

P-Bézier görbék és bázisfüggvények

Kovács István

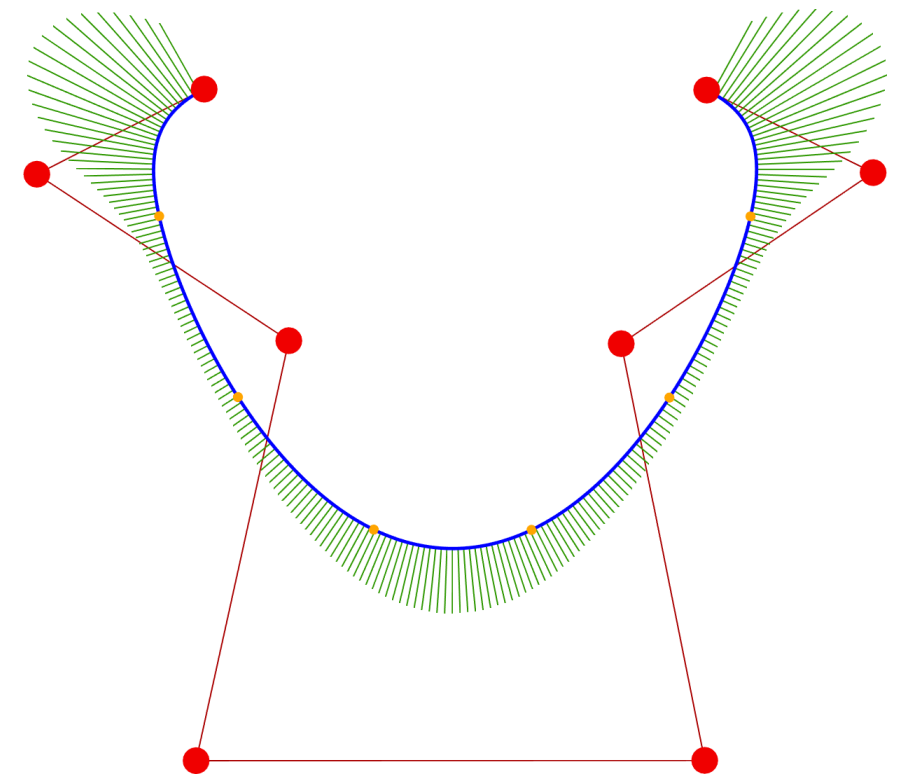
3D számítógépes geometria és alakzatrekonstrukció 2
2018. 09. 18.

Tartalom

- P-Bézier görbék
- Bázisfüggvények kiszámítása
- Kontrollpont beszúrás
- Tenzorszorzat felületek
- P-Bspline
- További kutatási célok

Bézier görbék

- Konvex kombináció: $r(t) = \sum_i P_i B_i^n(t)$
- C^∞
- A görbék messze kerülhetnek a kontrollpontoktól azaz a kontrollpontok hatása gyenge
- Pszeudó-lokalitás
- Bernstein bázis: $B_i^n = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$



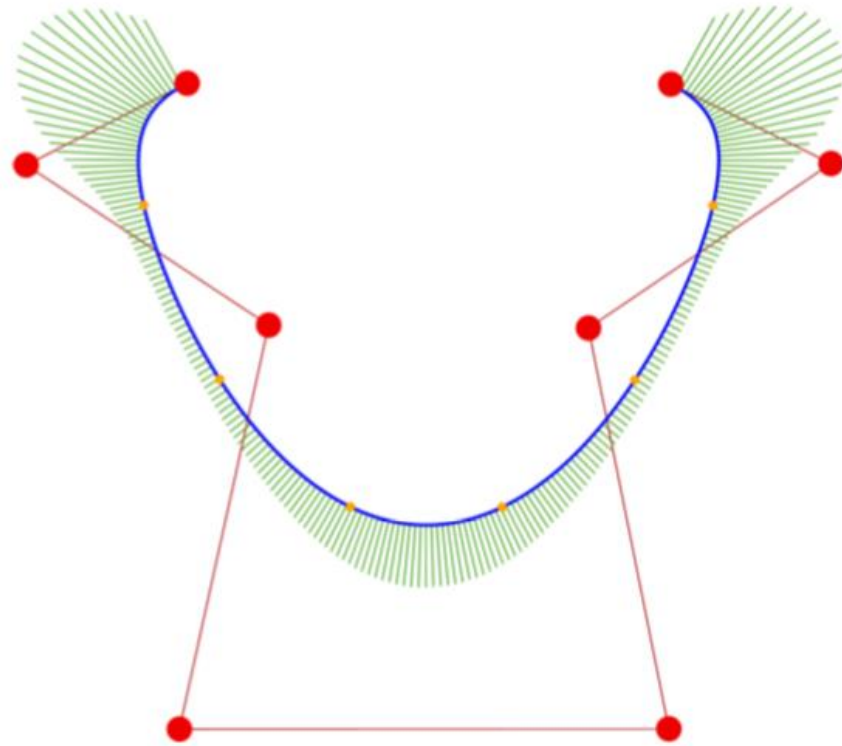
P-Bézier görbék

$$c^\gamma(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i M_i^{n,\gamma}(t)$$

