3. Két felület G^1 kapcsolódása
4. Twist kompatibilitás
5. Optimális felületi görbület meghatározása
6. Bézier felületek
keresztirányú deriváltak, twist kontrollpontok
7. Alkalmazások és az XSolid koncepció

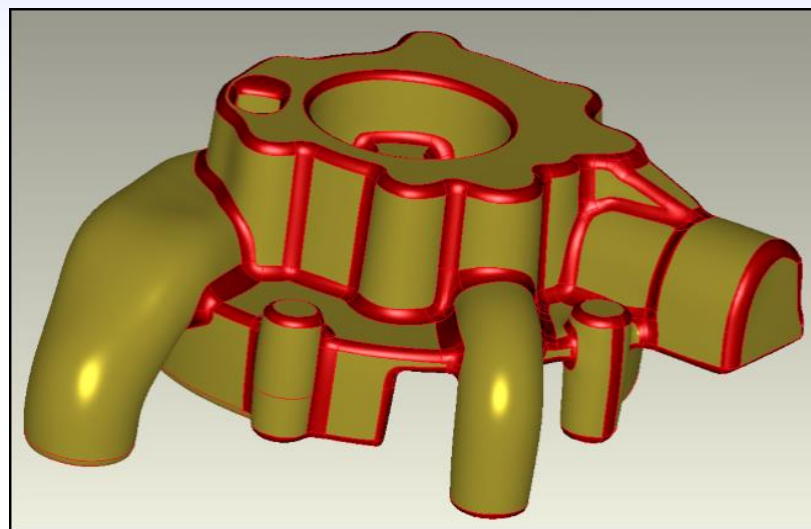
Alkalmazások₁

Geomagic Studio – reverse engineering



csempézés B-spline-okkal

- automatikus, szabványos, „watertight”, de nem CAD-szerű adatstruktúra

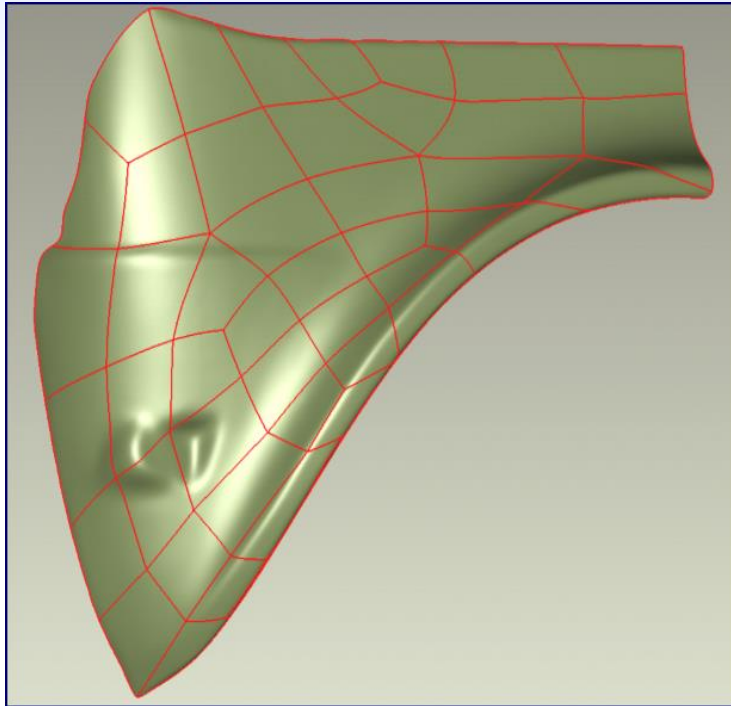


funkcionális dekompozíció

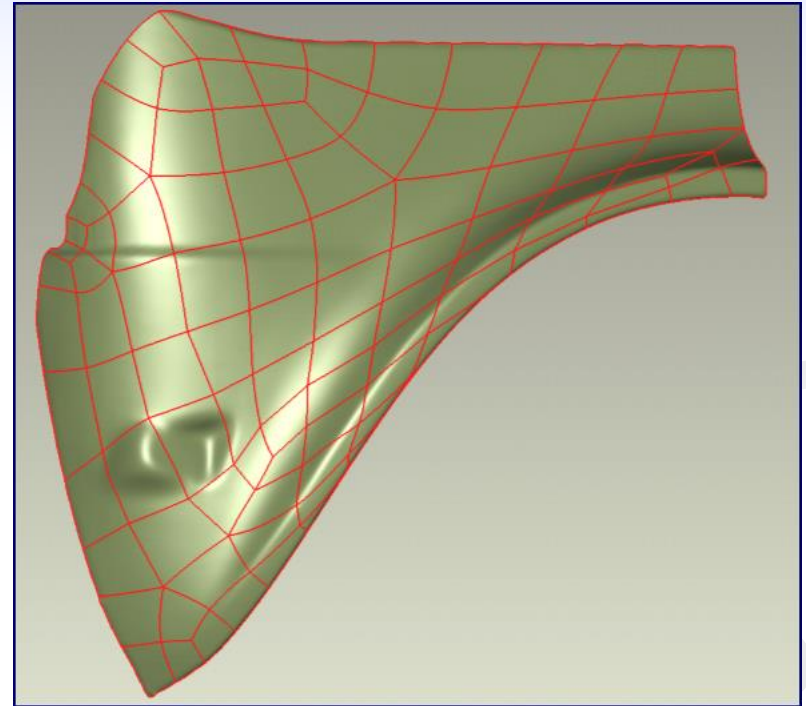
- szegmentált struktúra, CAD felületekkel

Alkalmazások₂

Geomagic Studio – reverse engineering



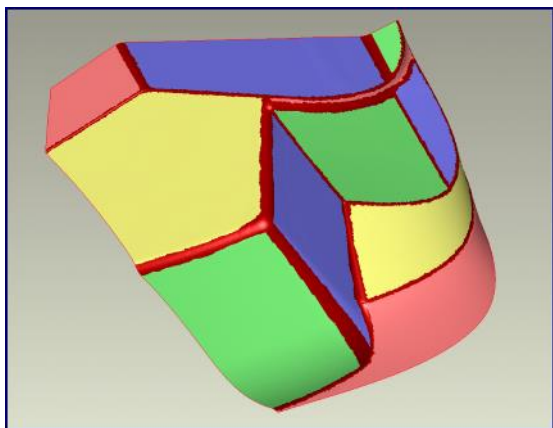
patch-ek száma ≈ 50



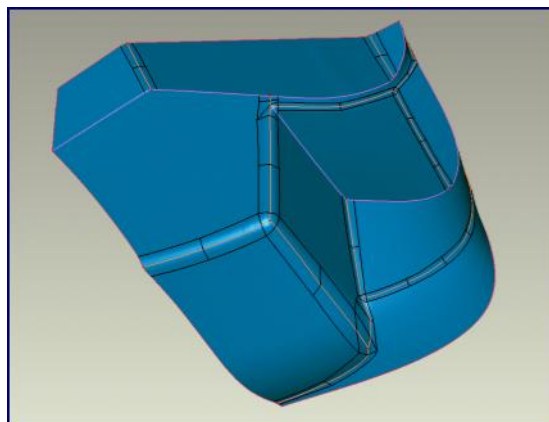
patch-ek száma ≈ 100

Alkalmazások₃

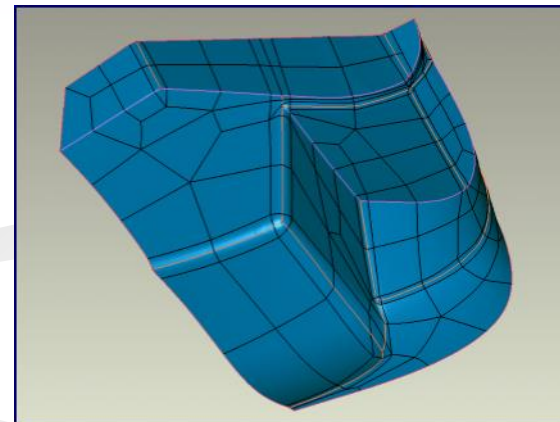
Geomagic Studio – reverse engineering



szegmentált modell



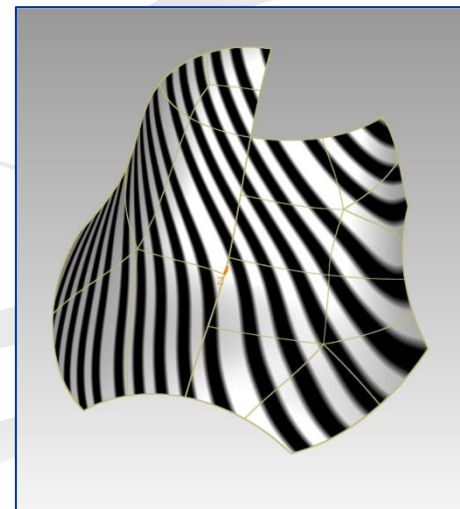
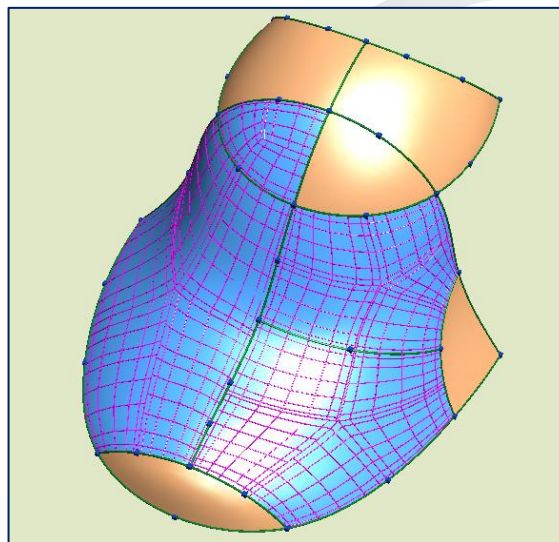
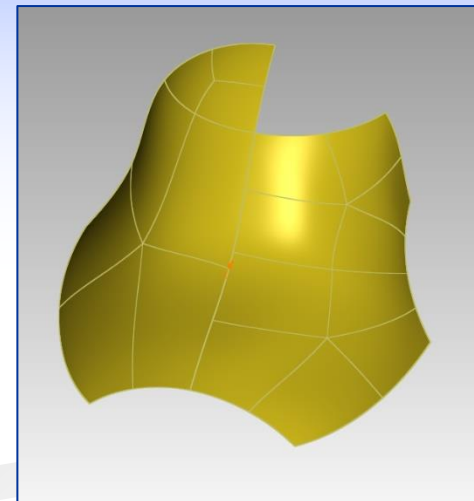
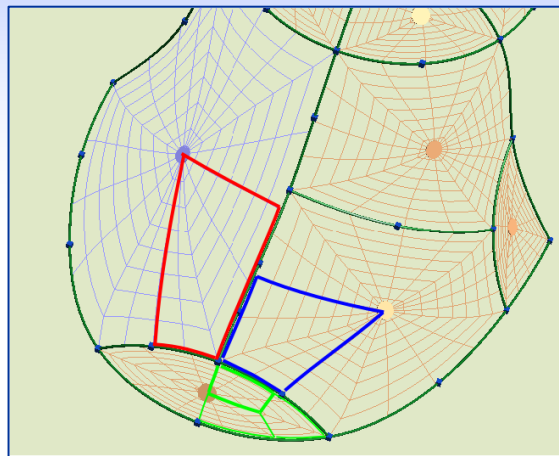
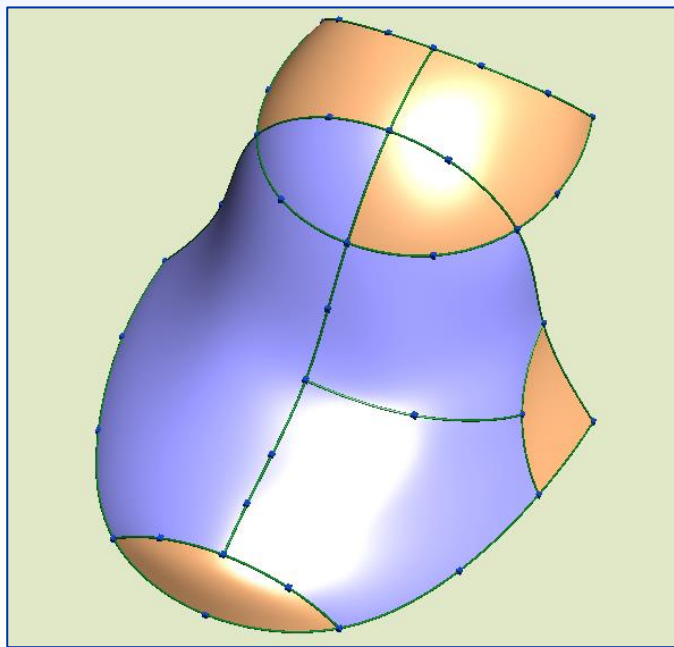
felosztás az élek mentén



