

Négyszögháló-generálás

Vaitkus Márton

3D Számítógépes Geometria 2 (2016)

Miről lesz szó

- 1 Bevezetés
 - Motiváció, Alkalmazások
 - Négyszöghálók tulajdonságai
- 2 Paraméterezés-alapú Módszerek
 - Alapötlet
 - Paraméterezés Szingularitásokkal
 - Paraméterezés Iránymezők Segítségével
- 3 Vektormező-generálás
 - Matematikai alapok
 - Mezőgenerálás Fix Szingularitásokkal
 - Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal
- 4 Strukturált Hálógenerálás

1 Bevezetés

- Motiváció, Alkalmazások
- Négyszöghálók tulajdonságai

2 Paraméterezés-alapú Módszerek

- Alapötlet
- Paraméterezés Szingularitásokkal
- Paraméterezés Iránymezők Segítségével

3 Vektormező-generálás

- Matematikai alapok
- Mezőgenerálás Fix Szingularitásokkal
- Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal

4 Strukturált Hálógenerálás

1 Bevezetés

- Motiváció, Alkalmazások
- Négyszöghálók tulajdonságai

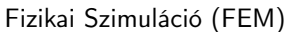
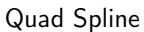
2 Paraméterezés-alapú Módszerek

- Alapötlet
- Paraméterezés Szingularitásokkal
- Paraméterezés Iránymezők Segítségével

3 Vektormező-generálás

- Matematikai alapok
- Mezőgenerálás Fix Szingularitásokkal
- Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal

4 Strukturált Hálógenerálás



1 Bevezetés

- Motiváció, Alkalmazások
- Négyszöghálók tulajdonságai

2 Paraméterezés-alapú Módszerek

- Alapötlet
- Paraméterezés Szingularitásokkal
- Paraméterezés Iránymezők Segítségével

3 Vektormező-generálás

- Matematikai alapok
- Mezőgenerálás Fix Szingularitásokkal
- Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal

4 Strukturált Hálógenerálás

Négyszögháló Tulajdonságai

- Négyszögháló: két kitüntetett irány (főgörbületek)

Négyszöghálók Tulajdonságai

- Négyszögháló: két kitüntetett irány (főgörbületek)
- Természetes lokális $u - v$ paraméterezés (tenzor-szorzat)

Négyszöghálók Tulajdonságai

- Négyszögháló: két kitüntetett irány (főgörbületek)
- Természetes lokális $u - v$ paraméterezés (tenzor-szorzat)
- Négyszögek nem kötelezően síklapúak!

Négyszöghálók Tulajdonságai

- Négyszögháló: két kitüntetett irány (főgörbületek)
- Természetes lokális $u - v$ paraméterezés (tenzor-szorzat)
- Négyszögek nem kötelezően síklapúak!
- Ideális négyszögháló:
 - Szabályos (vegyérték = 4)

Négyszöghálók Tulajdonságai

- Négyszögháló: két kitüntetett irány (főgörbületek)
- Természetes lokális $u - v$ paraméterezés (tenzor-szorzat)
- Négyszögek nem kötelezően síklapúak!
- Ideális négyszögháló:
 - Szabályos (vegyérték = 4)
 - Síklapú

Négyszöghálók Tulajdonságai

- Négyszögháló: két kitüntetett irány (főgörbületek)
- Természetes lokális $u - v$ paraméterezés (tenzor-szorzat)
- Négyszögek nem kötelezően síklapúak!
- Ideális négyszögháló:
 - Szabályos (vegyérték = 4)
 - Síklapú
 - Derékszögű

Négyszöghálók Tulajdonságai

- Négyszögháló: két kitüntetett irány (főgörbületek)
- Természetes lokális $u - v$ paraméterezés (tenzor-szorzat)
- Négyszögek nem kötelezően síklapúak!
- Ideális négyszögháló:
 - Szabályos (vegyérték = 4)
 - Síklapú
 - Derékszögű
 - Követi a görbületi irányokat

Négyszöghálók Tulajdonságai

- Négyszögháló: két kitüntetett irány (főgörbületek)
- Természetes lokális $u - v$ paraméterezés (tenzor-szorzat)
- Négyszögek nem kötelezően síklapúak!
- Ideális négyszögháló:
 - Szabályos (vegyérték = 4)
 - Síklapú
 - Derékszögű
 - Követi a görbületi irányokat
 - Oldalak aránya = főgörbületek aránya (legjobb approximáció)

Négyszöghálók Tulajdonságai

- Négyszögháló: két kitüntetett irány (főgörbületek)
- Természetes lokális $u - v$ paraméterezés (tenzor-szorzat)
- Négyszögek nem kötelezően síklapúak!
- Ideális négyszögháló:
 - Szabályos (vegyérték = 4)
 - Síklapú
 - Derékszögű
 - Követi a görbületi irányokat
 - Oldalak aránya = főgörbületek aránya (legjobb approximáció)
- Általában nem teljesíthető egyidőben!

Topológia

- Topológia – Folytonos deformáció során nem változik



Genus 0

$$\chi = 2$$



Genus 1

$$\chi = 0$$



Genus 2

$$\chi = -2$$



Genus 3

$$\chi = -4$$

Topológia

- Topológia – Folytonos deformáció során nem változik
- Tetszőleges cellafelbontásra – **Euler-szám**:

$$\chi(M) = V - E + F$$



Genus 0

$$\chi = 2$$



Genus 1

$$\chi = 0$$



Genus 2

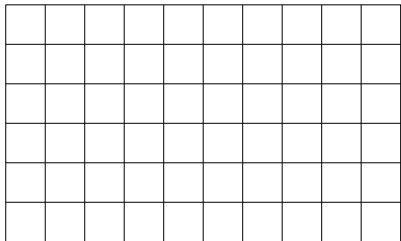
$$\chi = -2$$



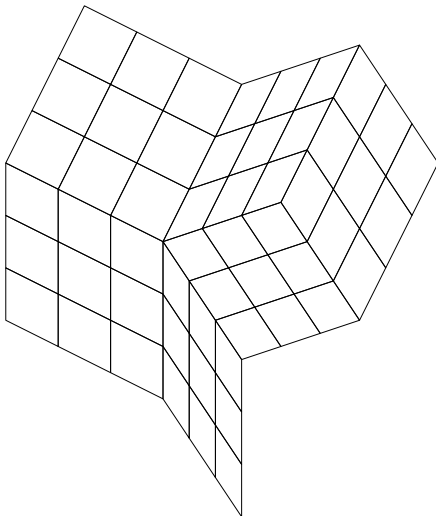
Genus 3

$$\chi = -4$$

Négyszöghálók Tulajdonságai - Topológia



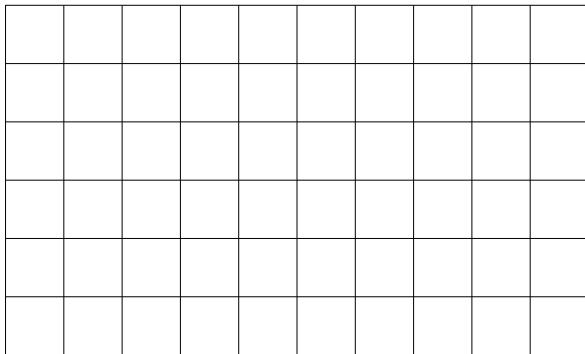
Szabályos Négyszögháló



Szabálytalan Négyszögháló

Újjgyakorlat

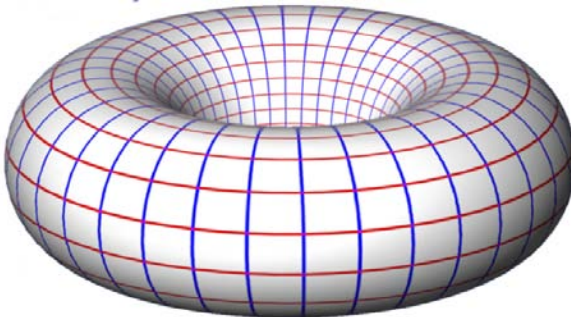
Szabályos négyszögháló zárt felületen – Euler-szám: $V - E + F = \dots$



Újjgyakorlat

Szabályos négyszögháló zárt felületen – Euler-szám: $V - E + F = 0$!

Szabályos négyszögháló csak tóruszon!



- 1 Bevezetés
 - Motiváció, Alkalmazások
 - Négyzöghálók tulajdonságai
- 2 Paraméterezés-alapú Módszerek
 - Alapötlet
 - Paraméterezés Szingularitásokkal
 - Paraméterezés Iránymezők Segítségével
- 3 Vektormező-generálás
 - Matematikai alapok
 - Mezőgenerálás Fix Szingularitásokkal
 - Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal
- 4 Strukturált Hálógenerálás

1

Bevezetés

- Motiváció, Alkalmazások
- Négyszöghálók tulajdonságai

2

Paraméterezés-alapú Módszerek

- Alapötlet
- Paraméterezés Szingularitásokkal
- Paraméterezés Iránymezők Segítségével

3

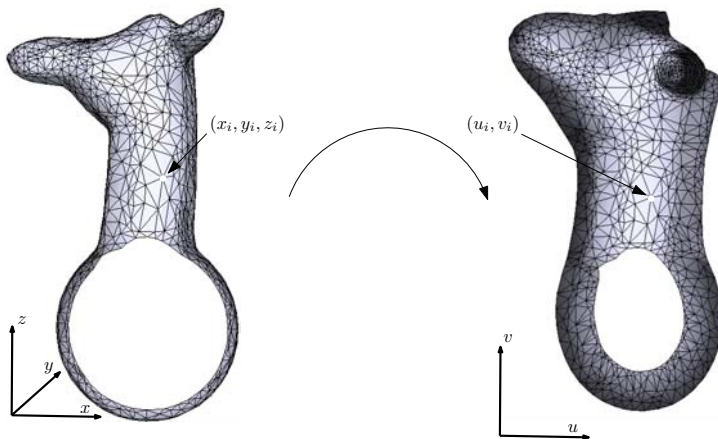
Vektormező-generálás

- Matematikai alapok
- Mezőgenerálás Fix Szingularitásokkal
- Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal

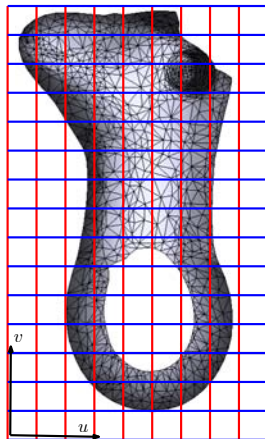
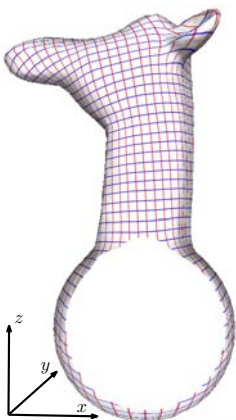
4