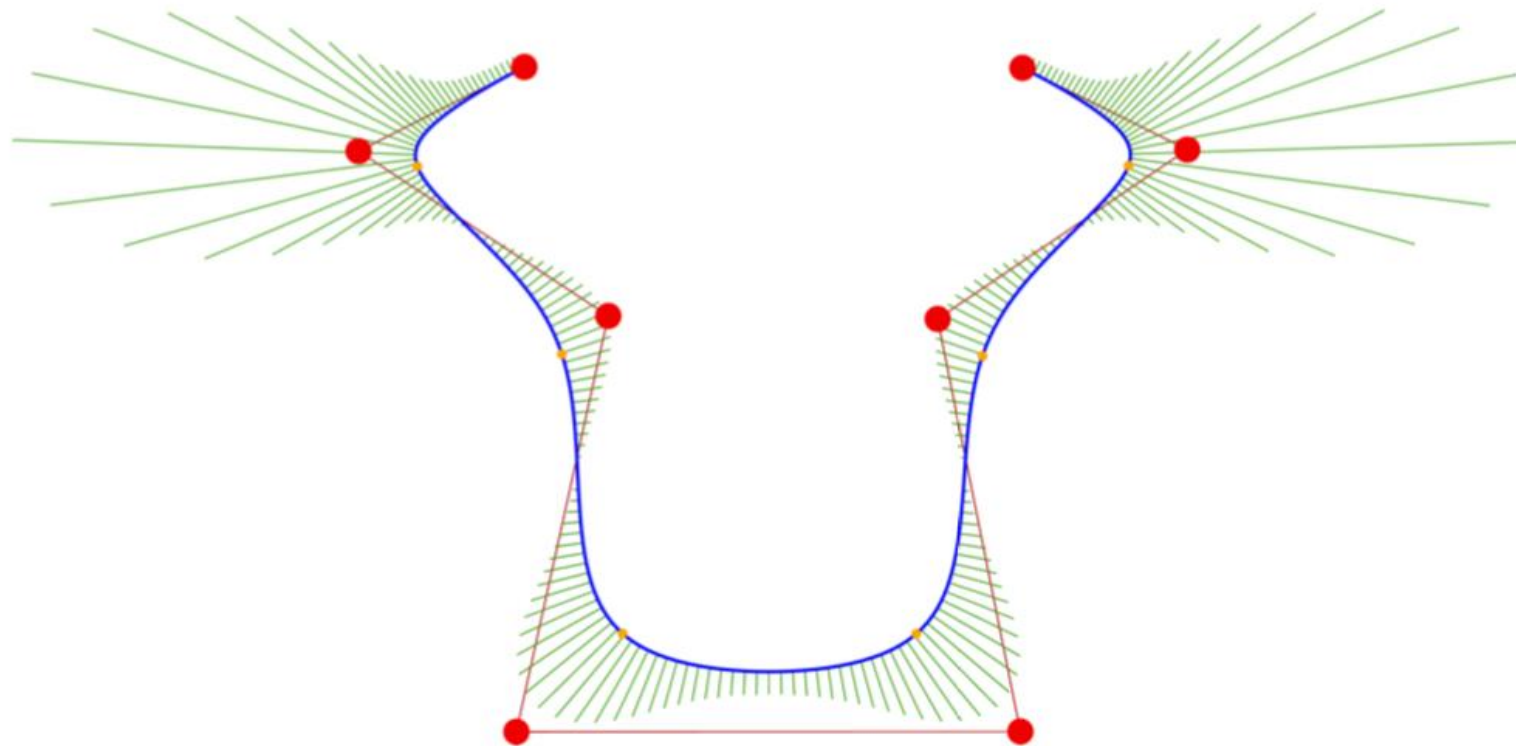
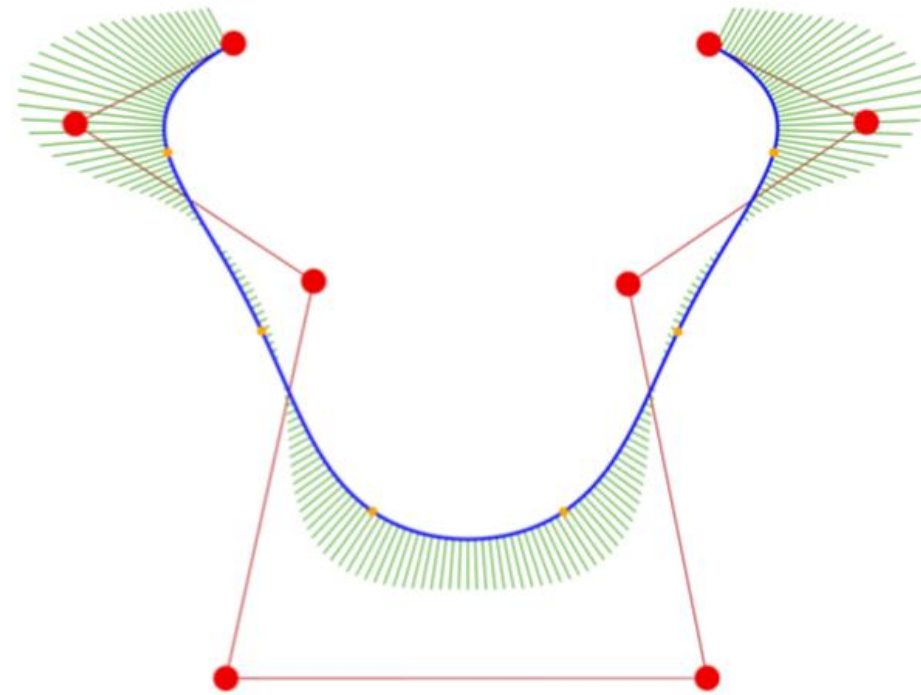
- Új kontrollpont alapú görbereprezentáció
- Valójában egy folytonos paraméterrel (proximity) definiált görbecsalád
- Bézier görbék - reprodukálhatóak
- C^∞ folytonosság
- Görbék folytonos összekapcsolása - egyszerű
- Nagyon jó approximációs tulajdonságok