négyszögletes patch-ek a
tartományokon belül

Alkalmazások₄

Sketches – görbeháló alapú tervezés → export



Alkalmazások₅

XSolid

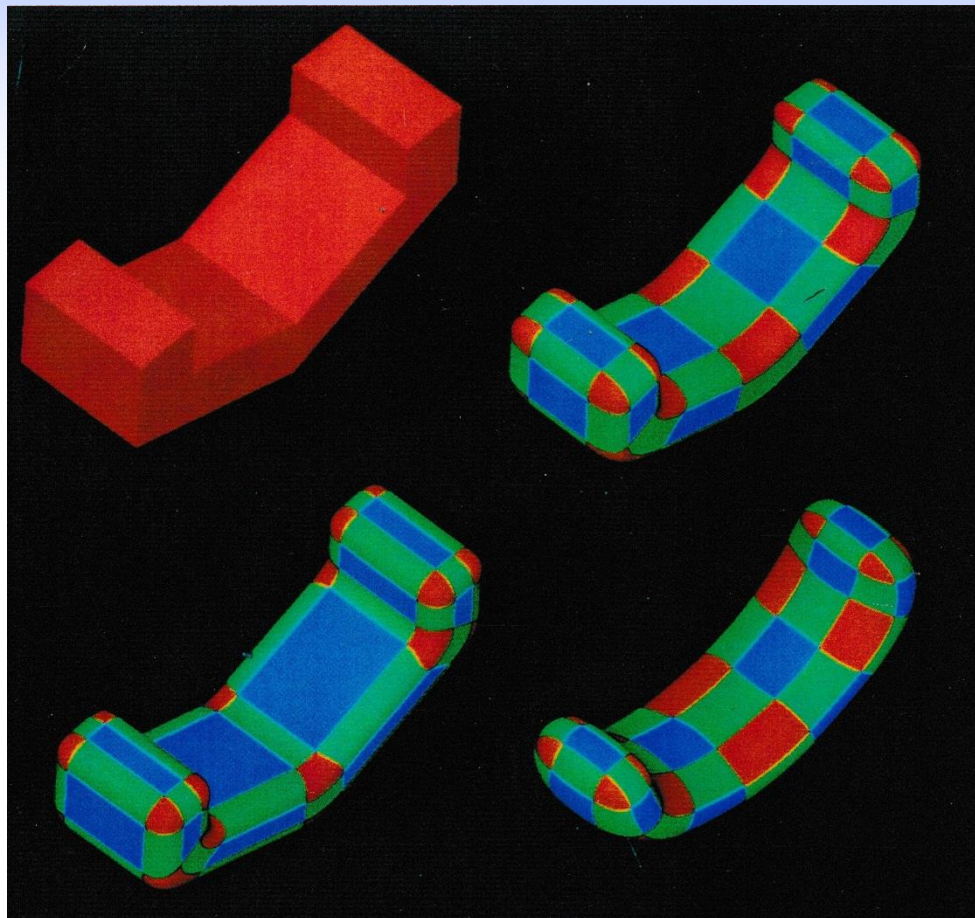
– poliéderek simítása



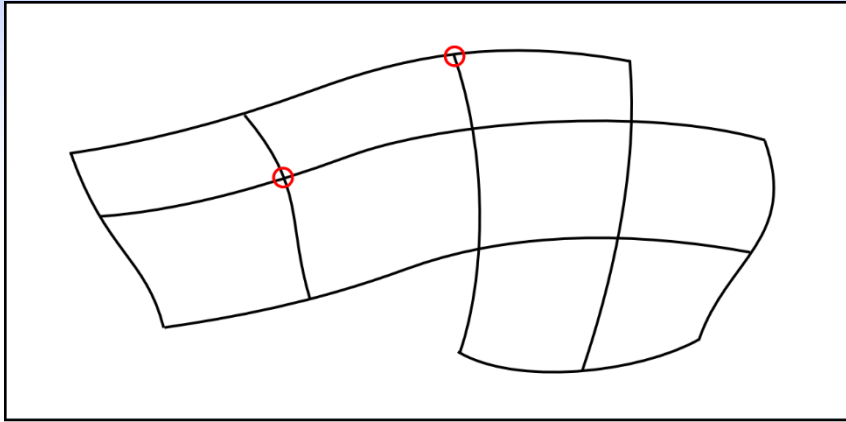
Alkalmazások₆

XSolid

– poliéderek simítása

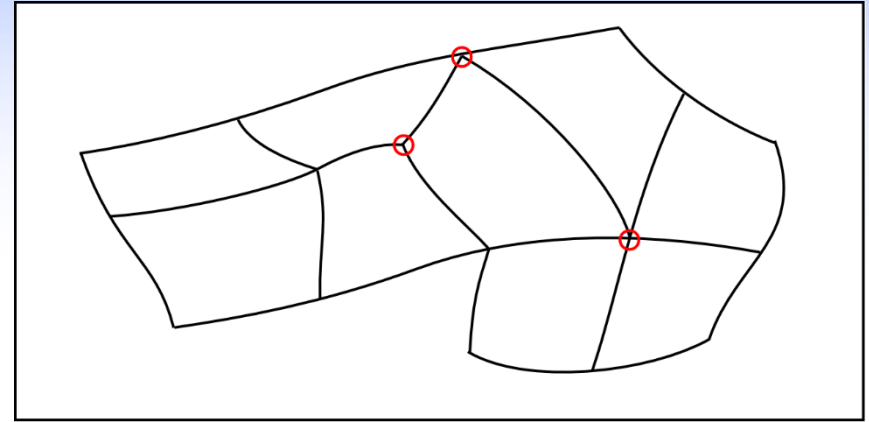


Görbehálók osztályozása₁



Simple FaceToFace

- X-node-ok belül
- T-node-ok csak a határon
- belső csúcsok fokszáma $n=4$

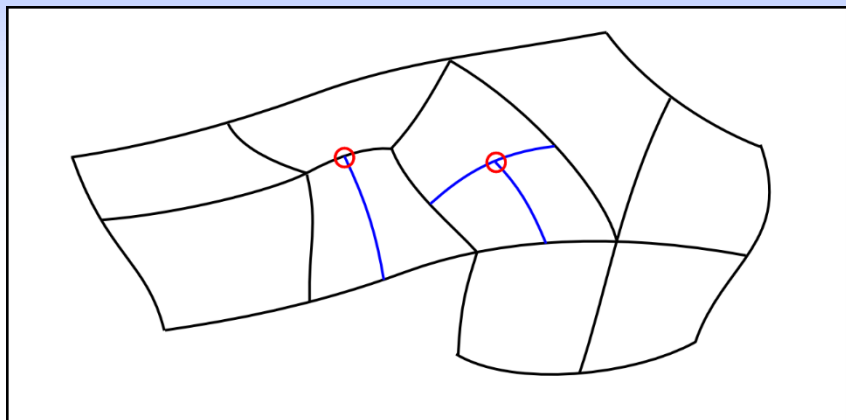


General FaceToFace

- ✕-node-ok belül
- TT-node-ok a határon
- belső csúcsok fokszáma $n \geq 3$

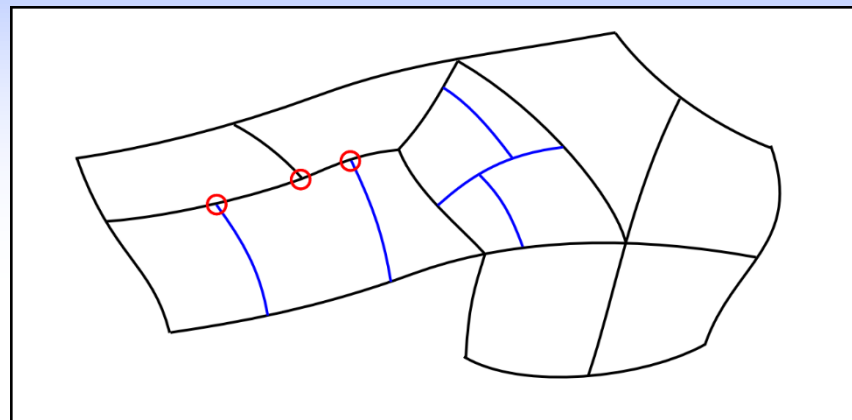
Quadmesh

Görbehálók osztályozása₂



Simple FaceToMultiFace

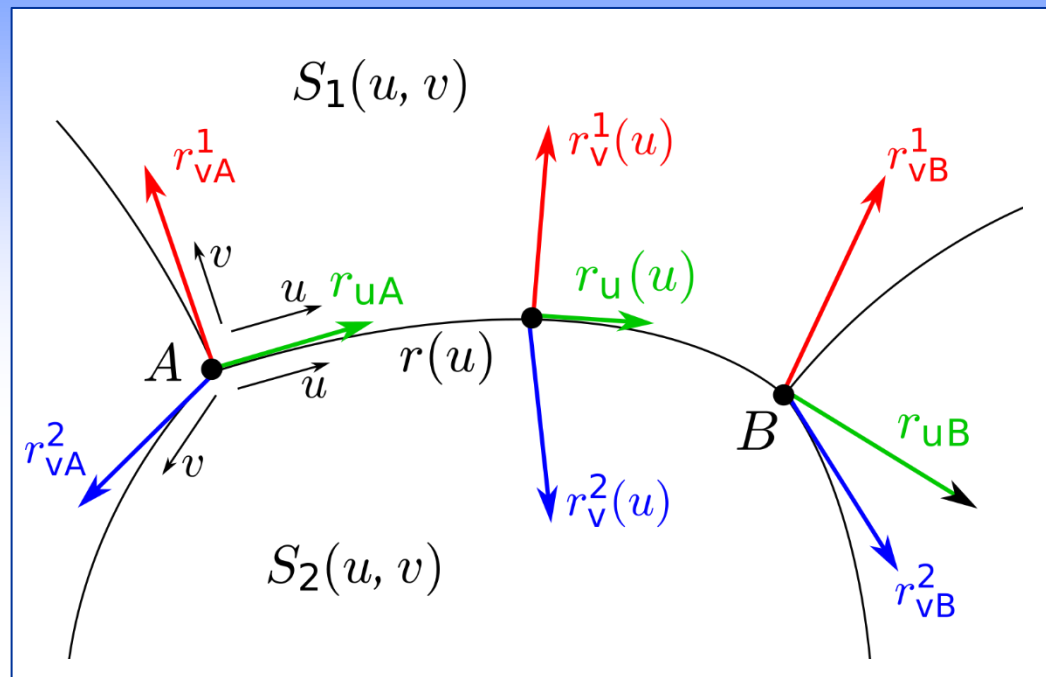
- az élgörbék osztódnak
- belső T-node-ok
- a T-node melletti keresztderivált mindig részhalmaza a szemben lévő felületnek



General FaceToMultiFace

- az élgörbék többszörösen osztódnak belső T-node-ok által
- a keresztderiváltak több szemben lévő felülethez illeszkedhetnek

Két felület G^1 kapcsolódása₁



$$r(u) = S_1(u, 0) = S_2(u, 0),$$

$$r_u(u) = \frac{\partial}{\partial u} S_1(u, 0) = \frac{\partial}{\partial u} S_2(u, 0), \quad r_v^1(u) = \frac{\partial}{\partial v} S_1(u, 0), \quad r_v^2(u) = \frac{\partial}{\partial v} S_2(u, 0)$$

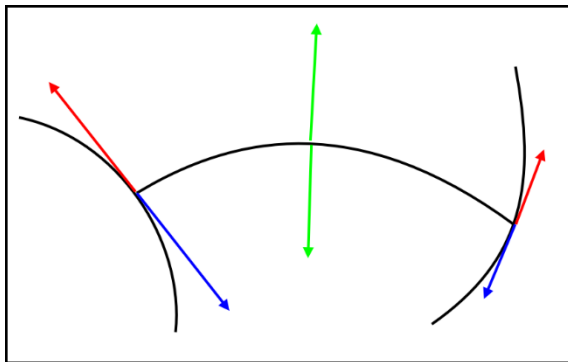
$$N^1(u) = r_u(u) \times r_v^1(u), \quad N^2(u) = r_u(u) \times r_v^2(u),$$

$$N^1(u) \parallel N^2(u) \leftrightarrow a(u)r_u(u) + b(u)r_v^1(u) + c(u)r_v^2(u) = 0$$

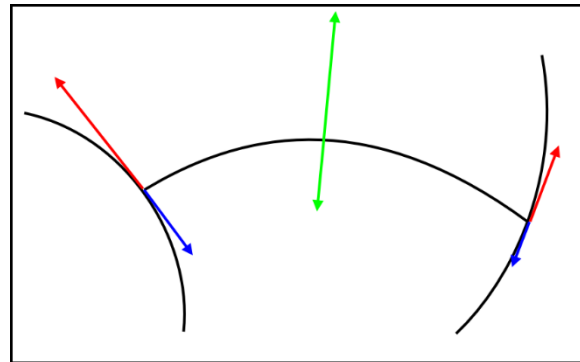
Két felület G^1 kapcsolódása₂

- lineáris keresztirányú deriváltak

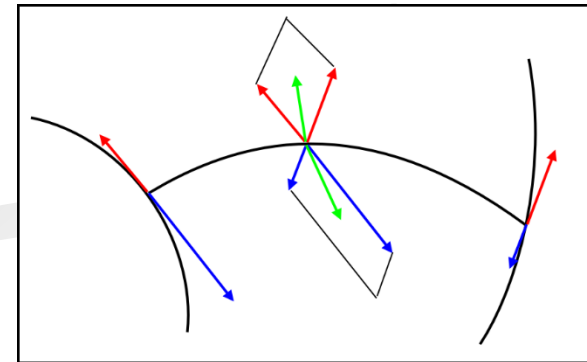
$$r_v^1(u) = r_{vA}^1(1-u) + r_{vB}^1u, r_v^2(u) = r_{vA}^2(1-u) + r_{vB}^2u,$$



$$r_{vA}^1 = -r_{vA}^2, r_{vB}^1 = -r_{vB}^2$$



$$r_{vA}^1 = -2r_{vA}^2, r_{vB}^1 = -2r_{vB}^2$$



$$r_{vA}^1 = -\frac{1}{2}r_{vA}^2, r_{vB}^1 = -2r_{vB}^2$$

- az irányok nem-lineárisan blendelődnek

Két felület G^1 kapcsolódása₃

- közös irányblend – vektor függvény

$$D(u) = D_A(1-u) + D_B u,$$

$$D_A = \frac{r_{vA}^1 - r_{vA}^2}{2}, D_B = \frac{r_{vB}^1 - r_{vB}^2}{2}$$

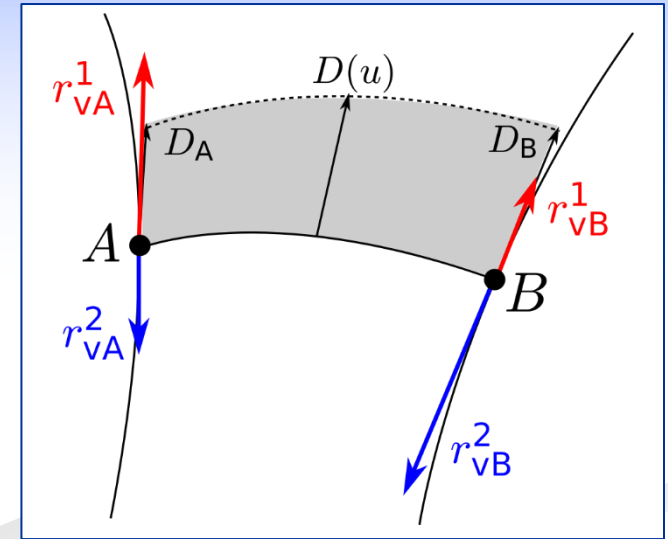
- két skalár függvény, az abszolút értékeket blendeli

$$a^i(u) = a_A^i(1-u) + a_B^i u, a_A^i = \frac{|r_{vA}^i|}{|D_A|}, a_B^i = \frac{|r_{vB}^i|}{|D_B|}, i = 1, 2$$