Strukturált Hálógenerálás

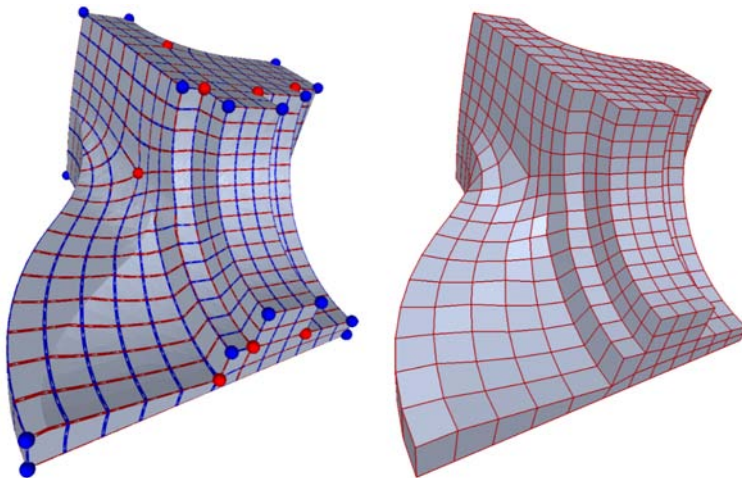
Paraméterezés-alapú Módszerek – Alapötlet



Paraméterezés-alapú Módszerek – Alapötlet

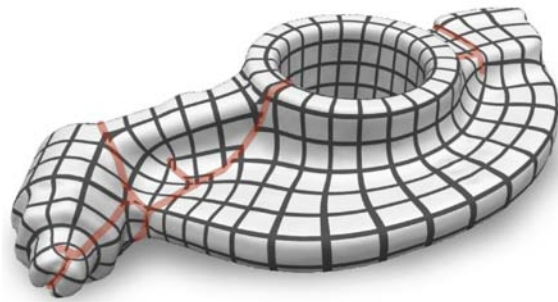


Paraméterezés-alapú Módszerek – Alapötlet

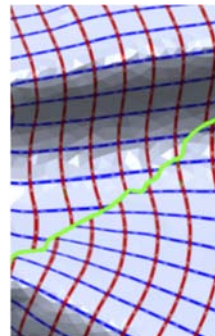


Forras: [Bommes-Zimmer-Kobbelt, 2009]

Zárt felületek?



[Campen-Kobbelt, 2015]



[Campen, 2016]

- 1 Bevezetés
 - Motiváció, Alkalmazások
 - Négyszöghálók tulajdonságai
- 2 Paraméterezés-alapú Módszerek
 - Alapötlet
 - Paraméterezés Szingularitásokkal
 - Paraméterezés Iránymezők Segítségével
- 3 Vektormező-generálás
 - Matematikai alapok
 - Mezőgenerálás Fix Szingularitásokkal
 - Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal
- 4 Strukturált Hálógenerálás

Paraméterezés Szingularitásokkal

- Zárt felületek
síkbaterítése?

Paraméterezés Szingularitásokkal

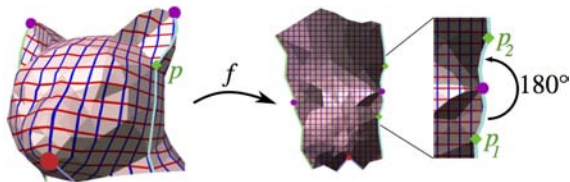
- Zárt felületek
síkbaterítése?
- Felvágás egy diszkké –
eredmény függ a
vágástól...

Paraméterezés Szingularitásokkal

- Zárt felületek síkbaterítése?
- Felvágás egy diszkké – eredmény függ a vágástól...
- Észrevétel: Nem különböztetjük meg a $\pm u$ és $\pm v$ irányokat

Paraméterezés Szingularitásokkal

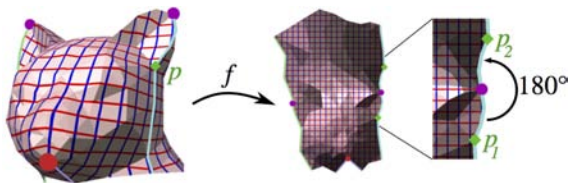
- Zárt felületek síkbaterítése?
- Felvágás egy diszkké – eredmény függ a vágástól...
- Észrevétel: Nem különböztetjük meg a $\pm u$ és $\pm v$ irányokat
- Különleges csúcsok – **kúppontok (szingularitások)** $k \cdot 90$ fokos hajlásszöggel



[Myles-Zorin, 2012]

Paraméterezés Szingularitásokkal

- Zárt felületek síkbaterítése?
- Felvágás egy diszkké – eredmény függ a vágástól...
- Észrevétel: Nem különböztetjük meg a $\pm u$ és $\pm v$ irányokat
- Különleges csúcsok – **kúppontok (szingularitások)** $k \cdot 90$ fokos hajlásszöggel
- Szingularitásokon keresztul felvágva a háló síkbateríthető

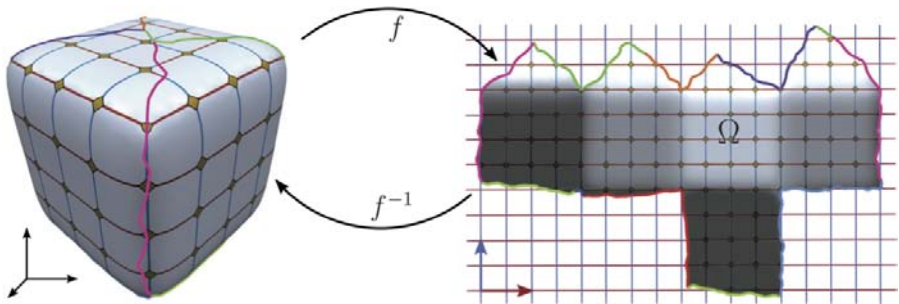


[Myles-Zorin, 2012]



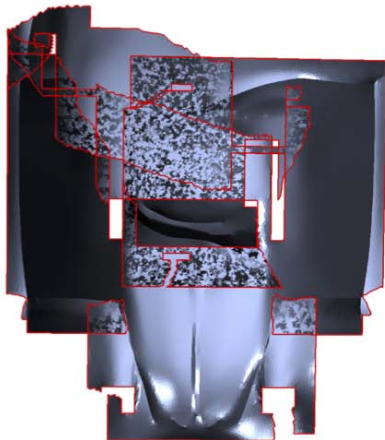
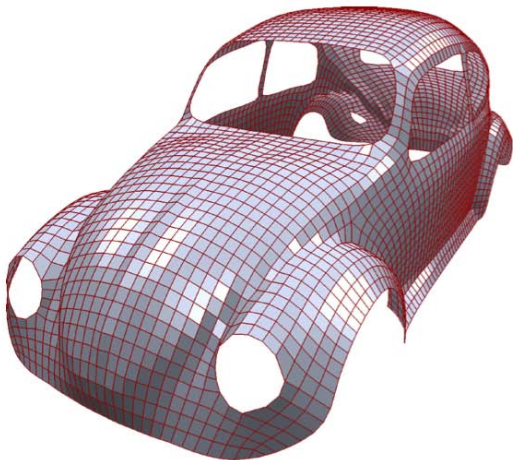
[Kharevych et al., 2006]

Paraméterezés Szingularitásokkal



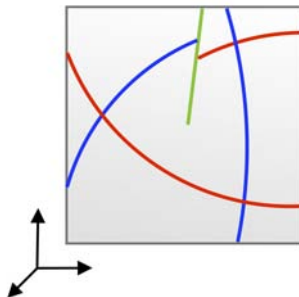
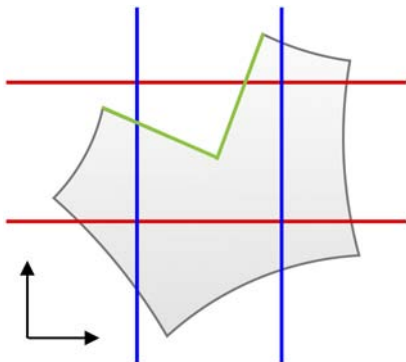
Forras: [Bommes et al., 2013]

Paraméterezés Szingularitásokkal



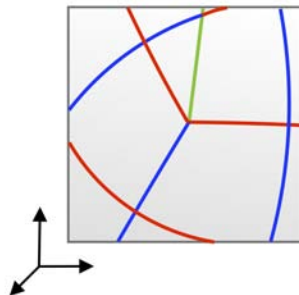
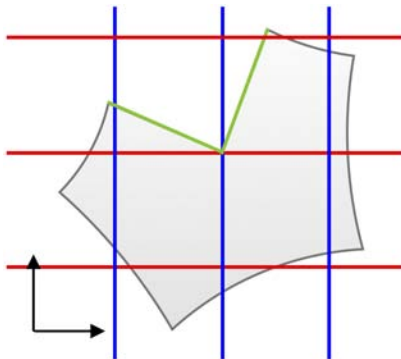
Forras: [Bommes-Zimmer-Kobbelt, 2009]

Szingularitások?



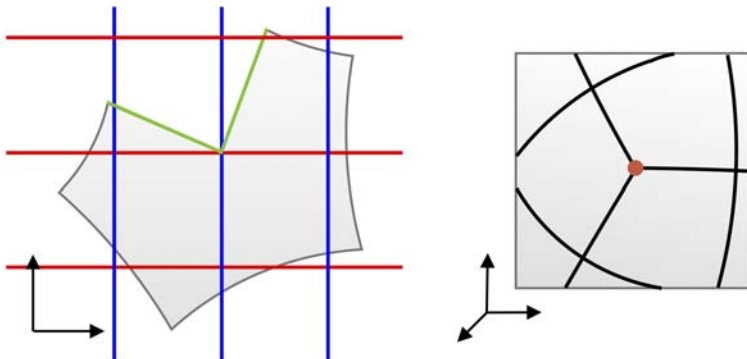
Forras: [Campen, 2016]

Szingularitások?



Forras: [Campen, 2016]

Szingularitások?



Forras: [Campen, 2016]

Szingularitások

- Koordinátavonalak négyszöghálót alkotnak – Szingularitások egész $u - v$ koordinátájú pontokra kell, hogy essenek!

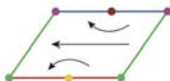
Szingularitások

- Koordinátavonalak négyzöghálót alkotnak – Szingularitások egész $u - v$ koordinátájú pontokra kell, hogy essenek!
- Legegyszerűbb megoldás: kerekítés (a legközelebbi rácspontra)!

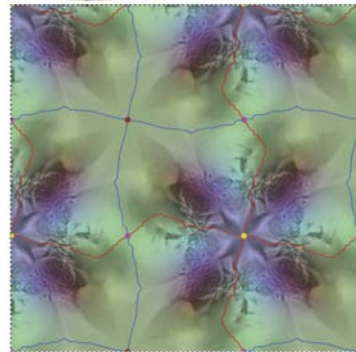
Szingularitások

- Koordinátavonalak négyzöghálót alkotnak – Szingularitások egész $u - v$ koordinátájú pontokra kell, hogy essenek!
- Legegyszerűbb megoldás: kerekítés (a legközelebbi rácspontra)!
- Egyéb megoldások: mixed-integer optimalizálás, diofantoszi egyenletmegoldás, ...