- a keresztderiváltak szorzatként adódnak, és a G^1 folytonosság teljesül

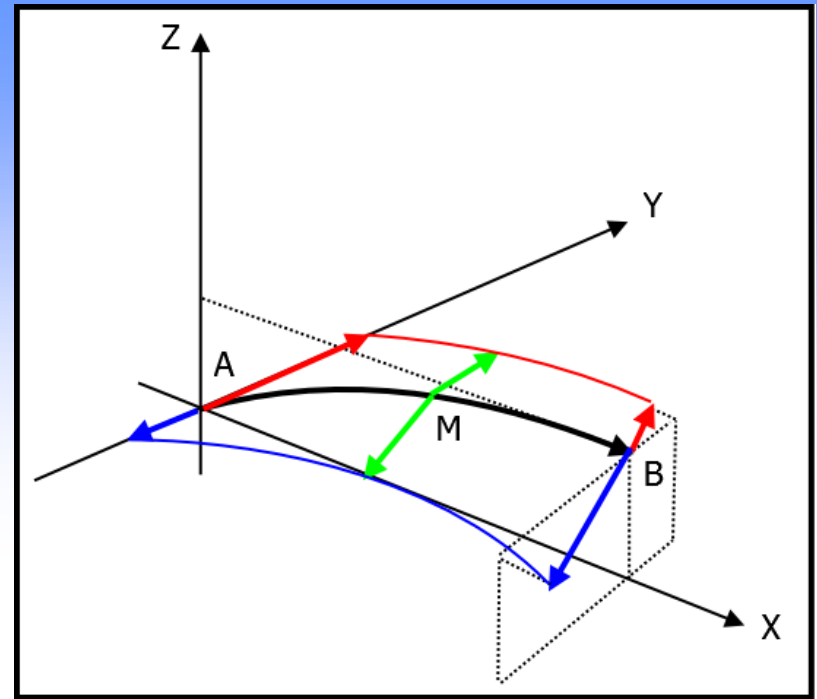
$$r_v^1(u) = a^1(u)D(u), r_v^2(u) = a^2(u)D(u)$$

$$N^i(u) = a^i(u) (r_u(u) \times D(u)) \rightarrow N^1(u) \parallel N^2(u)$$



Ujjgyakorlat*₁

- határozzuk meg a görbe deriváltját és a két keresztderiváltat az **M** pontban
- mutassuk meg, hogy a normálvektorok nem párhuzamosak



$$r(u) = (0,0,0)(1-u)^2 + (6,0,4)2(1-u)u + (12,0,4)u^2$$

$$r_u(u) = 2(6,0,4)(1-u) + 2(6,0,0)u$$

$$r_u(u) = n((C_1 - C_0)(1-u) + (C_2 - C_1)u)$$

$$r_v^1(u) = r_{vA}^1(1-u) + r_{vB}^1u, r_{vA}^1 = (0,6,0), r_{vB}^1 = (-2,4,0)$$

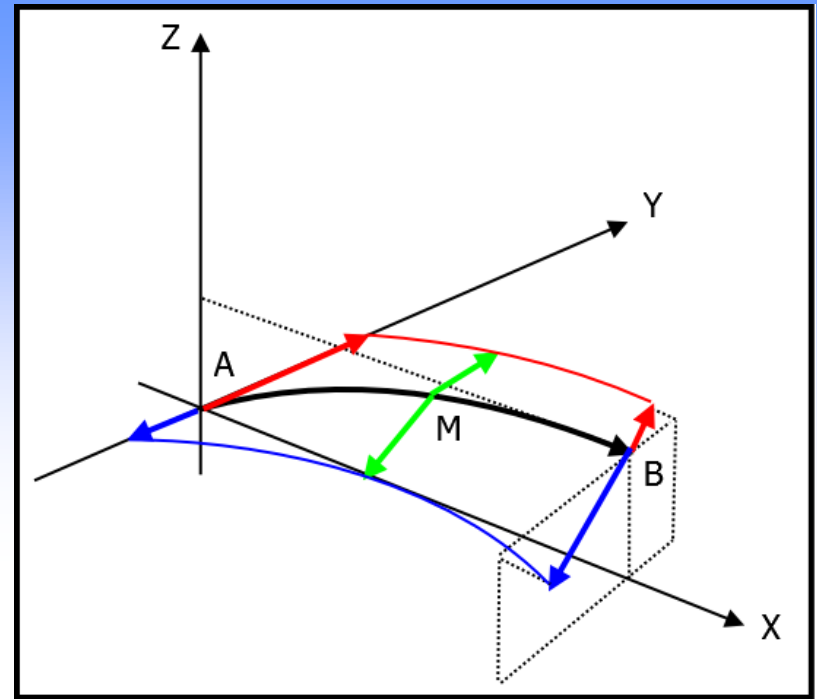
$$r_v^2(u) = r_{vA}^2(1-u) + r_{vB}^2u, r_{vA}^2 = (0,-2,0), r_{vB}^2 = (4,-8,0)$$

$$N_M^1 = r_u(0.5) \times r_v^1(0.5) = (\dots, \dots, \dots) \times (\dots, \dots, \dots) = (\dots, \dots, \dots)$$

$$N_M^2 = r_u(0.5) \times r_v^2(0.5) = (\dots, \dots, \dots) \times (\dots, \dots, \dots) = (\dots, \dots, \dots)$$

Ujjgyakorlat₁

- határozzuk meg a görbe deriváltját és a két keresztderiváltat az **M** pontban
- mutassuk meg, hogy a normálvektorok nem párhuzamosak



$$r(u) = (0,0,0)(1-u)^2 + (6,0,4)2(1-u)u + (12,0,4)u^2$$

$$r_u(u) = 2(6,0,4)(1-u) + 2(6,0,0)u$$

$$r_v^1(u) = r_{vA}^1(1-u) + r_{vB}^1u, r_{vA}^1 = (0,6,0), r_{vB}^1 = (-2,4,0)$$

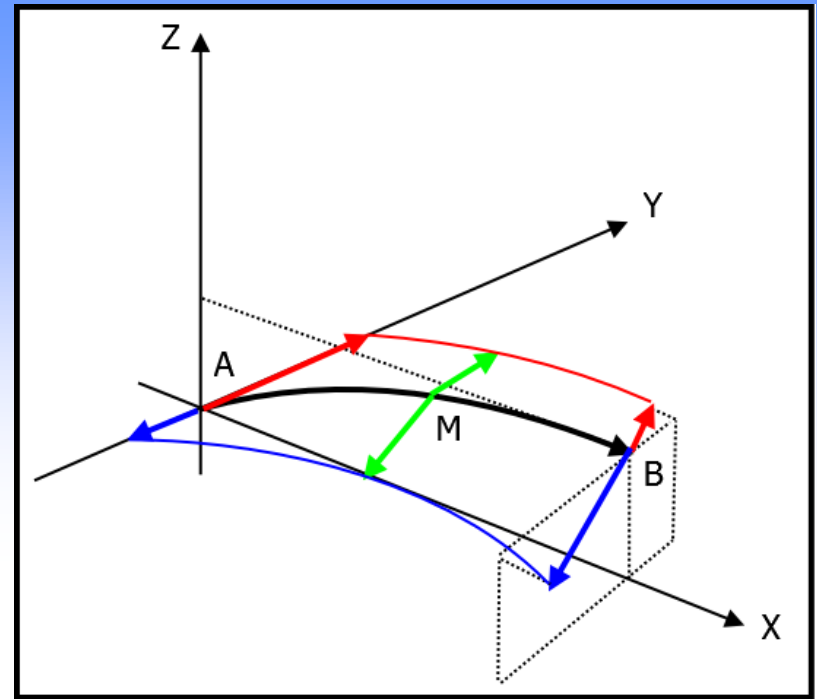
$$r_v^2(u) = r_{vA}^2(1-u) + r_{vB}^2u, r_{vA}^2 = (0,-2,0), r_{vB}^2 = (4,-8,0)$$

$$N_M^1 = r_u(0.5) \times r_v^1(0.5) = (12,0,4) \times (-1,5,0) = (-20,-4,60)$$

$$N_M^2 = r_u(0.5) \times r_v^2(0.5) = (12,0,4) \times (2,-5,0) = (20,8,-60)$$

Ujjgyakorlat*₂

- határozzuk meg a görbe deriváltját és a közös irányblendet az M pontban
- számítsuk ki a közös normálvektort



$$r(u) = (0,0,0)(1-u)^2 + (6,0,4)2(1-u)u + (12,0,4)u^2$$

$$r_u(u) = 2(6,0,4)(1-u) + 2(6,0,0)u$$

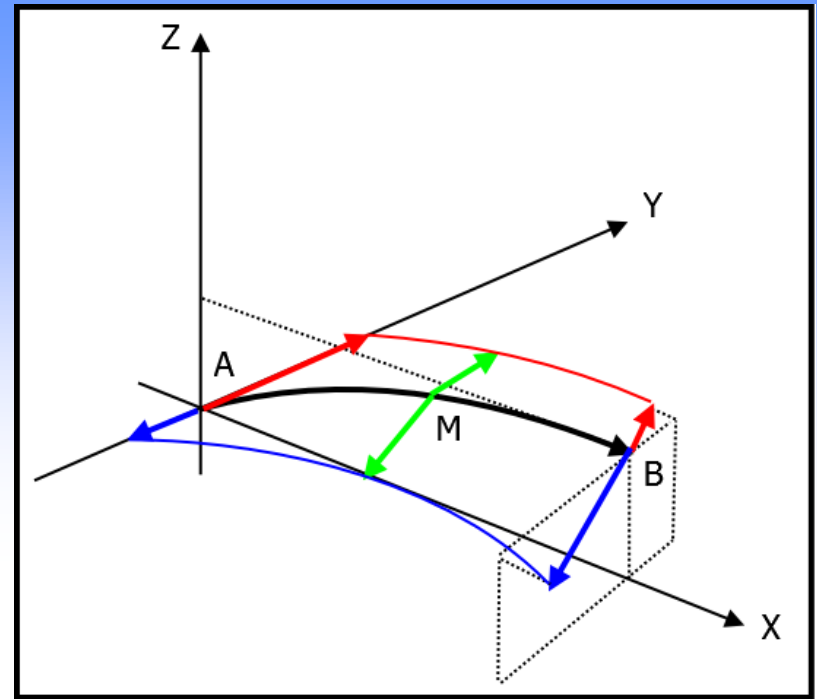
$$r_{vA}^1 = (0,6,0), r_{vB}^1 = (-2,4,0), r_{vA}^2 = (0,-2,0), r_{vB}^2 = (4,-8,0)$$

$$D(u) = D_A(1-u) + D_B u, D_A = \frac{r_{vA}^1 - r_{vA}^2}{2} = (..., ..., ...), D_B = \frac{r_{vB}^1 - r_{vB}^2}{2} = (..., ..., ...)$$

$$N_M^1 = r_u(0.5) \times D(0.5) = (12,0,4) \times (..., ..., ...) = (..., ..., ...)$$

Ujjgyakorlat₂

- határozzuk meg a görbe deriváltját és a közös irányblendet az M pontban
- számítsuk ki a közös normálvektort



$$r(u) = (0,0,0)(1-u)^2 + (6,0,4)2(1-u)u + (12,0,4)u^2$$

$$r_u(u) = 2(6,0,4)(1-u) + 2(6,0,0)u$$

$$r_{vA}^1 = (0,6,0), r_{vB}^1 = (-2,4,0), r_{vA}^2 = (0,-2,0), r_{vB}^2 = (4,-8,0)$$

$$D(u) = D_A(1-u) + D_B u, D_A = \frac{r_{vA}^1 - r_{vA}^2}{2} = (0,4,0), D_B = \frac{r_{vB}^1 - r_{vB}^2}{2} = (-3,6,0)$$

$$N_M^1 = r_u(0.5) \times D(0.5) = (12,0,4) \times (-1.5,5,0) = (-20,-6,60)$$

Két felület G^1 kapcsolódása₄

- általános megoldás: közös irányblend alkalmazása

- $D(u)$ vektorfüggvény; $a^i(u)$, $b^i(u)$ skálár függvények

$$r_v^1(u) = a^1(u)D(u) + b^1(u)r_u(u),$$

$$r_v^2(u) = a^2(u)D(u) + b^2(u)r_u(u)$$

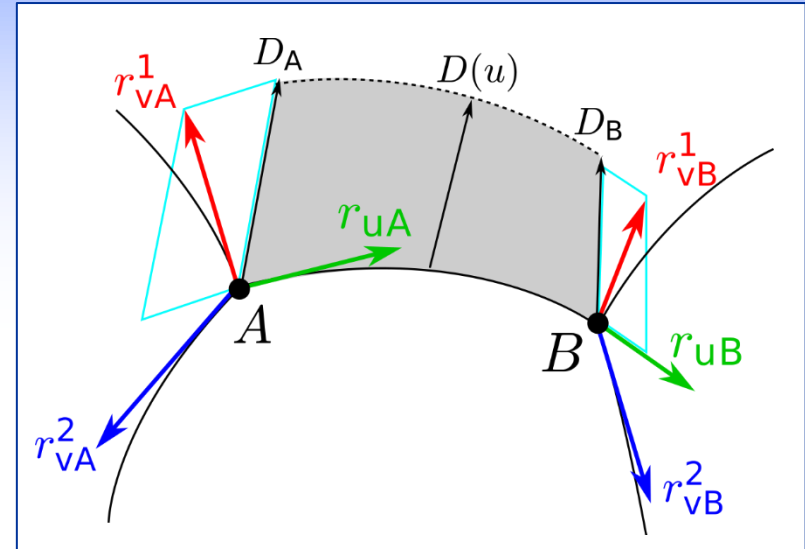
- a G^1 folytonosság teljesül

$$N^i(u) = r_u(u) \times r_v^i(u) = a^i(u)(r_u(u) \times D(u)) \rightarrow N^1(u) \parallel N^2(u)$$