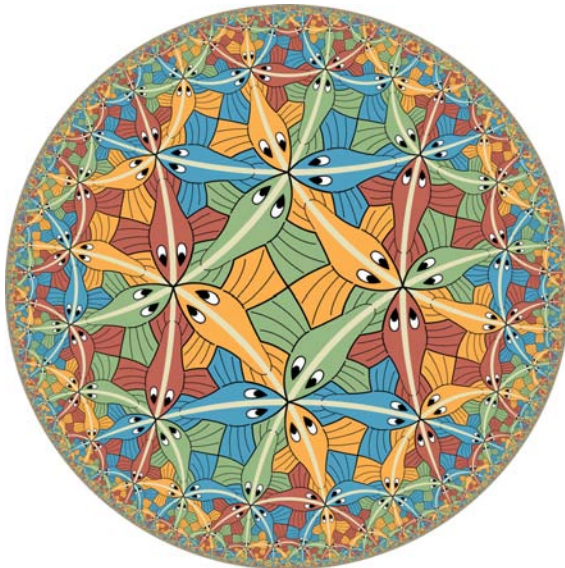
Zárt Felületek Paraméterezése – Csempézés



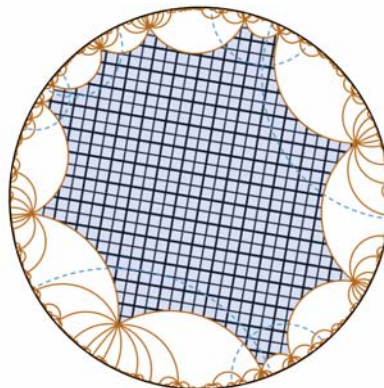
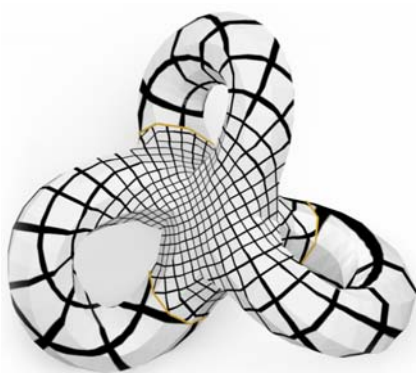
Forras: [Aigerman-Lipman, 2015]



Hiperbolikus Sik

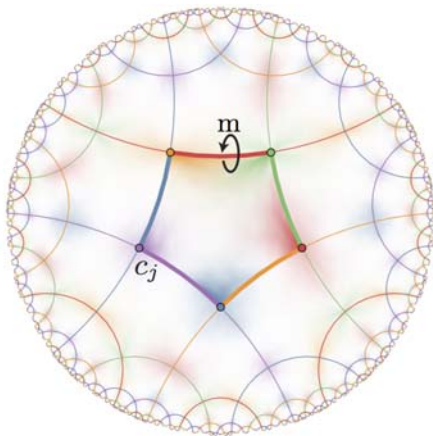
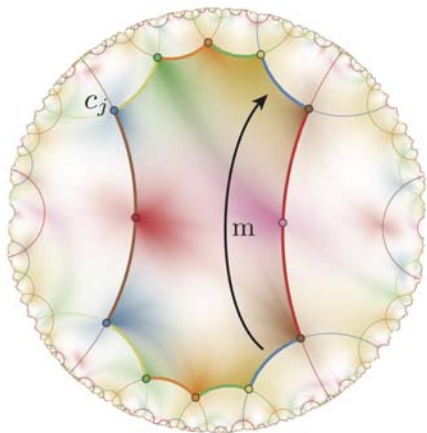


Zárt Felületek Paraméterezése – Multi-Genus



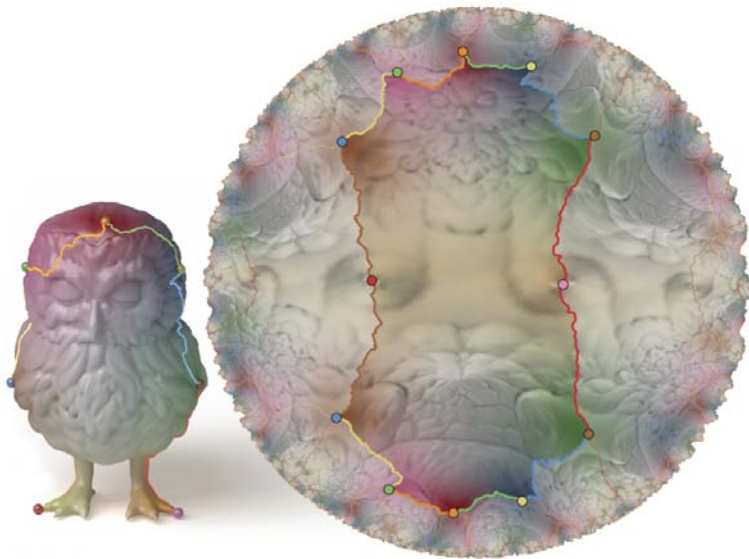
Forras: [Sechelmann, 2016]

Zárt Felületek Paraméterezése – Hiperbolikus Csempézés



Forras: [Aigerman-Lipman, 2016]

Zárt Felületek Paraméterezése – Hiperbolikus Csempézés



1

Bevezetés

- Motiváció, Alkalmazások
- Négyszöghálók tulajdonságai

2

Paraméterezés-alapú Módszerek

- Alapötlet
- Paraméterezés Szingularitásokkal
- Paraméterezés Iránymezők Segítségével

3

Vektormező-generálás

- Matematikai alapok
- Mezőgenerálás Fix Szingularitásokkal
- Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal

4

Strukturált Hálógenerálás

Paraméterezés Iránymezők Segítségével – Alapötlet



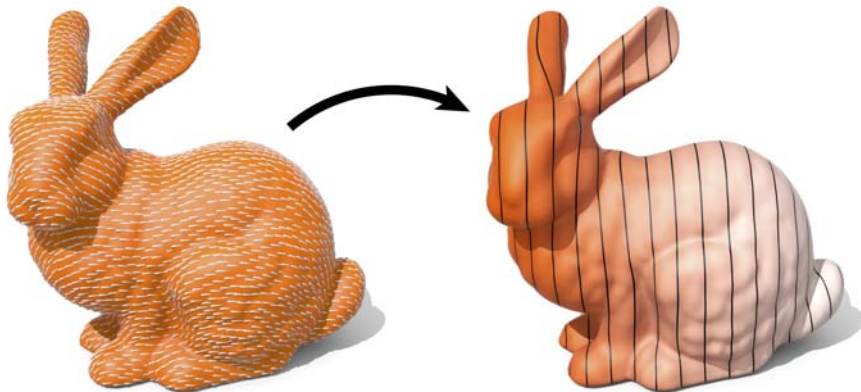
Forras: [Crane, 2015]

Paraméterezés Iránymezők Segítségével – Alapötlet



Forras: [Crane, 2015]

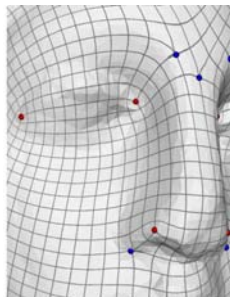
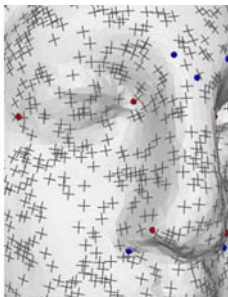
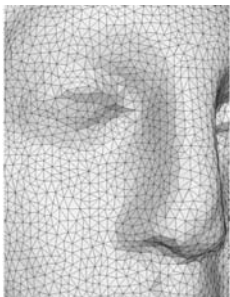
Paraméterezés Iránymezők Segítségével – Alapötlet



Forras: [Crane, 2015]

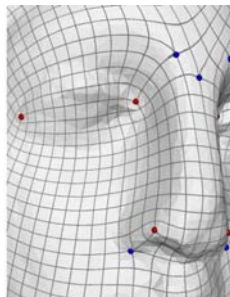
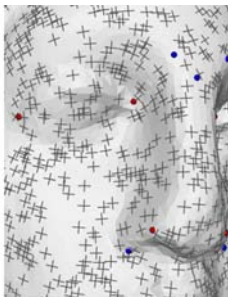
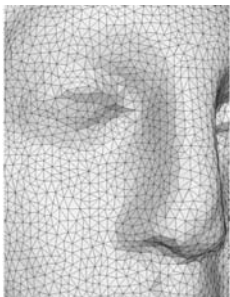
Keresztmezők és Iránymezők

- u és v vonalakat nem különböztetjük meg – iránymező helyett **keresztmezőt** keresünk



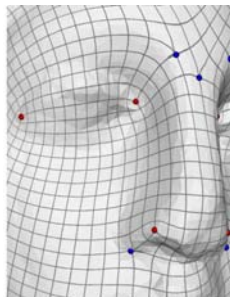
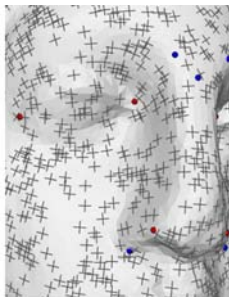
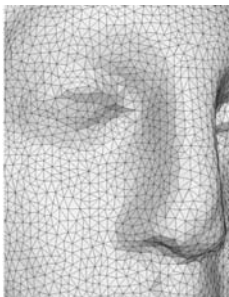
Keresztmezők és Iránymezők

- u és v vonalakat nem különböztetjük meg – iránymező helyett **keresztmezőt** keresünk
- Vágjuk fel a hálót szingularitásokon keresztül



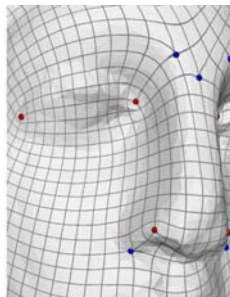
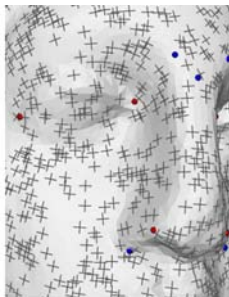
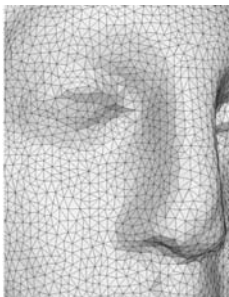
Keresztmezők és Iránymezők

- u és v vonalakat nem különböztetjük meg – iránymező helyett **keresztmezőt** keresünk
- Vágjuk fel a hálót szingularitásokon keresztül
- Tetszőleges háromszögben jelöljük ki a mező két szomszédos vektorát mint $u - v$ irányokat



Keresztmezők és Iránymezők

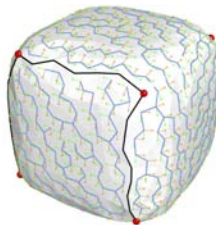
- u és v vonalakat nem különböztetjük meg – iránymező helyett **keresztmezőt** keresünk
- Vágjuk fel a hálót szingularitásokon keresztül
- Tetszőleges háromszögben jelöljük ki a mező két szomszédos vektorát mint $u - v$ irányokat
- Az irányokat terjesszük tovább egy feszítőfa mentén – iránymezők az u - és v -koordinátákhoz