- peremfeltételek az A és B pontban

$$D(0) = \frac{r_{vA}^1 - r_{vA}^2}{2}, r_{vA}^i = a^i(0)D(0) + b^i(0)r_u(0), i = 1, 2$$

$$D(1) = \frac{r_{vB}^1 - r_{vB}^2}{2}, r_{vB}^i = a^i(1)D(1) + b^i(1)r_u(1), i = 1, 2$$



G^1 Coons felületek - ismételés

- adott négy határgörbe és hozzá tartozó keresztderivált:

$$\mathbf{S}(u,0), \mathbf{S}(u,1), \mathbf{S}(0,v), \mathbf{S}(1,v);$$

$$\mathbf{S}_v(u,0), \mathbf{S}_v(u,1), \mathbf{S}_u(0,v), \mathbf{S}_u(1,v)$$

- két harmadfokú simítás (Hermite függvények):

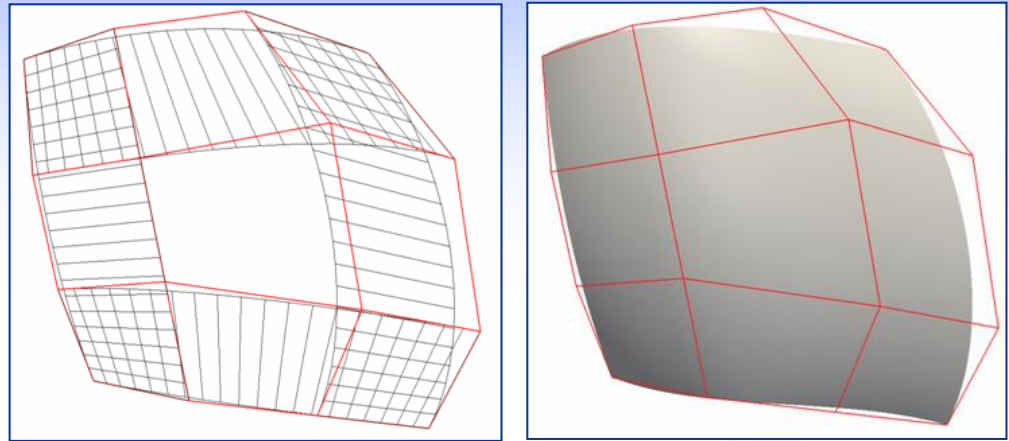
$$\mathbf{S}_1(u,v) = F_0(v) \mathbf{S}(u,0) + G_0(v) \mathbf{S}_v(u,0) + F_1(v) \mathbf{S}(u,1) + G_1(v) \mathbf{S}_v(u,1),$$

$$\mathbf{S}_2(u,v) = F_0(u) \mathbf{S}(0,v) + G_0(u) \mathbf{S}_u(0,v) + F_1(u) \mathbf{S}(1,v) + G_1(u) \mathbf{S}_u(1,v)$$

- korrekciós tag:

$$\mathbf{S}_{12}(u,v) = \begin{bmatrix} F_0(u) & G_0(u) & F_1(u) & G_1(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}(0,0) & \mathbf{S}_v(0,0) & \mathbf{S}(0,1) & \mathbf{S}_v(0,1) \\ \mathbf{S}_u(0,0) & \mathbf{S}_{uv}(0,0) & \mathbf{S}_u(0,1) & \mathbf{S}_{uv}(0,1) \\ \mathbf{S}(1,0) & \mathbf{S}_v(1,0) & \mathbf{S}(1,1) & \mathbf{S}_v(1,1) \\ \mathbf{S}_u(1,0) & \mathbf{S}_{uv}(1,0) & \mathbf{S}_u(1,1) & \mathbf{S}_{uv}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0(v) \\ G_0(v) \\ F_1(v) \\ G_1(v) \end{bmatrix}$$

- felületegyenlet (Boolean sum): $\mathbf{S}(u,v) = \mathbf{S}_1(u,v) + \mathbf{S}_2(u,v) - \mathbf{S}_{12}(u,v)$

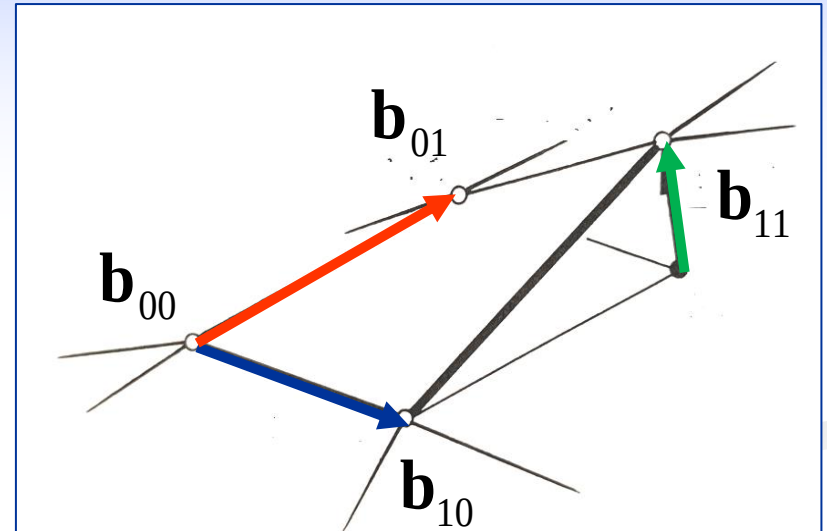


Twist vektorok₁

- egy $S(u, v)$ felület vegyes parciális deriváltja

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} S(u, v)$$

- a „csavarodást” méri



$$\begin{aligned} S(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) &= S(u_0, v_0) + S_u(u_0, v_0)\Delta u \\ &\quad + S_v(u_0, v_0)\Delta v + S_{uv}(u_0, v_0)\Delta u\Delta v \end{aligned}$$

Twist vektorok₂

- polinomiális patch-eknél

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} S(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} S(u, v)$$

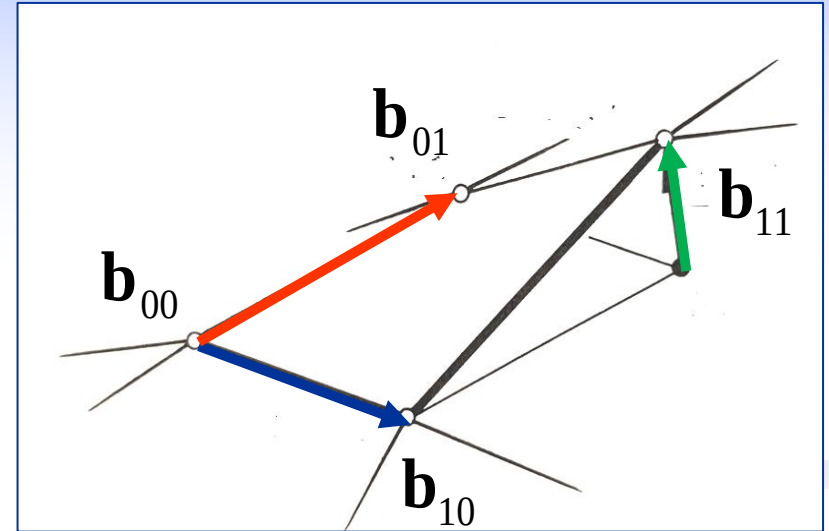
- bicubic Bézier patch:

$$S(0,0) = \mathbf{b}_{00}, S_u(0,0) = 3(\mathbf{b}_{10} - \mathbf{b}_{00})$$

$$S_v(0,0) = 3(\mathbf{b}_{01} - \mathbf{b}_{00}), S_{uv}(0,0) = 9(\mathbf{b}_{11} - \mathbf{b}_{10} - \mathbf{b}_{01} + \mathbf{b}_{00})$$

- a twist vektor kifejezhető:

$$\mathbf{b}_{11} = \mathbf{b}_{00} + (\mathbf{b}_{10} - \mathbf{b}_{00}) + (\mathbf{b}_{01} - \mathbf{b}_{00}) + \frac{1}{9} S_{uv}(0,0)$$



Degenerált Bézier patch

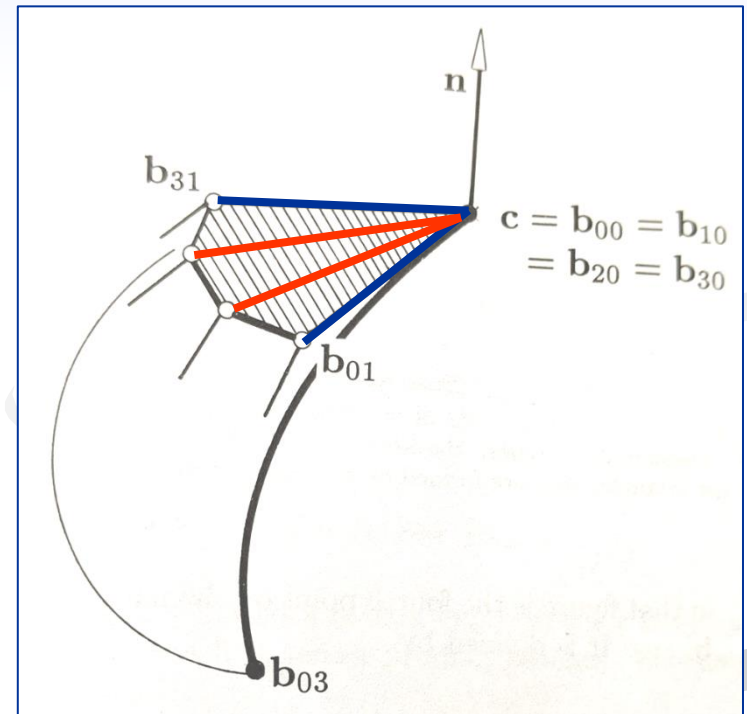
- degenerált oldal – a $\mathbf{b}_{i0}$ kontrollpontok összeesnek

- normál vektor

$$N(0,0) = S_u(0,0) \times S_v(0,0) = ?$$

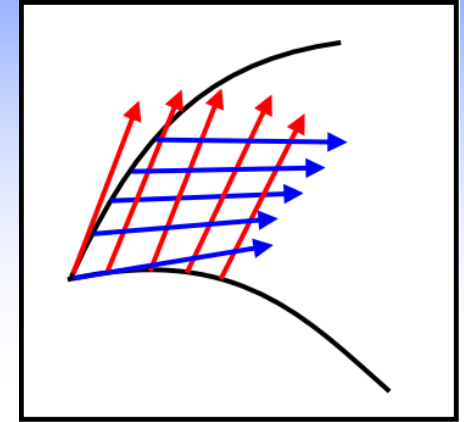
- a twist vektor segít;
a $\mathbf{b}_{i1}$ -k egy síkban vannak

$$N(0,0) = (\mathbf{b}_{01} - \mathbf{b}_{00}) \times (\mathbf{b}_{11} - \mathbf{b}_{00})$$



Gregory's square

- tangens ribbon alapú konstrukciónál vigyázni kell !!!