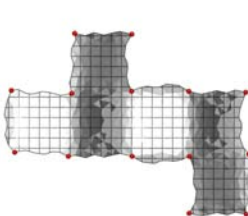
Paraméterezés Iránymezőkkel [Razafindrazaka, 2015]



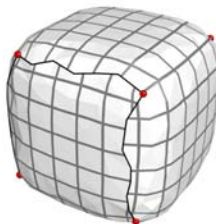
Input frame field



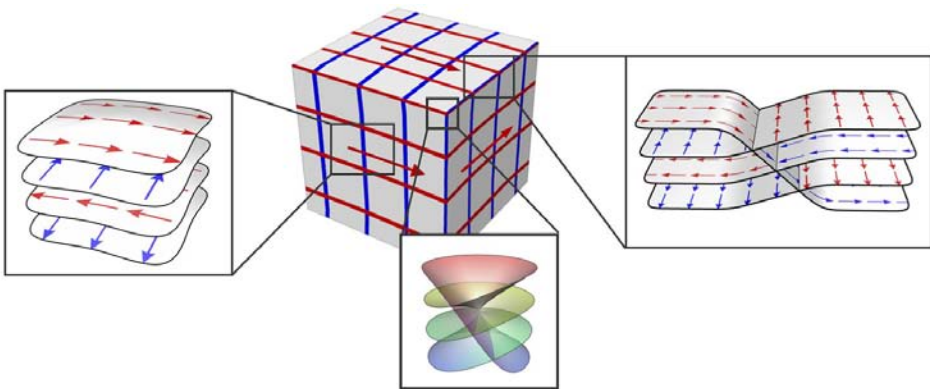
Cut Paths and Spanning Tree



Poisson Parameterization



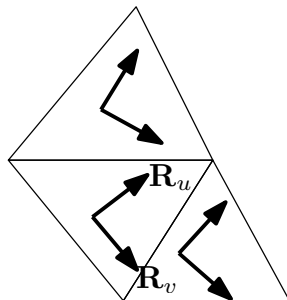
Keresztmezők és Iránymezők – Szemlélet



Forras: [Polthier-Razafindrazaka, 2015]

Paraméterezés Iránymezők Alapjan – Poisson-egyenlet!

- Adottak R_u és R_v iránymezők

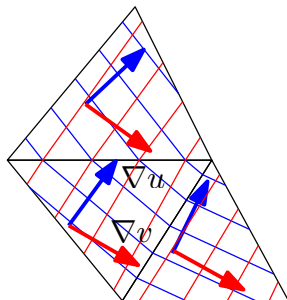


Paraméterezés Iránymezők Alapjan – Poisson-egyenlet!

- Adottak $\mathbf{R}_u$ és $\mathbf{R}_v$ iránymezők
- Gradiens-illesztés:

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} \|h_u \nabla u - \mathbf{R}_u\|^2 + \|h_v \nabla v - \mathbf{R}_v\|^2 \rightarrow \min.$$

h_u, h_v -vel a négyszögek méretét írhatjuk elő



Paraméterezés Iránymezők Alapjan – Poisson-egyenlet!

- Adottak $\mathbf{R}_u$ és $\mathbf{R}_v$ iránymezők
- Gradiens-illesztés:**

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} \|h_u \nabla u - \mathbf{R}_u\|^2 + \|h_v \nabla v - \mathbf{R}_v\|^2 \rightarrow \min.$$

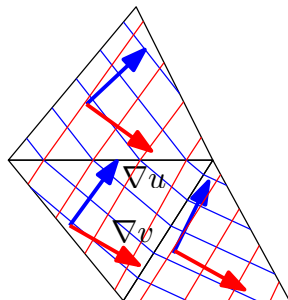
h_u, h_v -vel a négyszögek méretét írhatjuk elő

- Poisson-egyenletek:

$$\Delta u = b_u$$

$$\Delta v = b_v$$

(kotangens Laplace-matrix)



Paraméterezés Iránymezők Alapjan – Poisson-egyenlet!

- Adottak $\mathbf{R}_u$ és $\mathbf{R}_v$ iránymezők
- Gradiens-illesztés:**

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} \|h_u \nabla u - \mathbf{R}_u\|^2 + \|h_v \nabla v - \mathbf{R}_v\|^2 \rightarrow \min.$$

h_u, h_v -vel a négyszögek méretét írhatjuk elő

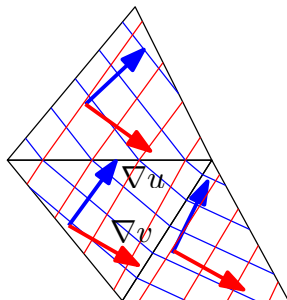
- Poisson-egyenletek:

$$\Delta u = b_u$$

$$\Delta v = b_v$$

(kotangens Laplace-matrix)

- Kenyszerek:



Paraméterezés Iránymezők Alapjan – Poisson-egyenlet!

- Adottak R_u és R_v iránymezők
- Gradiens-illesztés:

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} \|h_u \nabla u - R_u\|^2 + \|h_v \nabla v - R_v\|^2 \rightarrow \min.$$

h_u, h_v -vel a négyszögek méretét írhatjuk elő

- Poisson-egyenletek:

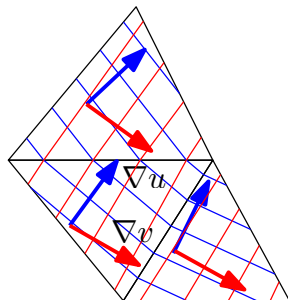
$$\Delta u = b_u$$

$$\Delta v = b_v$$

(kotangens Laplace-matrix)

- Kenyszerek:

- Szingularitások: $u_{s_i} \in \mathbb{Z}, v_{s_i} \in \mathbb{Z}$



Paraméterezés Iránymezők Alapjan – Poisson-egyenlet!

- Adottak $\mathbf{R}_u$ és $\mathbf{R}_v$ iránymezők
- Gradiens-illesztés:

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} \|h_u \nabla u - \mathbf{R}_u\|^2 + \|h_v \nabla v - \mathbf{R}_v\|^2 \rightarrow \min.$$

h_u, h_v -vel a négyszögek méretét írhatjuk elő

- Poisson-egyenletek:

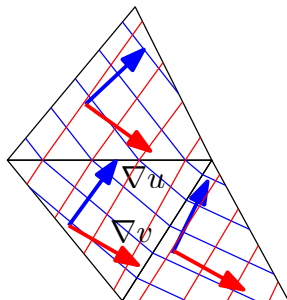
$$\Delta u = b_u$$

$$\Delta v = b_v$$

(kotangens Laplace-matrix)

- Kenyszerek:

- Szingularitások: $u_{s_i} \in \mathbb{Z}, v_{s_i} \in \mathbb{Z}$
- Vágások mentén: $\mathbf{p}_i = \text{Rot}_{90}^i \mathbf{p}'_i$

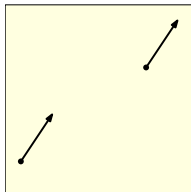


- 1 Bevezetés
 - Motiváció, Alkalmazások
 - Négyszöghálók tulajdonságai
- 2 Paraméterezés-alapú Módszerek
 - Alapötlet
 - Paraméterezés Szingularitásokkal
 - Paraméterezés Iránymezők Segítségével
- 3 Vektormező-generálás
 - Matematikai alapok
 - Mezőgenerálás Fix Szingularitásokkal
 - Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal
- 4 Strukturált Hálógenerálás

- 1 Bevezetés
 - Motiváció, Alkalmazások
 - Négyszöghálók tulajdonságai
- 2 Paraméterezés-alapú Módszerek
 - Alapötlet
 - Paraméterezés Szingularitásokkal
 - Paraméterezés Iránymezők Segítségével
- 3 Vektormező-generálás
 - **Matematikai alapok**
 - Mezőgenerálás Fix Szingularitásokkal
 - Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal
- 4 Strukturált Hálógenerálás

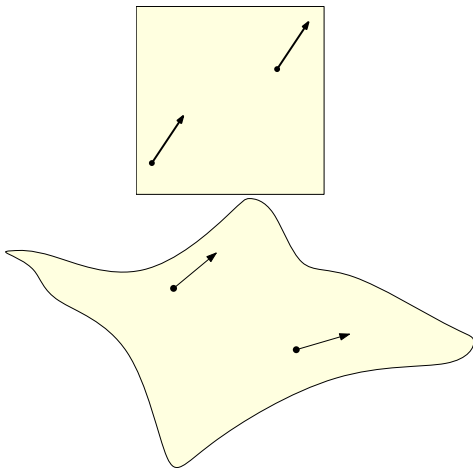
Párhuzamos Eltolás

- Vektor **párhuzamos eltolása** a felületen



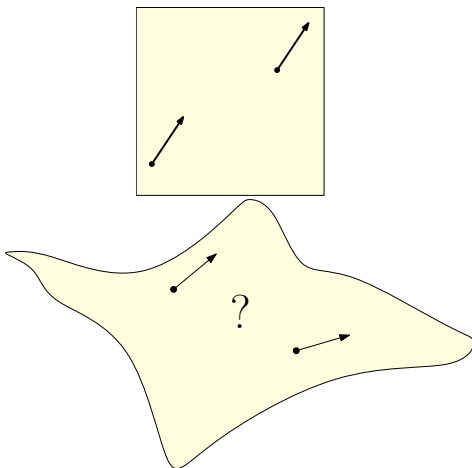
Párhuzamos Eltolás

- Vektor **párhuzamos** eltolása a felületen
- A síkon triviális...