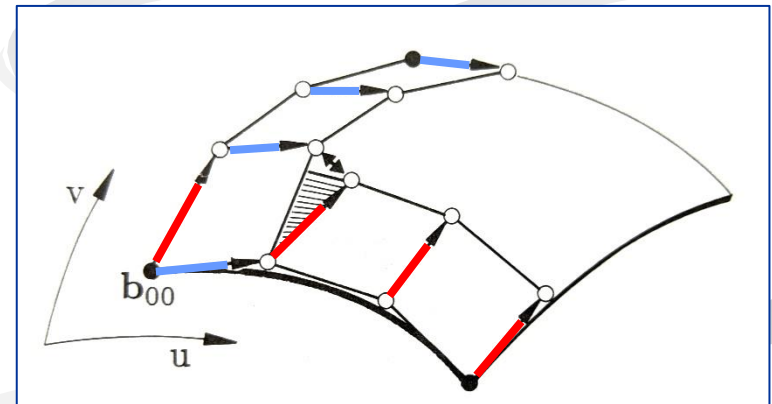


$$\frac{\partial^2}{\partial v \partial u} S(0,0) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial u} S_v(u,0) \neq \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} S(0,0) = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial v} S_u(0,v)$$

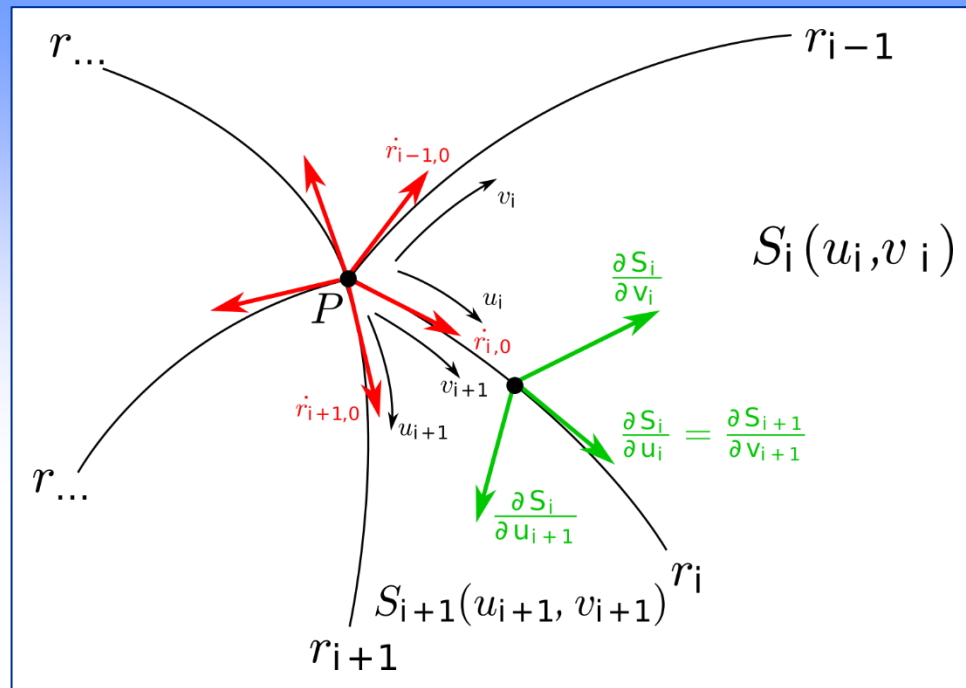
- a ribbonokat összesimítjuk

$$\mathbf{b}_{11} = \frac{u\mathbf{b}_{11}^1 + v\mathbf{b}_{11}^2}{u+v}$$

- twist korrekció a sarkokban!
szingularitás



Twist kompatibilitás₁



- n görbe - $r_i(t_i)$
- n polinomiális patch - $S_i(u_i, v_i) : S_i(0, v_i) = r_{i-1}(t_{i-1}), S_i(u_i, 0) = r_i(t_i)$
- a G^1 folytonosság szükséges feltétele

$$a_i(u_i) \frac{\partial S_i(u_i, 0)}{\partial v_i} + b_i(u_i) \frac{\partial S_i(u_i, 0)}{\partial u_i} + c_i(u_i) \frac{\partial S_{i+1}(0, v_{i+1})}{\partial u_{i+1}} = \mathbf{0}$$

- $a_i(u_i), b_i(u_i), c_i(u_i)$ skálár függvények

Twist kompatibilitás₂

$$a_i(u_i) \frac{\partial S_i(u_i, 0)}{\partial v_i} + b_i(u_i) \frac{\partial S_i(u_i, 0)}{\partial u_i} + c_i(u_i) \frac{\partial S_{i+1}(0, v_{i+1})}{\partial u_{i+1}} = \mathbf{0}$$

■ a P pontban $u_i = v_i = 0, u_{i+1} = v_{i+1} = 0$

$$a_{i0} \dot{r}_{i-1,0} + b_{i0} \dot{r}_{i0} + c_{i0} \dot{r}_{i+1,0} = 0 \quad / \times \dot{r}_{i0}$$

$$a_{i0} (\dot{r}_{i-1,0} \times \dot{r}_{i0}) = c_{i0} (\dot{r}_{i0} \times \dot{r}_{i+1,0}) \quad / \langle \cdot, N \rangle$$

$$\frac{a_{i0}}{c_{i0}} = \frac{\langle (\dot{r}_{i-1,0} \times \dot{r}_{i0}), N \rangle}{\langle (\dot{r}_{i0} \times \dot{r}_{i+1,0}), N \rangle} \Rightarrow \prod_{i=1}^n \frac{a_{i0}}{c_{i0}} = 1$$

Twist kompatibilitás₃

$$a_i(u_i) \frac{\partial S_i(u_i, 0)}{\partial v_i} + b_i(u_i) \frac{\partial S_i(u_i, 0)}{\partial u_i} + c_i(u_i) \frac{\partial S_{i+1}(0, v_{i+1})}{\partial u_{i+1}} = \mathbf{0}$$

- a közös határgörbe mentén deriválunk

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_i} \rightarrow & \dot{a}_i(u_i) \frac{\partial S_i(u_i, 0)}{\partial v_i} + \dot{b}_i(u_i) \frac{\partial S_i(u_i, 0)}{\partial u_i} + \dot{c}_i(u_i) \frac{\partial S_{i+1}(0, v_{i+1})}{\partial u_{i+1}} + \\ & \underline{a_i(u_i) \frac{\partial^2 S_i(u_i, 0)}{\partial u_i \partial v_i} + b_i(u_i) \frac{\partial^2 S_i(u_i, 0)}{\partial^2 u_i} + c_i(u_i) \frac{\partial S_{i+1}(0, v_{i+1})}{\partial u_{i+1} \partial v_{i+1}}} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

- $\mathbf{T}_i$ – twist vektorok; $\mathbf{R}_i$ konstans vektorok a görbék alapján
- n vektor egyenlet a $\mathbf{P}$ pontban $\underline{a_{i0} \mathbf{T}_i} + \underline{c_{i0} \mathbf{T}_{i+1}} = \underline{\mathbf{R}_i} \quad (u_i = v_i = 0)$

Twist kompatibilitás₄

■ n vektor egyenlet

$$a_{i0} \mathbf{T}_i + c_{i0} \mathbf{T}_{i+1} = \mathbf{R}_i$$

$$\begin{pmatrix} a_{10} & c_{10} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{20} & c_{20} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,0} & c_{n-1,0} \\ c_{n0} & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{T}_{n-1} \\ \mathbf{T}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{R}_{n-1} \\ \mathbf{R}_n \end{pmatrix}$$

■ a determináns értéke

$$a_{10} \dots a_{n0} + (-1)^{n+1} c_{10} \dots c_{n0} : \quad \begin{array}{ll} 2a_{10} \dots a_{n0} & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ 0 & \text{ha } n \text{ páros} \end{array}$$

Twist kompatibilitás₅

- páratlan számú görbe – mindig van megoldás
- páros számú görbe – nincs mindig megoldás !
- egy további feltételnek kell teljesülnie

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \mathbf{R}_i \prod_{j=1}^{i-1} \frac{c_{j0}}{a_{j+1,0}} = \mathbf{0}$$

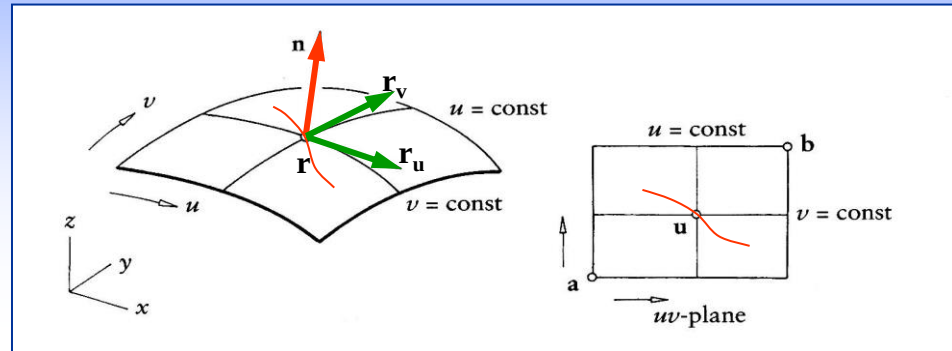
- ekkor viszont végtelen sok megoldás van !
- szerencsére $n=4$ esetén (X-node) létezik egyszerű konstrukció a twistek beállítására
- Tétel: a twist kompatibilitás elégséges feltétele, ha a görbeháló beágyazható egy C^2 felületbe

Parametrikus felületek₁

Felületi görbék:

$$u = u(t), v = v(t), t \in [t_1, t_2],$$

$$\mathbf{r}(u(t), v(t)) = \mathbf{r}(t)$$



Felületi görbesereg, normálmetszet :

$$n_c(\varphi) \parallel n_s \Rightarrow \kappa(\varphi)$$

Főgörbületek:

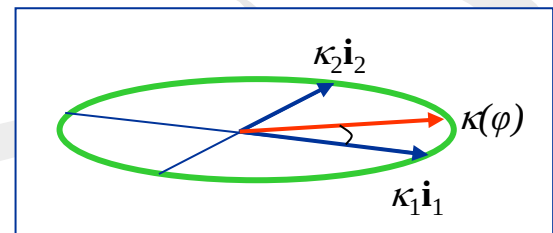
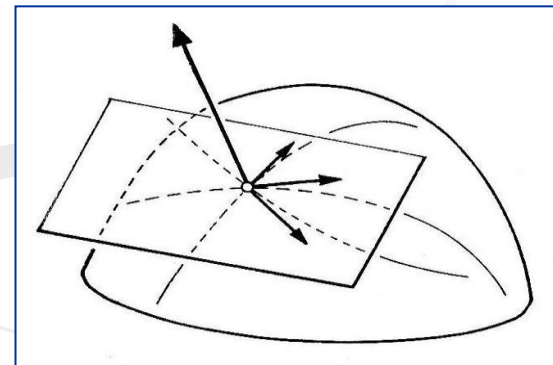
$$\kappa_1 = \kappa_{\min}, \kappa_2 = \kappa_{\max}$$

Főgörbületi irányok:

$$\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2 \quad \mathbf{i}_1 \perp \mathbf{i}_2$$

Euler-egyenlet:

$$\kappa(\varphi) = \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi$$



Parametrikus felületek₂

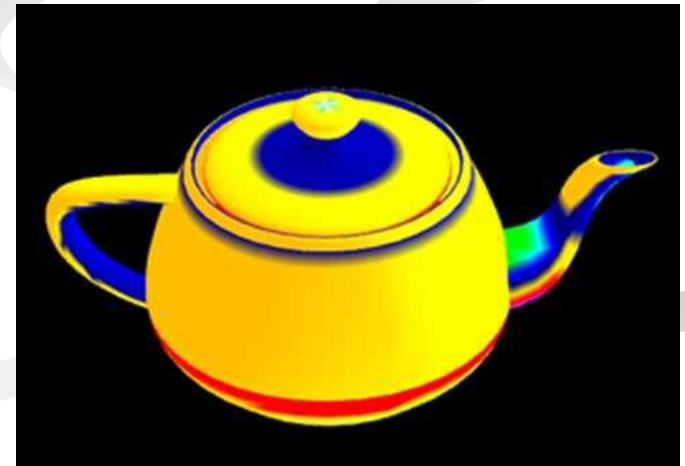
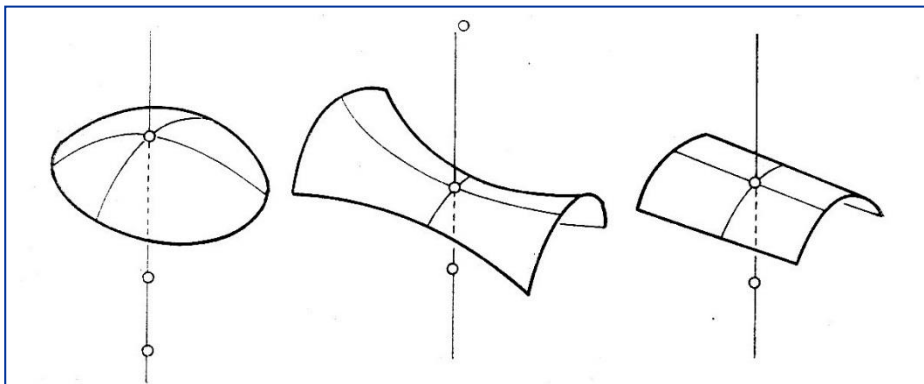
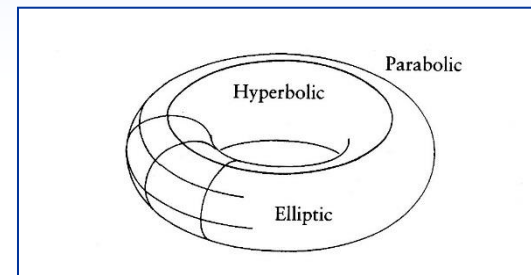
Gauss-(szorzat-) és átlaggörbületek: $G = \kappa_1 \kappa_2; M = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$

Felület pontok környezetének osztályozása:

$G > 0 \rightarrow$ elliptikus,

$G < 0 \rightarrow$ hiperbolikus,

$G = 0, (M \neq 0) \rightarrow$ parabolikus



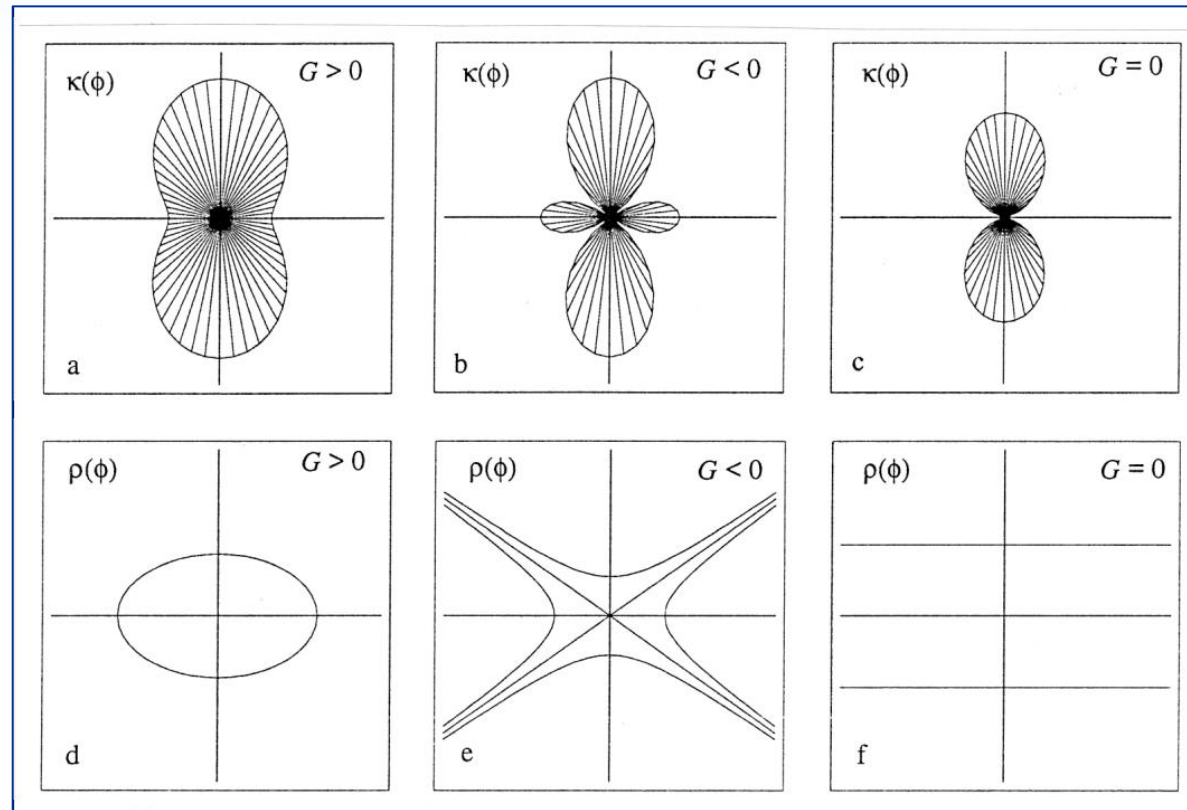
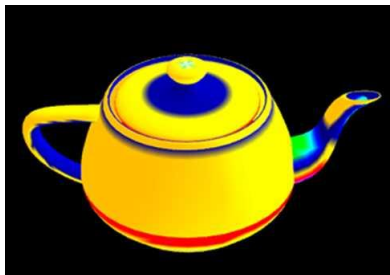
Parametrikus felületek₃

Euler egyenlet: $\kappa(\varphi) = \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi$

$$r = \sqrt{\rho}, \quad x = \sqrt{\rho} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{\rho} \sin \varphi$$

Dupin-indikátor (lokális kúpszelet): $\rho(\varphi) = \frac{1}{\kappa(\varphi)} \rightarrow \frac{x^2}{\rho_1} \pm \frac{y^2}{\rho_2} = 1$

Polárkoordináták:



Best-fit felületi görbület₁

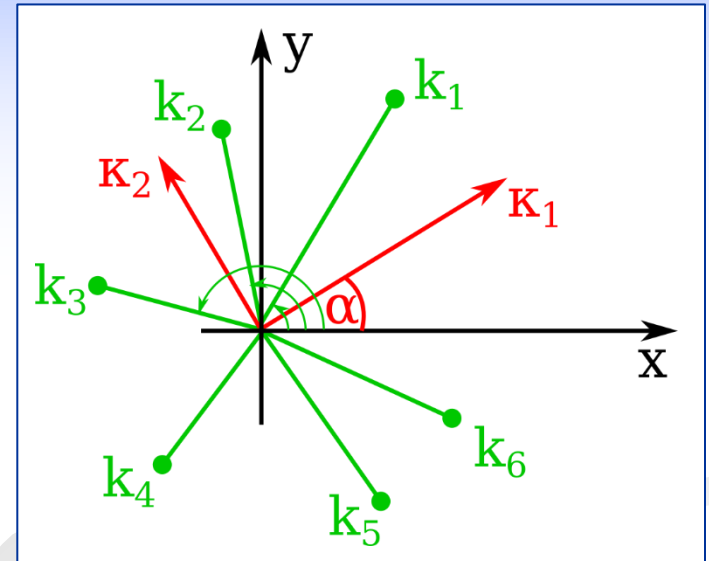
- adott n görbe, közös érintősík
- normál görbületek – k_i
- (x,y) koordináta rendszer: az induló tangensek elfordulási szöge - ω_i
- keressük a legjobban illeszkedő felületi görbületet

$$\kappa(\varphi) = \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi$$

$$\kappa(\omega_i - \alpha) = \kappa_1 \cos^2(\omega_i - \alpha) + \kappa_2 \sin^2(\omega_i - \alpha)$$

$$H(\kappa_1, \kappa_2, \alpha) = \sum_{i=1}^n (\kappa(\omega_i - \alpha) - k_i)^2 \rightarrow \min.$$

- „látszólag” komplex, nem-lineáris egyenletrendszer.....



Best-fit felületi görbület₂

- trigonometrikus átalakítások után

$$\kappa(\omega_i) = W_1 \cos^2 \omega_i + W_2 \sin^2 \omega_i + W_{12} \sin \omega_i \cos \omega_i$$

$$W_1 = \kappa_1 \cos^2 \alpha + \kappa_2 \sin^2 \alpha$$

$$W_2 = \kappa_1 \sin^2 \alpha + \kappa_2 \cos^2 \alpha$$

$$W_{12} = (\kappa_1 - \kappa_2) \sin \alpha \cos \alpha$$

- új minimalizálandó kifejezés

$$\hat{H}(W_1, W_2, W_{12}) = \sum_{i=1}^n (\kappa(\omega_i) - k_i)^2 \rightarrow \min.$$

- → lineáris egyenletrendszer

Best-fit felületi görbület₃

- W_1, W_2, W_{12} alapján $\kappa_1, \kappa_2, \alpha$ meghatározható
- legyen $s = \sin^2 \alpha$

$$\kappa_1 + (\kappa_2 - \kappa_1)s = W_1$$

$$\kappa_1 + (\kappa_2 - \kappa_1)(1-s) = W_2$$

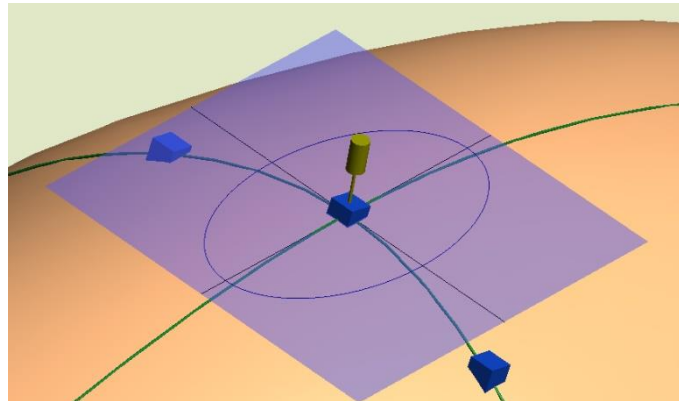
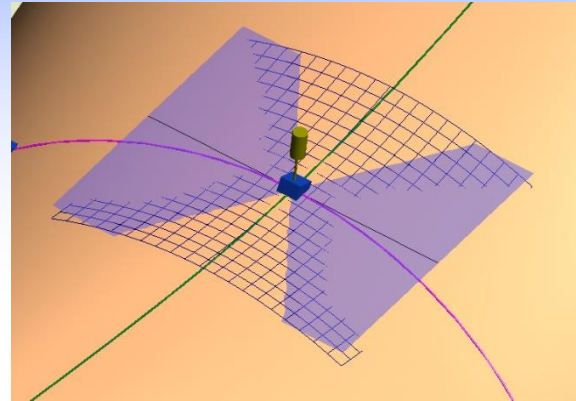
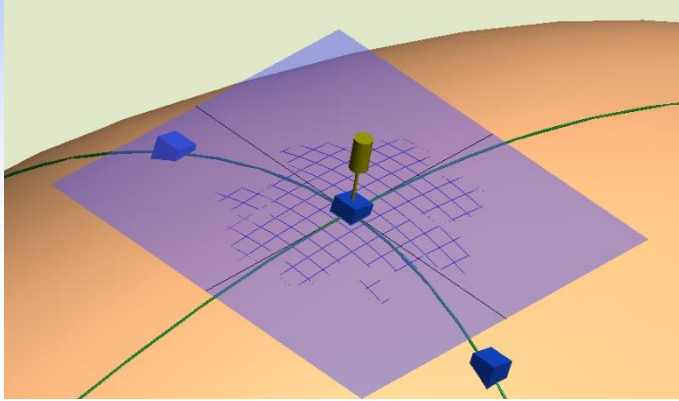
$$(\kappa_1 - \kappa_2)^2 s(1-s) = W_{12}^2$$

$$s = \frac{W_1 - \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1}; 1-s = \frac{W_2 - \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1};$$

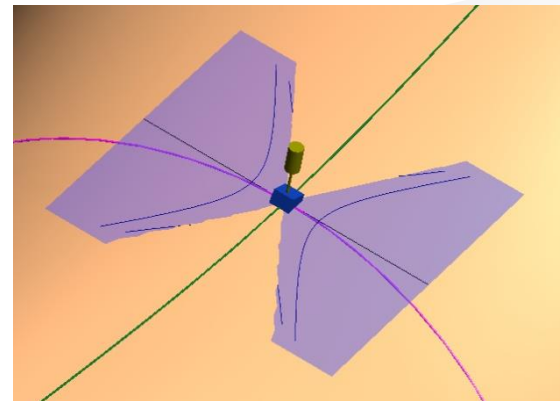
→ megoldás - másodfokú egyenlet κ_1 -re

- $n=2$ – alulhatározott: $\kappa(\omega_1) = k_1, \kappa(\omega_2) = k_2, \frac{1}{\kappa_1^2} + \frac{1}{\kappa_2^2} = \min.$
- $n=3$ – jól meghatározott
- $n>3$ – a görbét módosítani kell a közös G^2 érdekében: $k_i \rightarrow k_i^*$

Best-fit felületi görbület₄



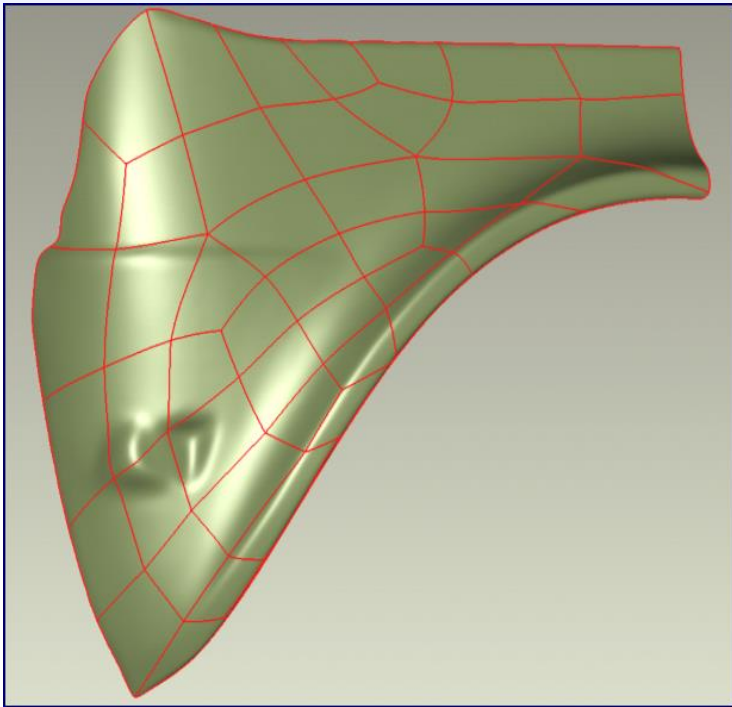
elliptikus görbület



hiperbolikus görbület

I. Alkalmazás

Geomagic Studio – reverse engineering

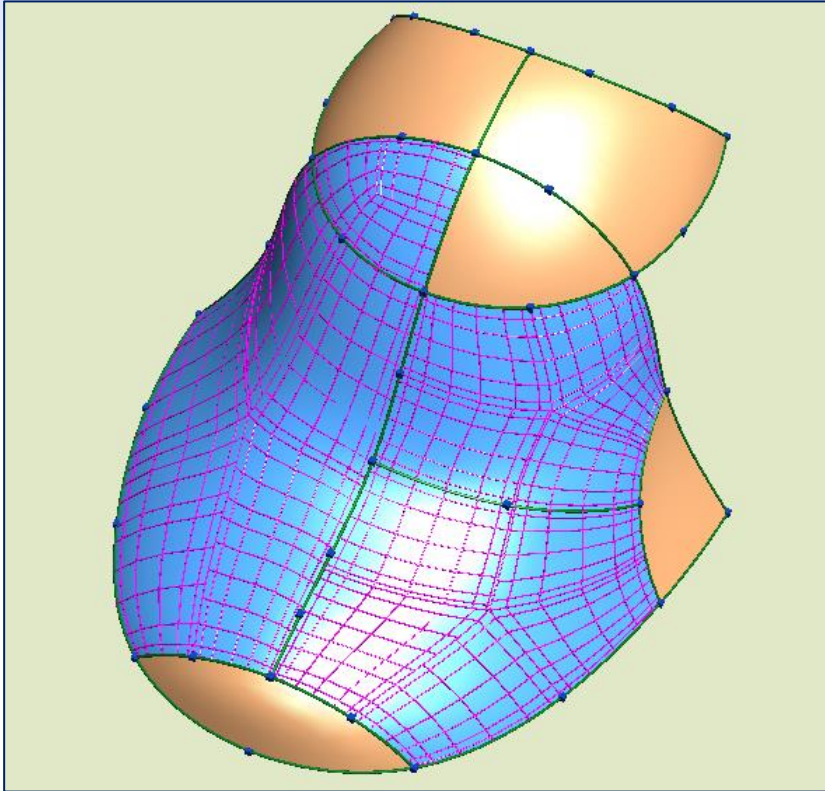


patch-ek száma ≈ 50

1. topológiai struktúra létrehozása
2. lokális felületi görbületek becslése a háromszögháló alapján
3. határgörbék létrehozása, amelyek illeszkednek a háromszögháléhoz és felületi görbületekhez
4. szomszédos keresztderivált függvénypárok meghatározása
5. a belső kontrollpontok számának „dúsítása” a megfelelően pontos approximáció érdekében