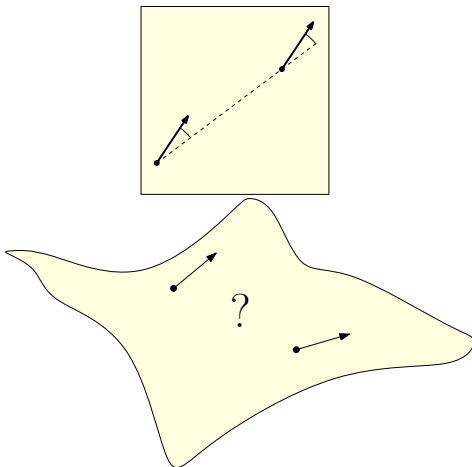
Párhuzamos Eltolás

- Vektor **párhuzamos** eltolása a felületen
- A síkon triviális...
- ... felületen nem egyértelmű



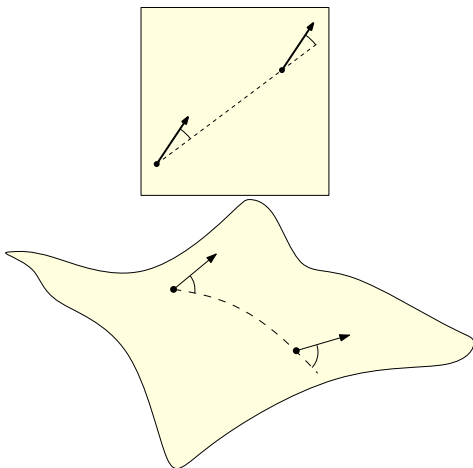
Párhuzamos Eltolás

- Vektor **párhuzamos eltolása** a felületen
- A síkon triviális...
- ... felületen nem egyértelmű
- Ötlet: Geodetikussal bezárt szög ugyanaz



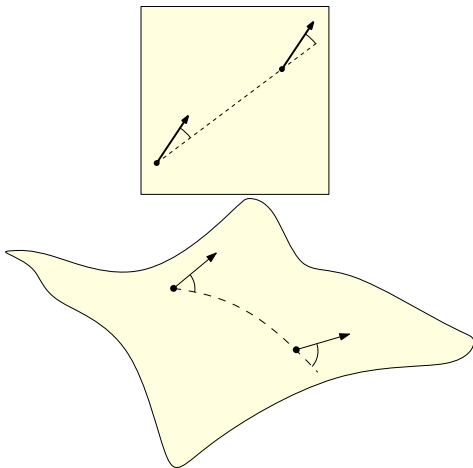
Párhuzamos Eltolás

- Vektor **párhuzamos eltolása** a felületen
- A síkon triviális...
- ... felületen nem egyértelmű
- Ötlet: Geodetikussal bezárt szög ugyanaz

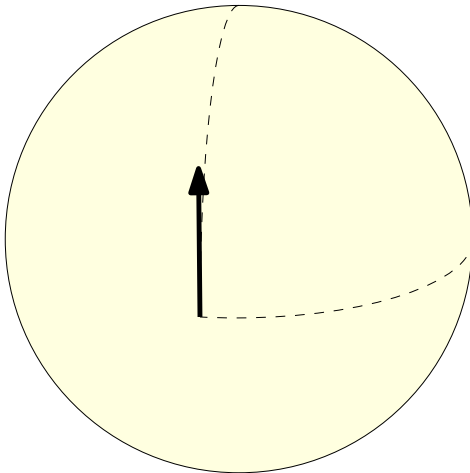


Párhuzamos Eltolás

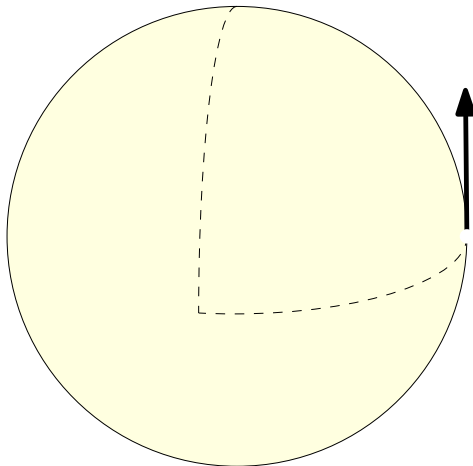
- Vektor **párhuzamos eltolása** a felületen
- A síkon triviális...
- ... felületen nem egyértelmű
- Ötlet: Geodetikussal bezárt szög ugyanaz
- Példa: vektor eltolása gömbön



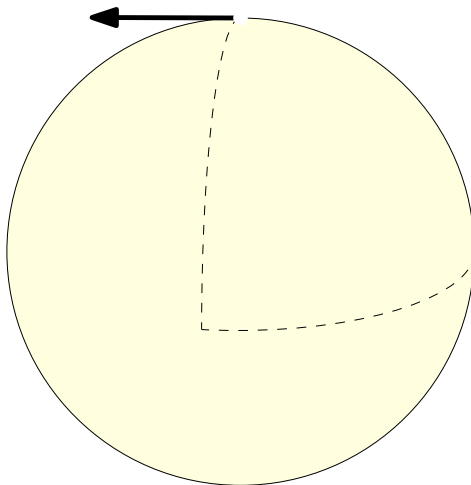
Párhuzamos Eltolás a Gömbön



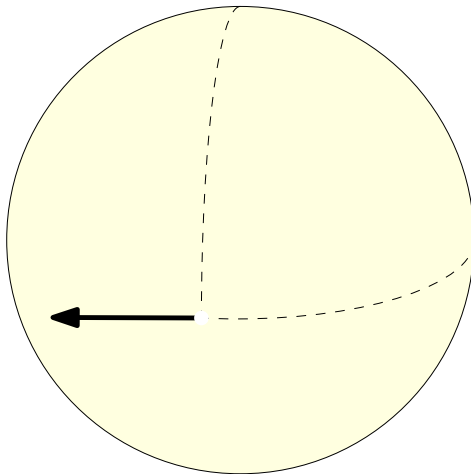
Párhuzamos Eltolás a Gömbön



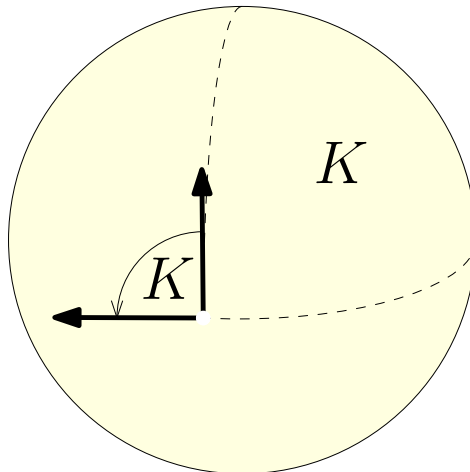
Párhuzamos Eltolás a Gömbön



Párhuzamos Eltolás a Gömbön

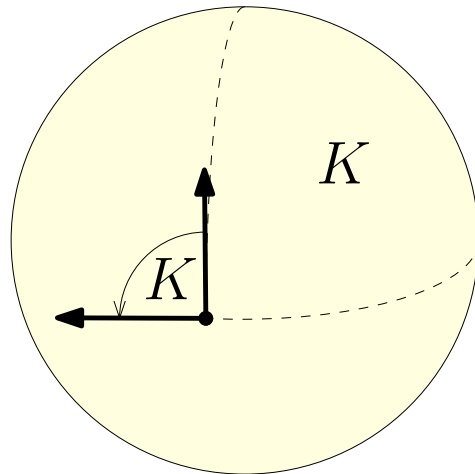


Párhuzamos Eltolás a Gömbön



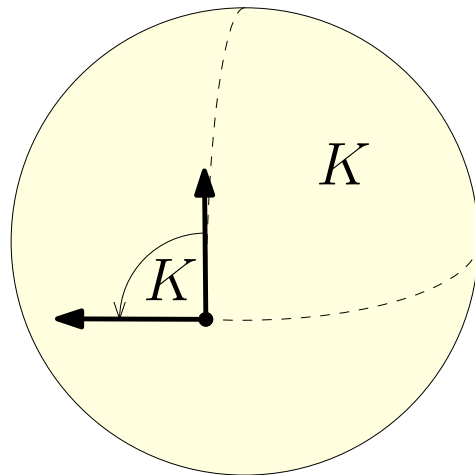
Görbület

- Vektor elfordult! – **Görbület**



Görbület

- Vektor elfordult! – **Görbület**
- Pontbeli (gaussi) görbület is értelmezhető ilyen módon



Gauss-Bonnet tétel

- "Görbületmegmaradás tétele"

Gauss-Bonnet tétel

- "Görbületmegmaradás tétele"
- Felület összgörbülete konstans - a topológia (Euler-szám) függvénye:

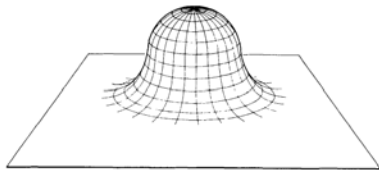
$$\int_{\Omega} K dA = 2\pi\chi(\Omega)$$

Gauss-Bonnet tétel

- "Görbületmegmaradás tétele"
- Felület összgörbülete konstans - a topológia (Euler-szám) függvénye:

$$\int_{\Omega} K dA = 2\pi\chi(\Omega)$$

- Egyik pontban növelem a görbületet – máshol csökkentenem kell!



Forrás: [Weeks, 2002]

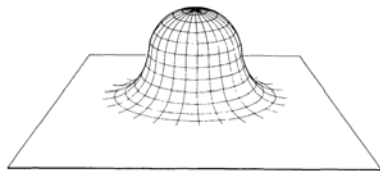
Gauss-Bonnet tétel

- "Görbületmegmaradás tétele"
- Felület összgörbülete konstans - a topológia (Euler-szám) függvénye:

$$\int_{\Omega} K dA = 2\pi\chi(\Omega)$$

- Egyik pontban növelem a görbületet – máshol csökkentenem kell!
- Határgörbék (geodetikus) görbülete is beleszámít:

$$\int_{\Omega} K dA + \int_{\partial\Omega} \kappa_g dl = 2\pi\chi(\Omega)$$



Forrás: [Weeks, 2002]

Gauss-Bonnet tétel

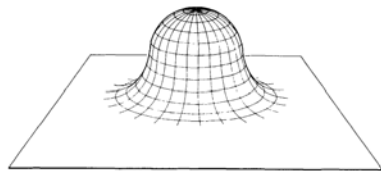
- "Görbületmegmaradás tétele"
- Felület összgörbülete konstans - a topológia (Euler-szám) függvénye:

$$\int_{\Omega} K dA = 2\pi\chi(\Omega)$$

- Egyik pontban növelem a görbületet – máshol csökkentenem kell!
- Határgörbék (geodetikus) görbülete is beleszámít:

$$\int_{\Omega} K dA + \int_{\partial\Omega} \kappa_g dl = 2\pi\chi(\Omega)$$

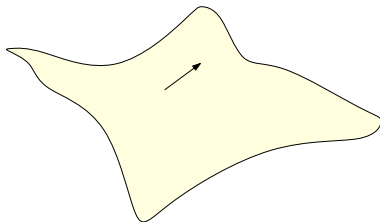
- Paraméterezés esetén: a felület görbületét a határgörbébe "toljuk"



Forrás: [Weeks, 2002]

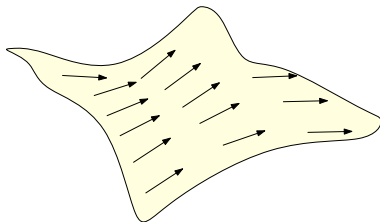
Vektormezők Párhuzamos Eltolásból

- Fogunk egy vektort es párhuzamosan eltoljuk $\rightarrow$ **vektormező** (hossz = 1 – **iránymező**)



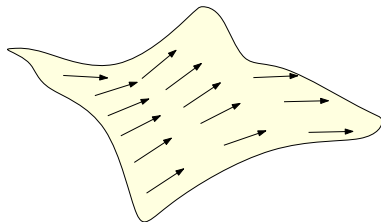
Vektormezők Párhuzamos Eltolásból

- Fogunk egy vektort és párhuzamosan eltoljuk $\rightarrow$ **vektormező** (hossz = 1 – **iránymező**)



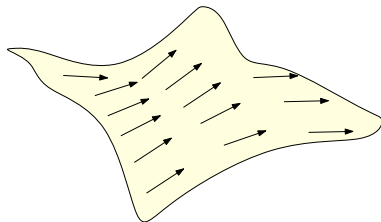
Vektormezők Párhuzamos Eltolásból

- Fogunk egy vektort és párhuzamosan eltoljuk $\rightarrow$ **vektormező** (hossz = 1 – **iránymező**)
- Görbült felületen párhuzamos eltolás függ az úttól!



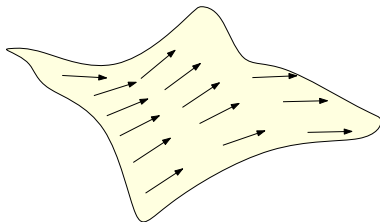
Vektormezők Párhuzamos Eltolásból

- Fogunk egy vektort es párhuzamosan eltoljuk $\rightarrow$ **vektormező** (hossz = 1 – **iránymező**)
- Görbült felületen párhuzamos eltolás függ az úttól!
- Párhuzamos eltolás + extra forgatás – **konnexió**, kovariáns derivált, gauge



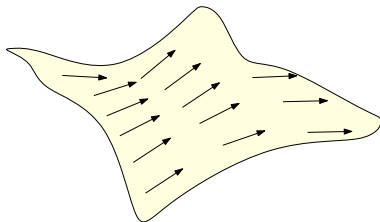
Vektormezők Párhuzamos Eltolásból

- Fogunk egy vektort es párhuzamosan eltoljuk $\rightarrow$ **vektormező** (hossz = 1 – **iránymező**)
- Görbült felületen párhuzamos eltolás függ az úttól!
- Párhuzamos eltolás + extra forgatás – **konnexió**, kovariáns derivált, gauge
- Folytonos vektormező – nulla görbületű konnexióval kell eltolni!

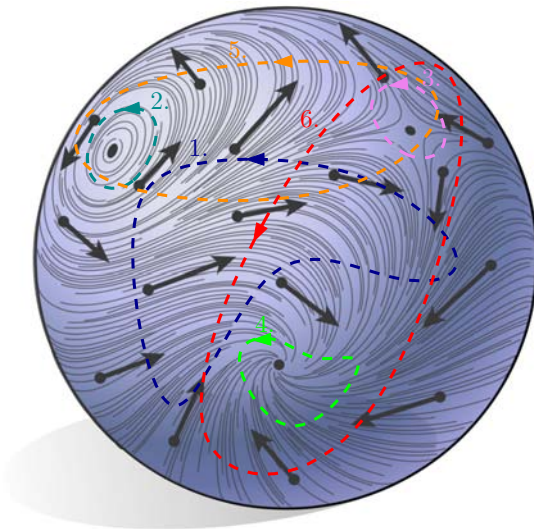


Vektormezők Párhuzamos Eltolásból

- Fogunk egy vektort es párhuzamosan eltoljuk $\rightarrow$ **vektormező** (hossz = 1 – **iránymező**)
- Görbült felületen párhuzamos eltolás függ az úttól!
- Párhuzamos eltolás + extra forgatás – **konnexió**, kovariáns derivált, gauge
- Folytonos vektormező – nulla görbületű konnexióval kell eltolni!
- Gauss-Bonnet – görbület $\neq 0$

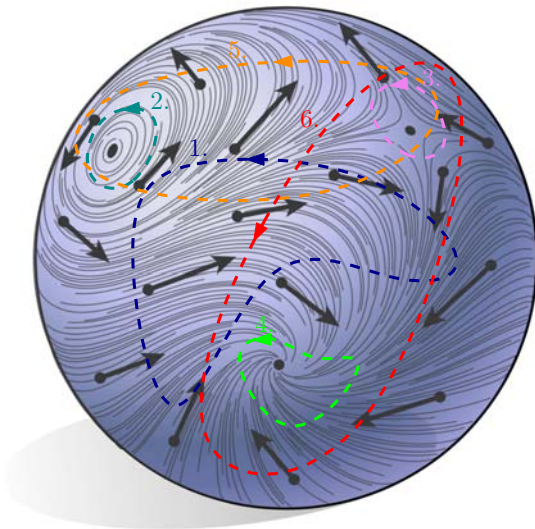


Ujjgyakorlat [Forras: Crane et al., 2013]



Körülfordulások száma – 1. : ..., 2. : ..., 3. : ..., 4. : ..., 5. : ..., 6. : ...

Ujjgyakorlat



Körülfordulások száma – 1. : 0, 2. : +1, 3. : -1, 4. : +1, 5. : 0, 6. : 0

Vektormező Szingularitása, Indexe

- Vektormező néhány izolált pontban nem folytonos – **szingularitás**



Forras: [Knoppel et al., 2013]

Vektormező Szingularitása, Indexe

- Vektormező néhány izolált pontban nem folytonos – **szingularitás**
- Szingularitást körbejárva a vektor forog – **szingularitás indexe**



Forras: [Knoppel et al., 2013]

Vektormező Szingularitása, Indexe

- Vektormező néhány izolált pontban nem folytonos – **szingularitás**
- Szingularitást körbejárva a vektor forog – **szingularitás indexe**
- Görbületet a szingularitásokba "toljuk"



Forras: [Knoppel et al., 2013]

Vektormező Szingularitása, Indexe

- Vektormező néhány izolált pontban nem folytonos – **szingularitás**
- Szingularitást körbejárva a vektor forog – **szingularitás indexe**
- Görbületet a szingularitásokba "toljuk"
- Gauss-Bonnet – $\sum \text{index} = \chi$



Forras: [Knoppel et al., 2013]

Vektormező Szingularitása, Indexe

- Vektormező néhány izolált pontban nem folytonos – **szingularitás**
- Szingularitást körbejárva a vektor forog – **szingularitás indexe**
- Görbületet a szingularitásokba "toljuk"
- Gauss-Bonnet – $\sum \text{index} = \chi$



Forras: [Knoppel et al., 2013]

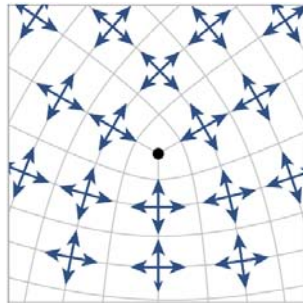
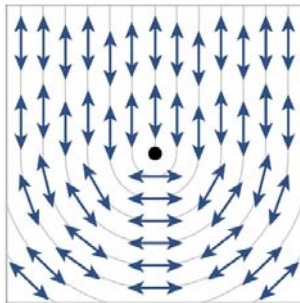
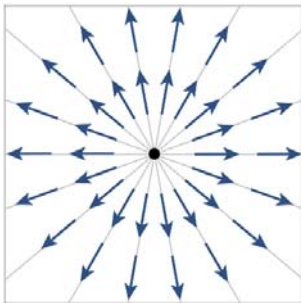
Vektormező Szingularitása, Indexe

- Vektormező néhány izolált pontban nem folytonos – **szingularitás**
- Szingularitást körbejárva a vektor forog – **szingularitás indexe**
- Görbületet a szingularitásokba "toljuk"
- Gauss-Bonnet – $\sum \text{index} = \chi$
- Gömbön az indexek összege $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$ – "Sündisznót nem lehet megfésülni", "Föld két pontján mindig szélcsend van"



Forras: [Knoppel et al., 2013]

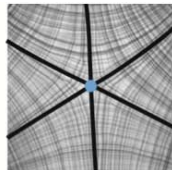
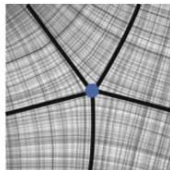
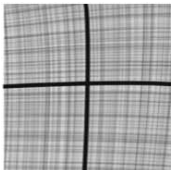
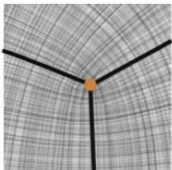
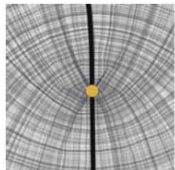
Vonal- és Keresztmezők



Forras: [Knoppel, 2013]

- Görbületi vonalak – 180 fokos fordulat nem számít – **Vonalmező**
- Négyszöghálók – 90 fokos fordulat nem számít – **Keresztmező**
- n -szeresen szimmetrikus mező – szingularitások indexe $\frac{k}{n} \cdot 2\pi$

Keresztmező Singularitásai



Forras: [Diamanti et al., 2016]

1

Bevezetés

- Motiváció, Alkalmazások
- Négyszöghálók tulajdonságai

2

Paraméterezés-alapú Módszerek

- Alapötlet
- Paraméterezés Szingularitásokkal
- Paraméterezés Iránymezők Segítségével

3

Vektormező-generálás

- Matematikai alapok
- Mezőgenerálás Fix Szingularitásokkal
- Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal

4

Strukturált Hálógenerálás

Mezőgenerálás Fix Szingularitásokkal [Crane et al., 2010]

- Konnexió minden pontban $k \cdot \frac{2\pi}{n}$ görbülettel – vektor párhuzamos eltolásával vektormező

Mezőgenerálás Fix Szingularitásokkal [Crane et al., 2010]

- Konnexió minden pontban $k \cdot \frac{2\pi}{n}$ görbülettel – vektor párhuzamos eltolásával vektormező
- Háromszöghálón vektormező – háromszögenként konstans, konnexió – forgatási szög szomszédos háromszögek között

Mezőgenerálás Fix Szingularitásokkal [Crane et al., 2010]

- Konnexió minden pontban $k \cdot \frac{2\pi}{n}$ görbülettel – vektor párhuzamos eltolásával vektormező
- Háromszöghálón vektormező – háromszögenként konstans, konnexió – forgatási szög szomszédos háromszögek között
- Csúcspontbeli görbület: csúcspont körüli szögek összege

Mezőgenerálás Fix Szingularitásokkal [Crane et al., 2010]

- Konnexió minden pontban $k \cdot \frac{2\pi}{n}$ görbülettel – vektor párhuzamos eltolásával vektormező
- Háromszöghálón vektormező – háromszögenként konstans, konnexió – forgatási szög szomszédos háromszögek között
- Csúcspontbeli görbület: csúcspont körüli szögek összege
- Előírt görbület minden pontban

$$\sum_{e_{ij} \in \mathcal{E}_{v_i}} \omega_{ij} = -K_{v_i}$$

Mezőgenerálás Fix Szingularitásokkal [Crane et al., 2010]

- Konnexió minden pontban $k \cdot \frac{2\pi}{n}$ görbülettel – vektor párhuzamos eltolásával vektormező
- Háromszöghálón vektormező – háromszögenként konstans, konnexió – forgatási szög szomszédos háromszögek között
- Csúcspontbeli görbület: csúcspont körüli szögek összege
- Előírt görbület minden pontban

$$\sum_{e_{ij} \in \mathcal{E}_{v_i}} \omega_{ij} = -K_{v_i}$$

- Alulhatározott lineáris rendszer a forgatási szögekre:

$$\mathbf{C}\omega = \mathbf{K}$$

Mezőgenerálás Fix Szingularitásokkal [Crane et al., 2010]

- Konnexió minden pontban $k \cdot \frac{2\pi}{n}$ görbülettel – vektor párhuzamos eltolásával vektormező
- Háromszöghálón vektormező – háromszögenként konstans, konnexió – forgatási szög szomszédos háromszögek között
- Csúcspontbeli görbület: csúcspont körüli szögek összege
- Előírt görbület minden pontban

$$\sum_{e_{ij} \in \mathcal{E}_{v_i}} \omega_{ij} = -K_{v_i}$$

- Alulhatározott lineáris rendszer a forgatási szögekre:

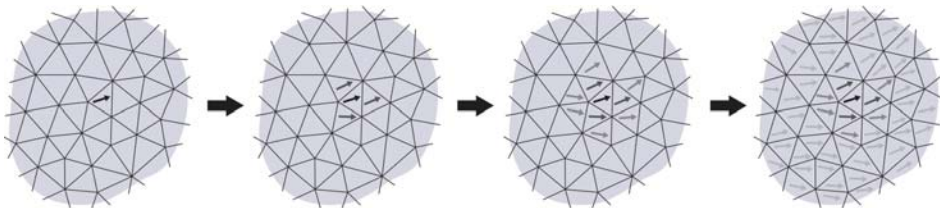
$$\mathbf{C}\omega = \mathbf{K}$$

- Legkevesebb forgatás – $\sum \omega_{ij}^2 = \|\omega\|^2 \rightarrow \min.$ – legkisebb normájú megoldás:

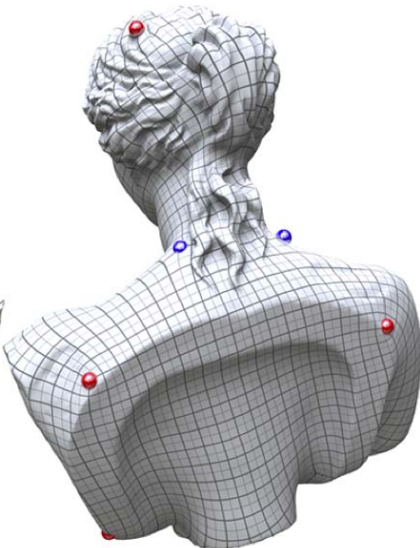
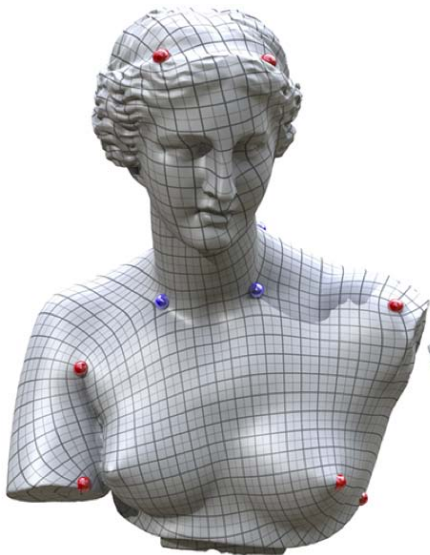
$$\omega = \mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1}\mathbf{K}$$

Mezőgenerálás Fix Szingularitásokkal [Crane et al., 2010]

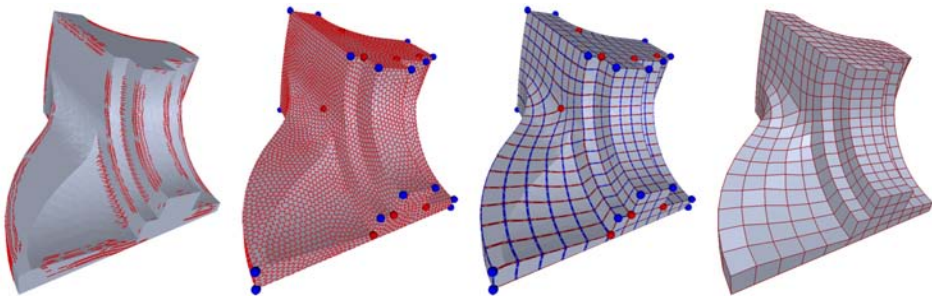
- A forgatószögek birtokában feszítőfa bejárásával generáljuk a mezőt
- Iránykényszerek (pl. fögörbületek) figyelembevétele kemény, vagy puha kényszerek formájában – továbbra is lineáris egyenletrendszer!



Eredmények



Eredmények



Forras: [Bommes-Zimmer-Kobbelt, 2009]

1

Bevezetés

- Motiváció, Alkalmazások
- Négyszöghálók tulajdonságai

2

Paraméterezés-alapú Módszerek

- Alapötlet
- Paraméterezés Szingularitásokkal
- Paraméterezés Iránymezők Segítségével

3

Vektormező-generálás

- Matematikai alapok
- Mezőgenerálás Fix Szingularitásokkal
- Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal

4

Strukturált Hálógenerálás

Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal

- Eddig: szingularitások helye es indexe adott

Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal

- Eddig: szingularitások helye es indexe adott
- Szingularitások automatikus elhelyezése – kombinatorikus feladat!

Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal

- Eddig: szingularitások helye es indexe adott
- Szingularitások automatikus elhelyezése – kombinatorikus feladat?
- Legsimább iránymező:

$$E_D = \int_M |\nabla \varphi|^2 dM \rightarrow \min.$$

Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal

- Eddig: szingularitások helye es indexe adott
- Szingularitások automatikus elhelyezése – kombinatorikus feladat?
- Legsimább iránymező:

$$E_D = \int_M |\nabla \varphi|^2 dM \rightarrow \min$$

- Szingularitásokban nem értelmezett – értéke függ a háromszögeléstől!



$E = 25.98$

<

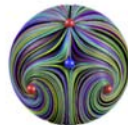


$E = 46.37$



$E = 72.18$

>



$E = 47.33$

[Knoppel et al., 2013]

Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal

- Skálázzuk at a φ iránymezőt $a\varphi$ vektormezővé ($a : M \rightarrow \mathbb{R}$)

Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal

- Skálázzuk at a φ iránymezőt $a\varphi$ vektormezővé ($a : M \rightarrow \mathbb{R}$)
- Iránymező energiája az optimális átskálázott mező energiája:

$$E_D = \min_a \left(\int_M |\nabla a\varphi|^2 dM \right) \rightarrow \min.$$

Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal

- Skálázzuk át a φ iránymezőt $a\varphi$ vektormezővé ($a : M \rightarrow \mathbb{R}$)
- Iránymező energiája az optimális átskálázott mező energiája:

$$E_D = \min_a \left(\int_M |\nabla a \varphi|^2 dM \right) \rightarrow \min.$$

- Triviális mo. ($a \equiv 0$) kizárása – kényszer: $\int_M |a|^2 dM = 1$

Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal

- Skálázzuk át a φ iránymezőt $a\varphi$ vektormezővé ($a : M \rightarrow \mathbb{R}$)
- Iránymező energiája az optimális átskálázott mező energiája:

$$E_D = \min_a \left(\int_M |\nabla a \varphi|^2 dM \right) \rightarrow \min.$$

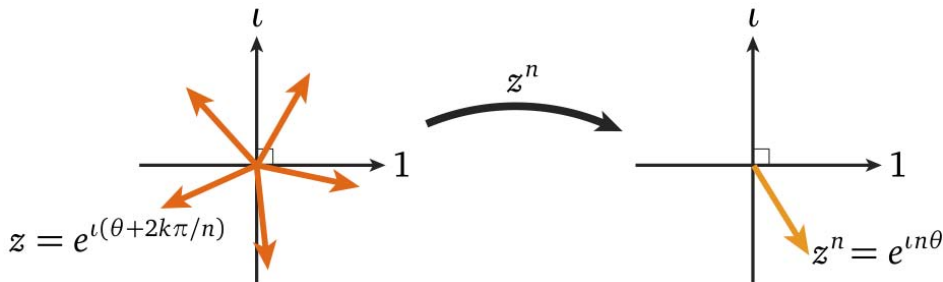
- Triviális mo. ($a \equiv 0$) kizárása – kényszer: $\int_M |a|^2 dM = 1$
- Iránymezőt pontokénti normalizálással kapunk

Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal

- Érintősík – komplex számsík, vektor – komplex szám

Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal

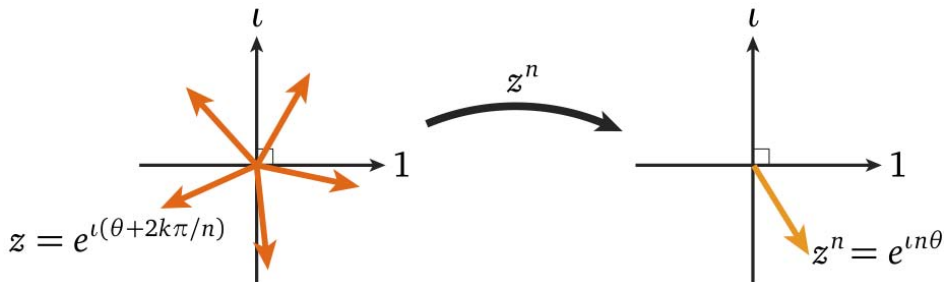
- Érintősík – komplex számsík, vektor – komplex szám
- n -szeresen szimmetrikus mező – minden vektor n -edik hatványa ua. a komplex szám (reprezentáns-vektor)!



[Knoppel et al., 2013]

Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal

- Érintősík – komplex számsík, vektor – komplex szám
- n -szeresen szimmetrikus mező – minden vektor n -edik hatványa ua. a komplex szám (reprezentáns-vektor)!
- Eltolás során a reprezentáns-vektor n -szeres sebességgel forog!



[Knoppel et al., 2013]

Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal

- Másodfokú energia minimalizálása, normakényszer mellett – (komplex) sajátvektor-probléma!

Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal

- Másodfokú energia minimalizálása, normakényszer mellett – (komplex) sajátvektor-probléma!
- Háromszöghálókon – speciális végelemekkel: komplex-elemű mátrix "legkisebb" sajátvektorát keressük

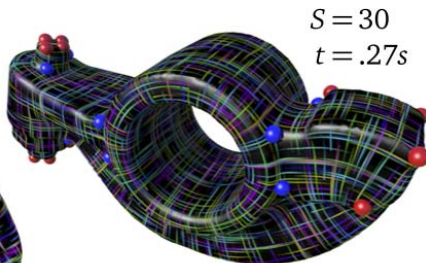
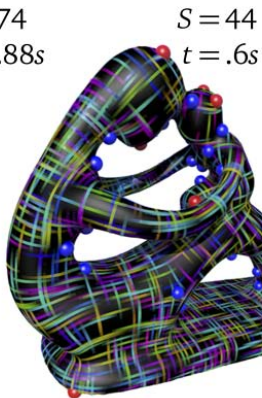
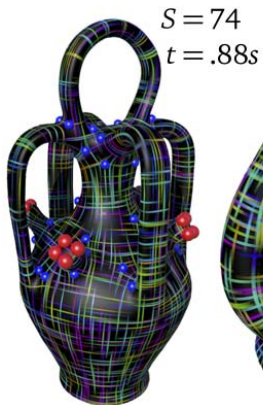
Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal

- Másodfokú energia minimalizálása, normakényszer mellett – (komplex) sajátvektor-probléma!
- Háromszöghálókon – speciális végelemekkel: komplex-elemű mátrix "legkisebb" sajátvektorát keressük
- Szingularitások automatikusan adódnak ($a = 0$)!