II. Alkalmazás

Sketches – görbeháló alapú tervezés → export



1. a kiinduló topológiai struktúra adott; utána „central split”
2. lokális felületi görbületek becslése a görbeháló alapján, néha - a görbék minimális „hangolása” a twist kompatibilitás érdekében
3. a határgörbék a görbehálóból és a felületelemek osztógörbéiből állnak elő
4. keresztderivált függvénpárok meghatározása
5. a belső kontrollpontok számának „dúsítása” a megfelelően pontos approximáció érdekében

III. Alkalmazás

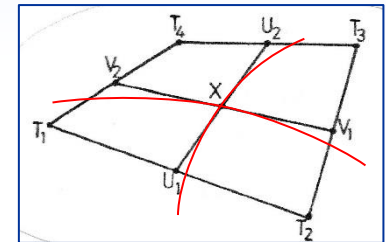
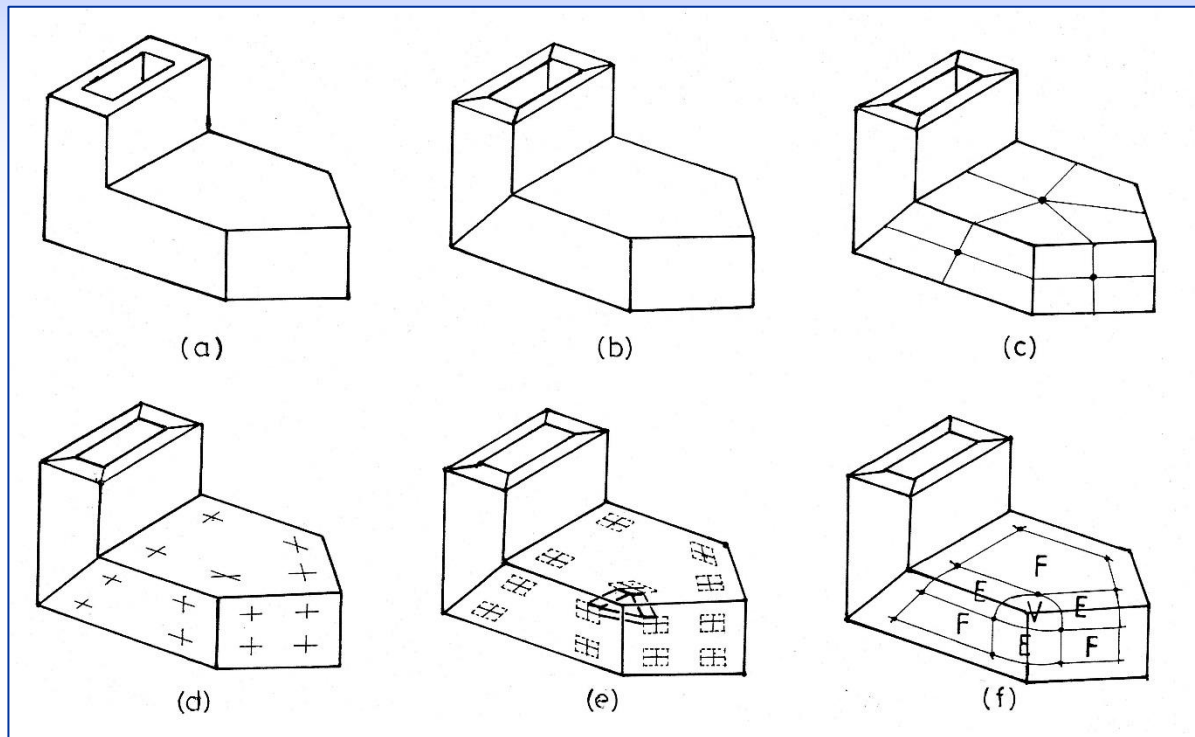
XSolid – poliéderek lekerekítése, illetve simítása



1. speciális topológiai struktúra létrehozása (konvex lapok)
2. „duális” objektum létrehozása
3. X-csúcsok, X-tangensek és X-twist vektorok definiálása különböző szabályok szerint
4. kompatibilis határgörbék és keresztderiváltak létrehozása
5. az n-oldalú lapok felosztása és kitöltése 4-oldalú lapokkal

XSolid₁

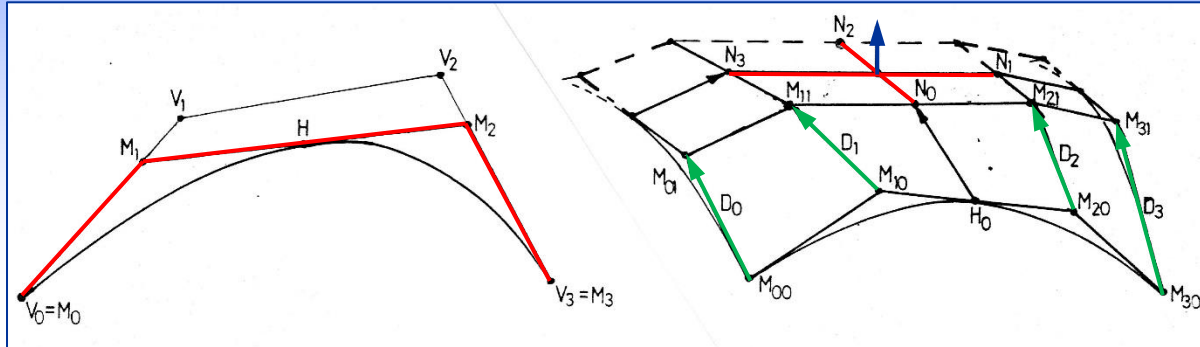
(Doo-Sabin alapú struktúra létrehozása)



(a) input poliéder, (b) konvex lapok, (c) duális objektum, (d) X-node-ok,
(e) X tangensek és twistek, (f) az X görbeháló struktúra létrehozása:

→ Face-lapok, Edge-lapok, Vertex-lapok

XSolid₂ - speciális kontroll struktúra



- a *three-chord* szegmens interpolálja a középső húr felezőpontját

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{V}_0, \mathbf{M}_1 = \frac{1}{4} \mathbf{V}_0 + \frac{3}{4} \mathbf{V}_1, \mathbf{M}_2 = \frac{3}{4} \mathbf{V}_2 + \frac{1}{4} \mathbf{V}_3, \mathbf{M}_3 = \mathbf{V}_3.$$

$$r(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{M}_i W_i(t),$$

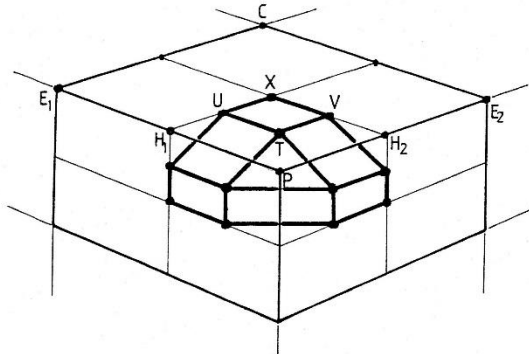
$$W_0(t) = (1-t)^3 - (1-t)^2, W_1(t) = 4(1-t)^2 t, W_2(t) = 4(1-t) t^2, W_3(t) = t^3 - (1-t) t^2.$$

- a *three-chord* patch interpolálja a középső négyszög középpontját

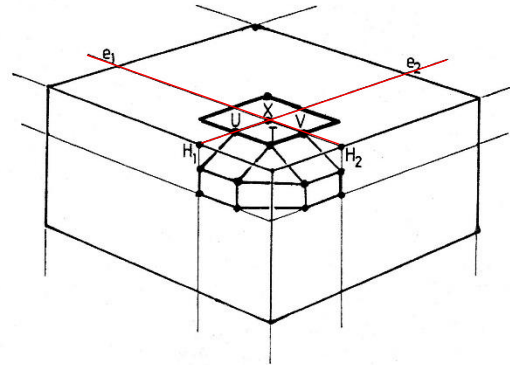
$$r(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \mathbf{M}_{ij} W_i(u) W_j(v), \mathbf{D}(u) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{D}_i W_i(u)$$

- a másodfokú és harmadfokú patch-ek egységes kezelése

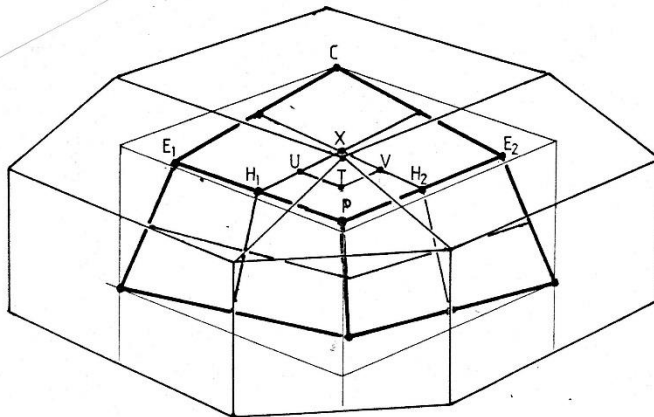
XSolid₃ – három konstrukció



1. quadratic blending



2. cubic blending



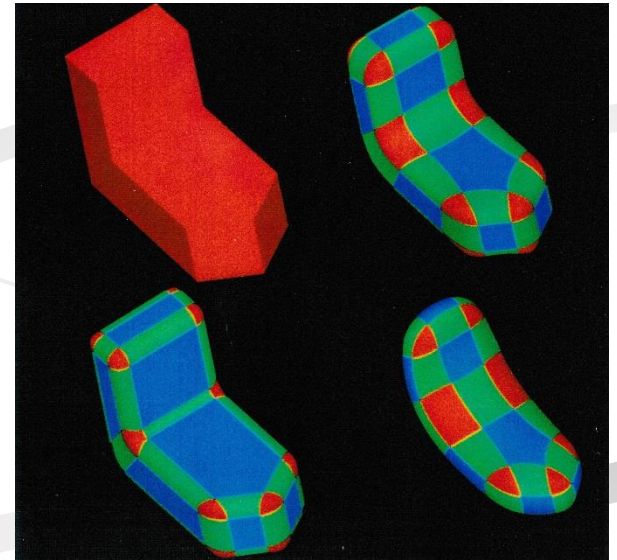
3. smoothing

$$X = 0.25(C + E_1 + P + E_2)$$

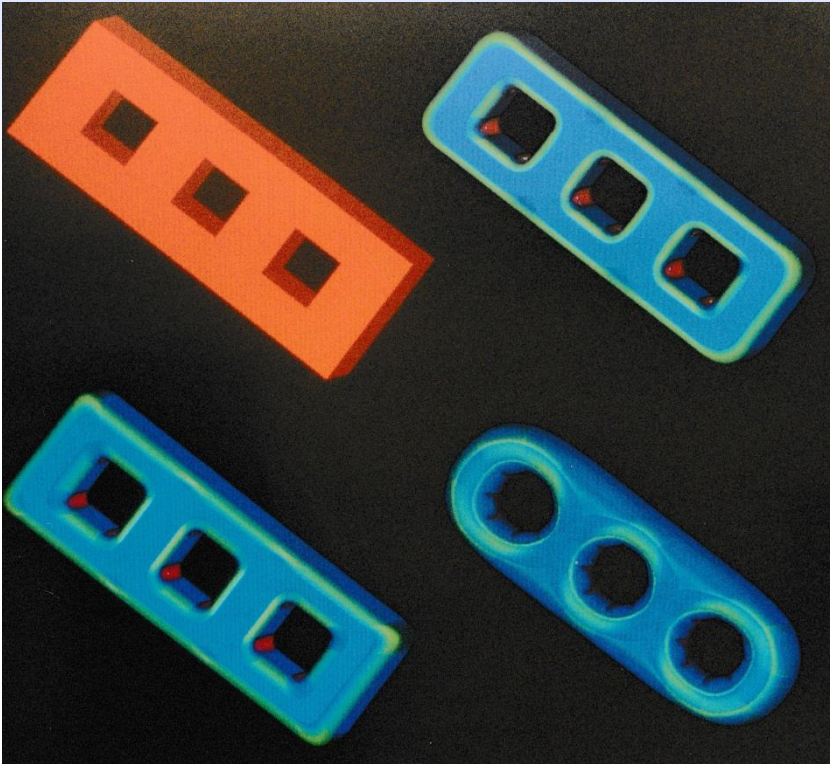
$$H_1 = 0.5(E_1 + P), H_2 = 0.5(E_2 + P)$$