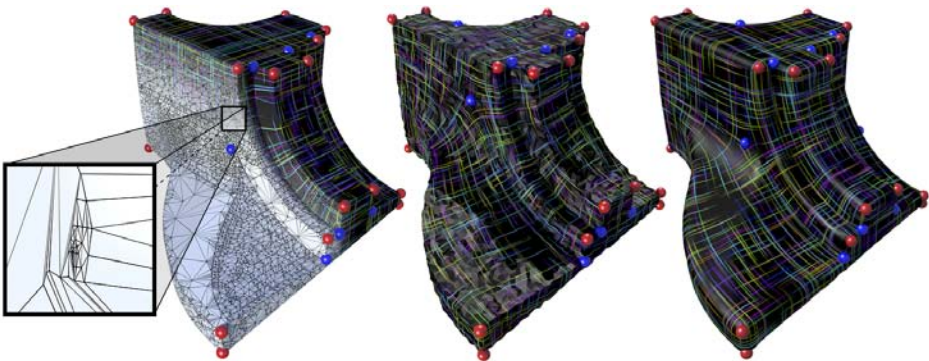
Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal

- Másodfokú energia minimalizálása, normakényszer mellett – (komplex) sajátvektor-probléma!
- Háromszöghálókon – speciális végelemekkel: komplex-elemű mátrix "legkisebb" sajátvektorát keressük
- Szingularitások automatikusan adódnak ($a = 0$)!
- Iránykényszerek (pl. görbületi irányok) figyelembevétele – puha kényszerek, λ paraméterrel súlyozhatunk simaság és interpoláció között

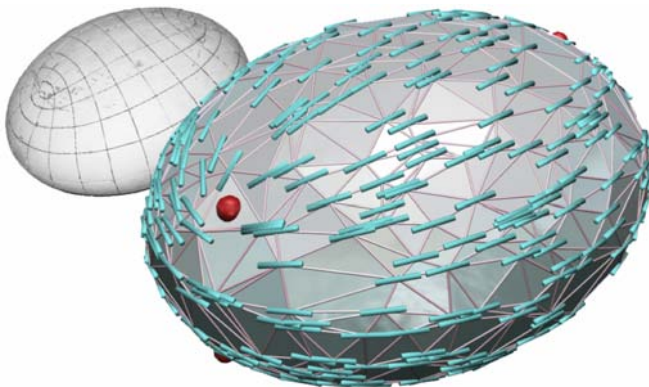
Eredmények [Knoppel et al., 2013]



Eredmények [Knoppel et al., 2013]

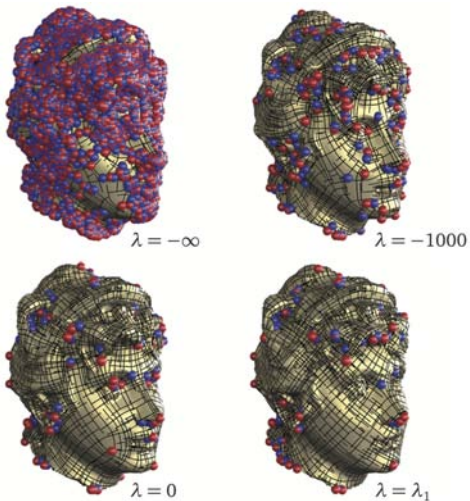


Eredmények [Knoppel et al., 2013]



Görbületi irányok interpolálása

Eredmények [Knoppel et al., 2013]



Umbilikus pontok szűrése

1

Bevezetés

- Motiváció, Alkalmazások
- Négyszöghálók tulajdonságai

2

Paraméterezés-alapú Módszerek

- Alapötlet
- Paraméterezés Szingularitásokkal
- Paraméterezés Iránymezők Segítségével

3

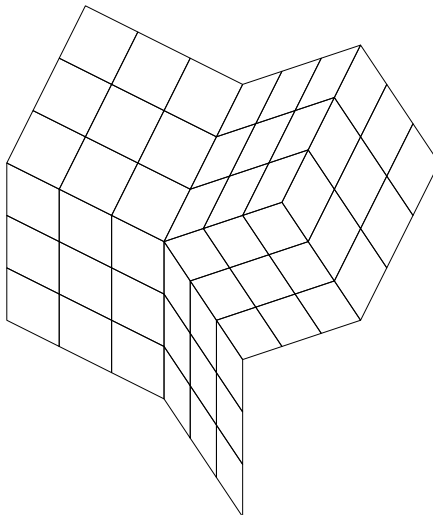
Vektormező-generálás

- Matematikai alapok
- Mezőgenerálás Fix Szingularitásokkal
- Mezőgenerálás Ismeretlen Szingularitásokkal

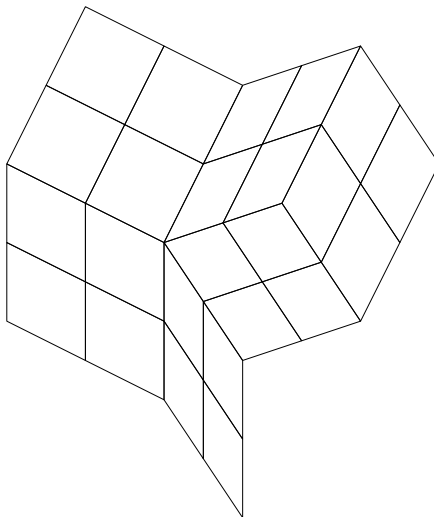
4

Strukturált Hálógenerálás

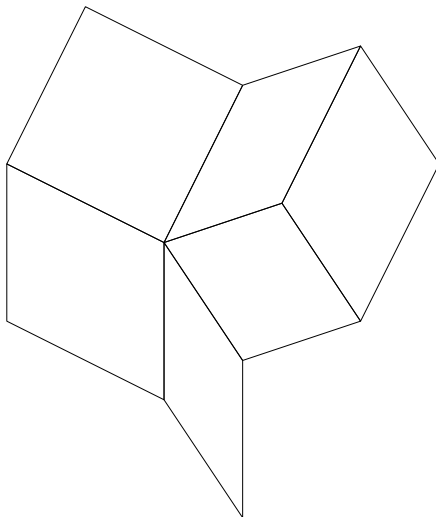
Strukturált Négyszöghálók, "Quad Layouts"



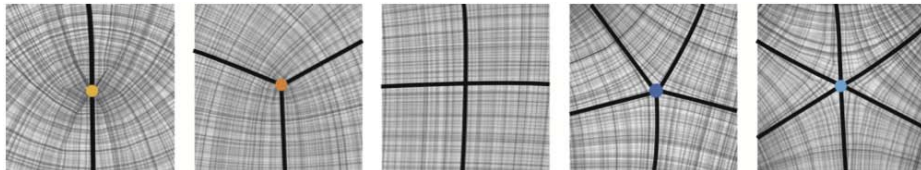
Strukturált Négyszöghálók, "Quad Layouts"



Strukturált Négyszöghálók, "Quad Layouts"

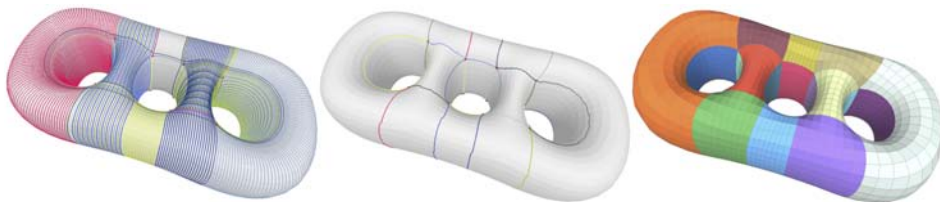


Keresztmező Singularitásai, Szeparatrixok



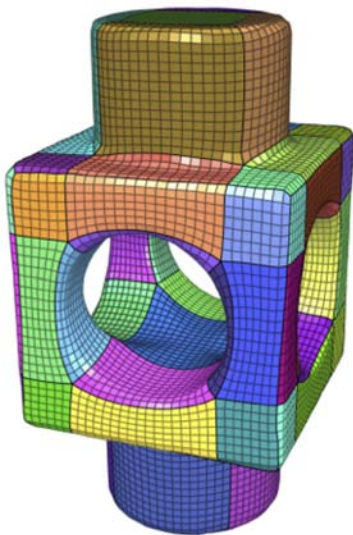
Forras: [Diamanti et al., 2016]

Szeparatrixok Követése?



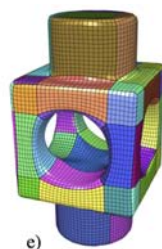
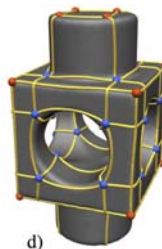
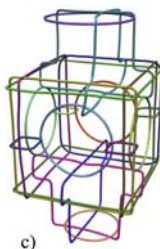
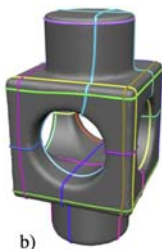
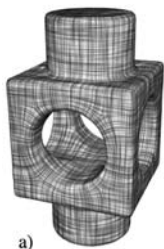
Forras: [Tarini et al., 2011]

Szeparatixok Követése?

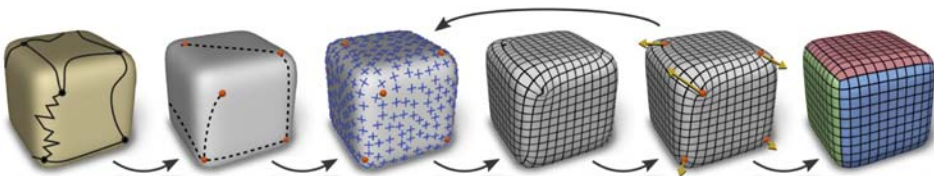


Layout Generálás – Duális Hurkok Módszere

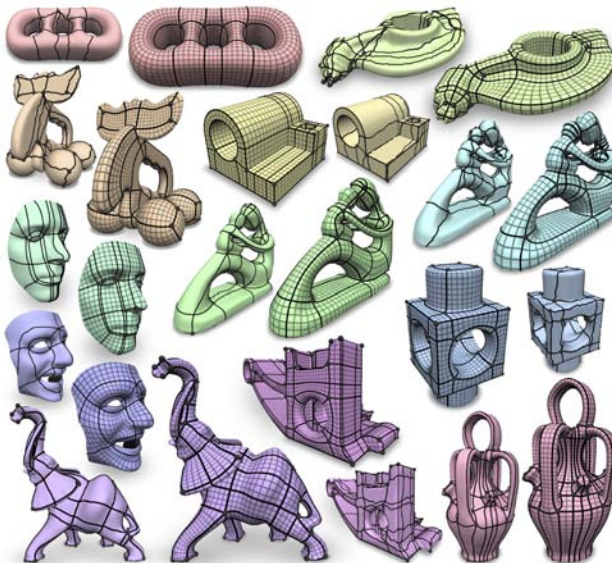
[Campen-Bommes-Kobbelt, 2012]



Layout Geometria Optimalizálása [Campen-Kobbelt, 2014]



Eredmények [Campen-Kobbelt, 2014]



Köszönöm a figyelmet!