$$U = 0.5(H_1 + X), V = 0.5(H_2 + X)$$

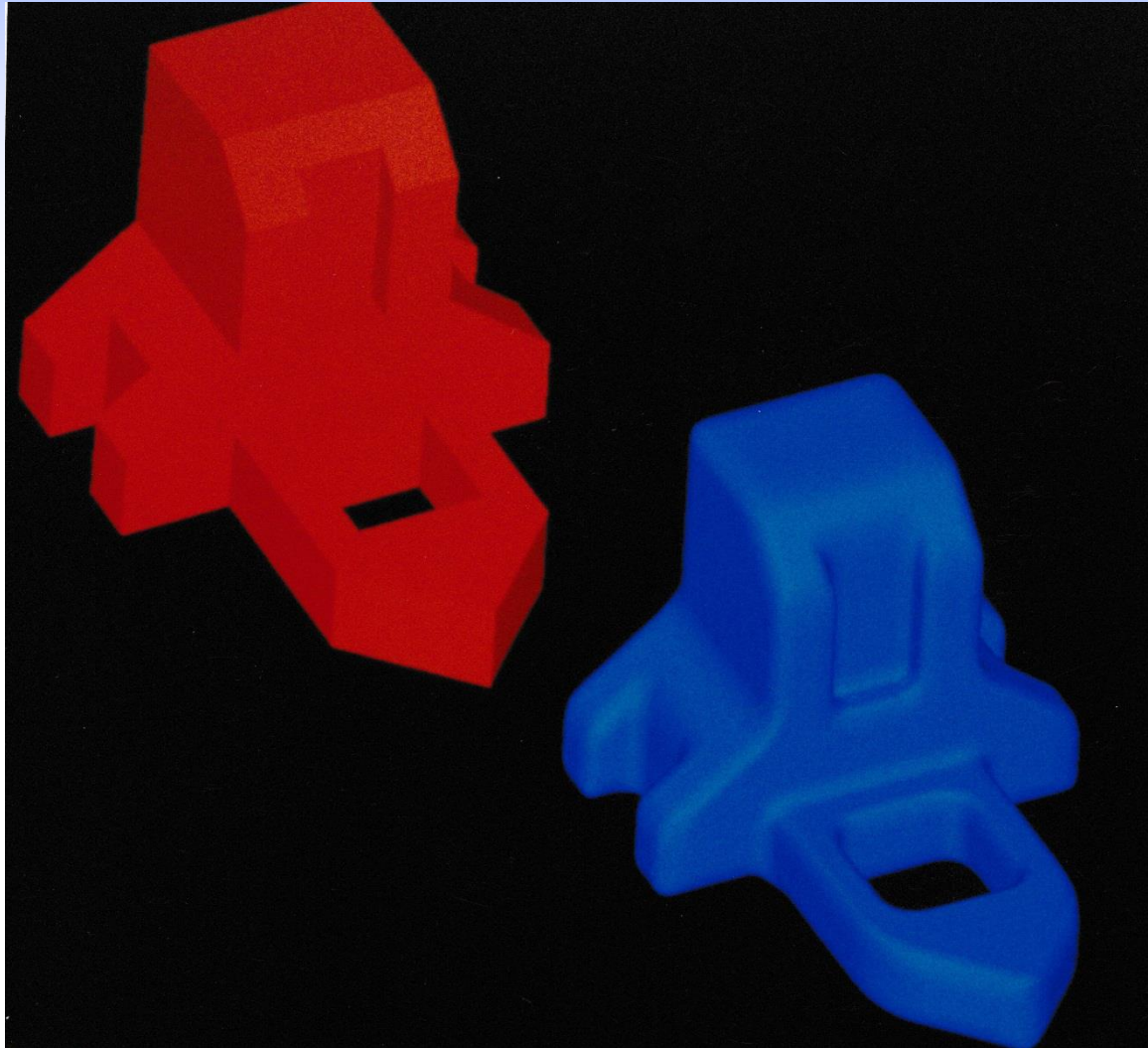
$$T = 0.25(X + H_1 + P + H_2)$$



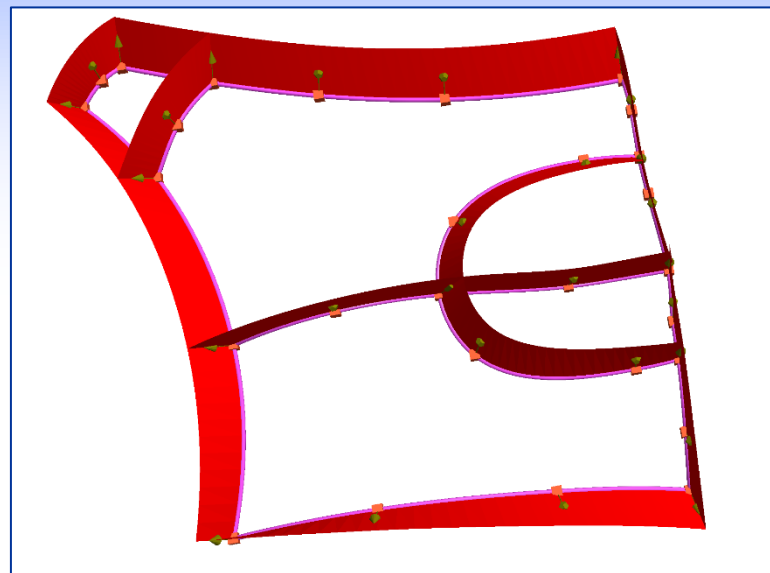
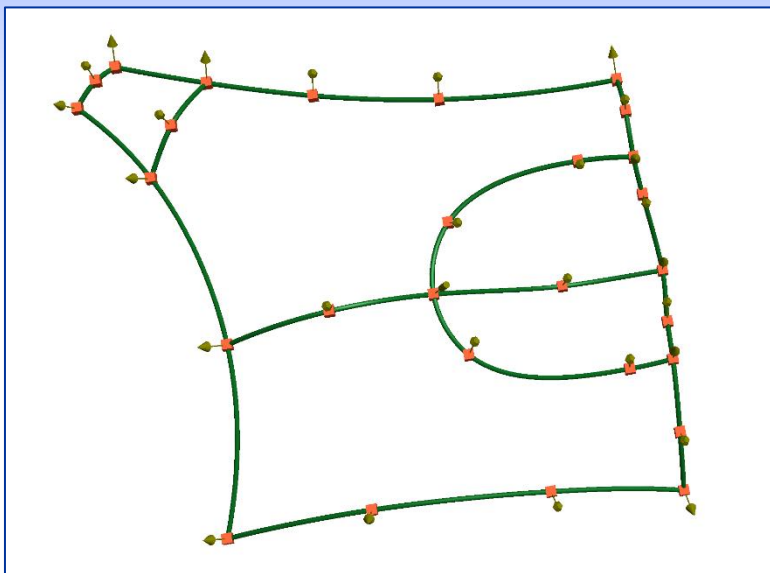
XSolid₄



XSolid₅



Görbehálózatok G^1 kapcsolódása₁



- a normálvektorok adottak a csúcsokban
- RMF (rotation minimizing frame) – minimalizálja a felületi normális elfordulását

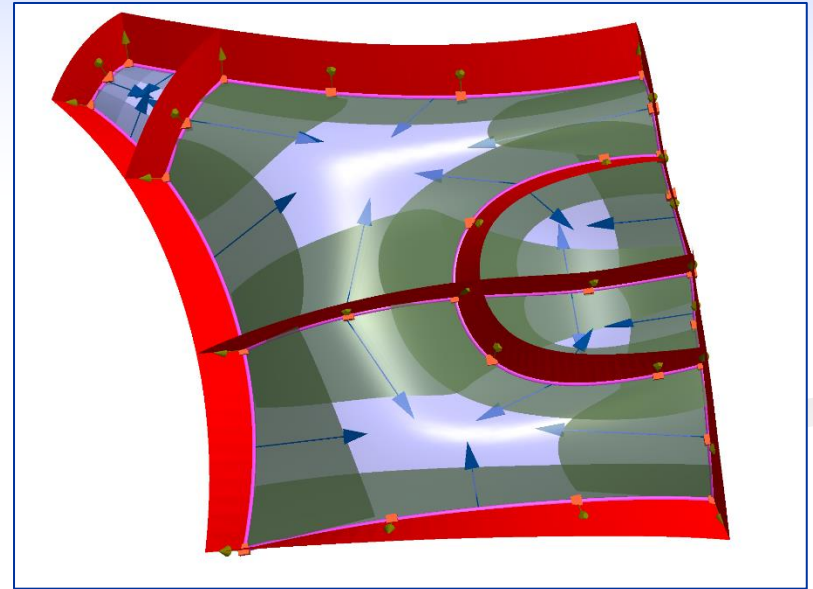
Görbehálózatok G^1 kapcsolódása₂

- a ribbonokat az RMF határozza meg, közös irányblend:

$$D(s) = R_s(s,0) \times N_{RMF}(s)$$

- skalár szorzó függvények:

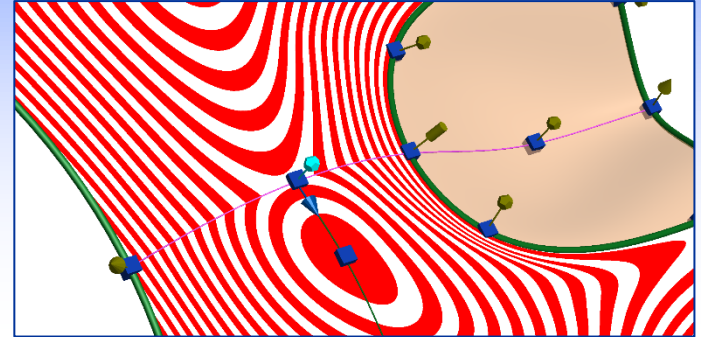
$$R_h(s,0) = \alpha(s)D(s) + \beta(s)R_h(s,0)$$



- a G^1 folytonosság teljesül, ha mindkét oldal illeszkedik az RMF-hez

Görbehálózatok G^1 kapcsolódása₃

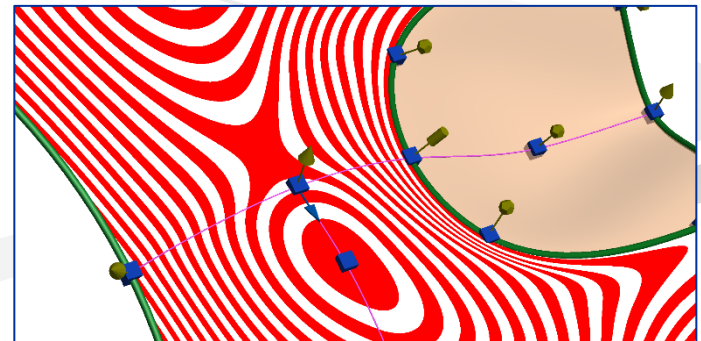
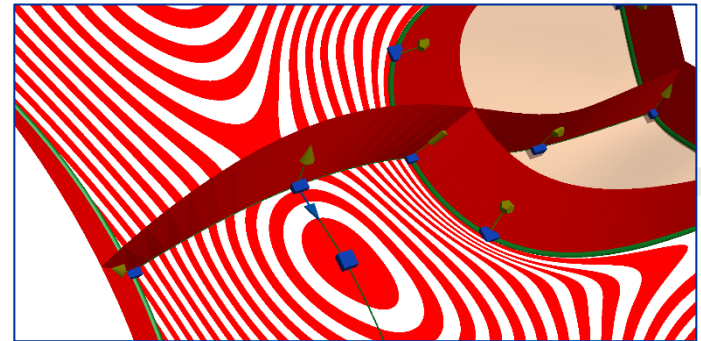
- T-node-oknál a G^1 általában nem teljesül



- Lehetőségek:

(i) a keresztgörbe tangens vektora legyen merőleges az adott RMF-re

(ii) az RMF illeszkedjen a keresztgörbe tangenséhez



Bézier felületek₁

- Felületegyenlet:

$$s(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m c_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$$

- $v=0$ határgörbe: $s(u, 0) = \sum_{i=0}^n c_{i0} B_i^n(u)$

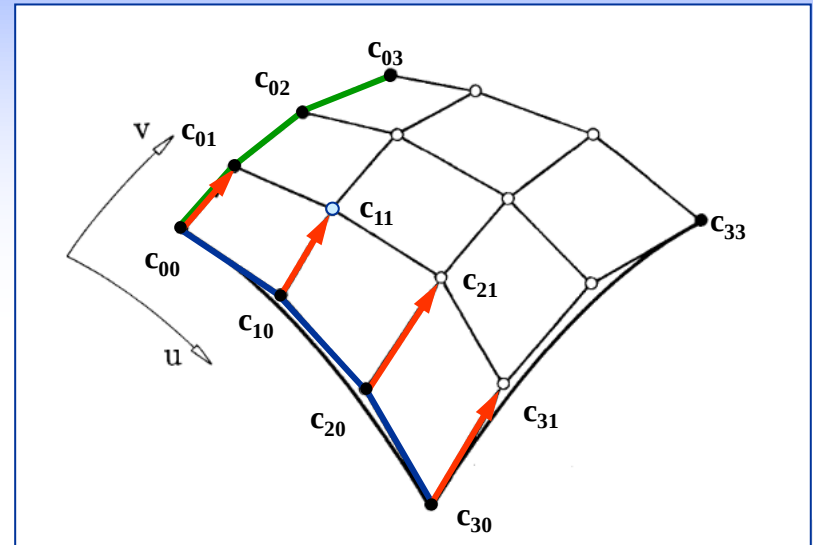
- u és v (kereszt-) deriváltak:

$$\dot{s}_u(u, 0) = n \sum_{i=0}^{n-1} (c_{i+1,0} - c_{i0}) B_i^{n-1}(u)$$

$$\dot{s}_v(u, 0) = m \sum_{i=0}^n (c_{i1} - c_{i0}) B_i^n(u)$$

- $v=0$ határgörbe, normál vektor:

$$N(u, 0) = \dot{s}_u(u, 0) \times \dot{s}_v(u, 0)$$



c_{00}

$$c_{10} = c_{00} + \frac{1}{n} T_u$$

$$c_{01} = c_{00} + \frac{1}{m} T_v$$

$$c_{11} = c_{00} + \frac{1}{n} T_u + \frac{1}{m} T_v + \frac{1}{nm} T_{uv}$$

Bézier felületek₂

- G^1 folytonosság szomszédos felületekre:

$$\mathbf{s}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{c}_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v),$$

$$\mathbf{p}(u, w) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^l \mathbf{d}_{ik} B_i^n(u) B_k^l(w)$$

a) $\mathbf{c}_{i0} = \mathbf{d}_{i0}, (\mathbf{c}_{i1} - \mathbf{c}_{i0}) = \alpha(\mathbf{d}_{i1} - \mathbf{d}_{i0}), i = 0, \dots, n$

b) $\mathbf{s}(u, 0) = \mathbf{p}(u, 0), \quad \mathbf{N}_1(u, 0) \parallel \mathbf{N}_2(u, 0), u \in [0, 1]$

$$\alpha(u) \dot{\mathbf{s}}_u(u, 0) + \beta(u) \dot{\mathbf{s}}_v(u, 0) = \gamma(u) \dot{\mathbf{p}}_w(u, 0)$$