DEMO

$\gamma = 1$ (Bézier curve reproduced)

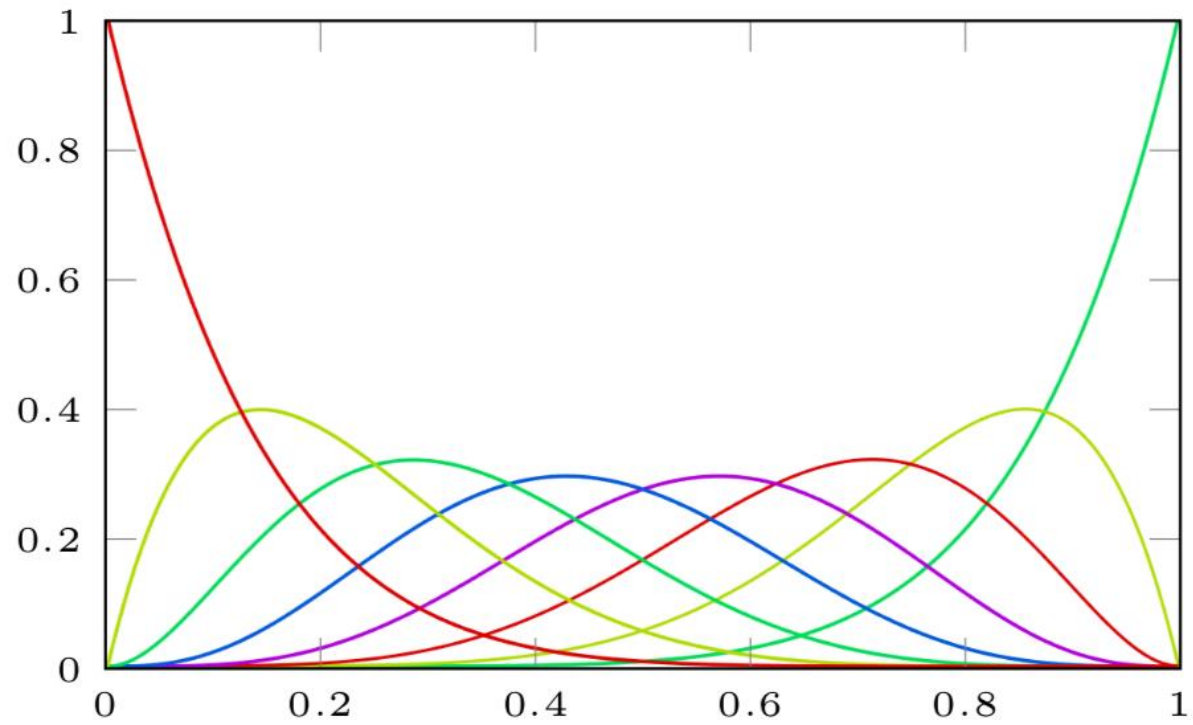


$\gamma = 0.6$

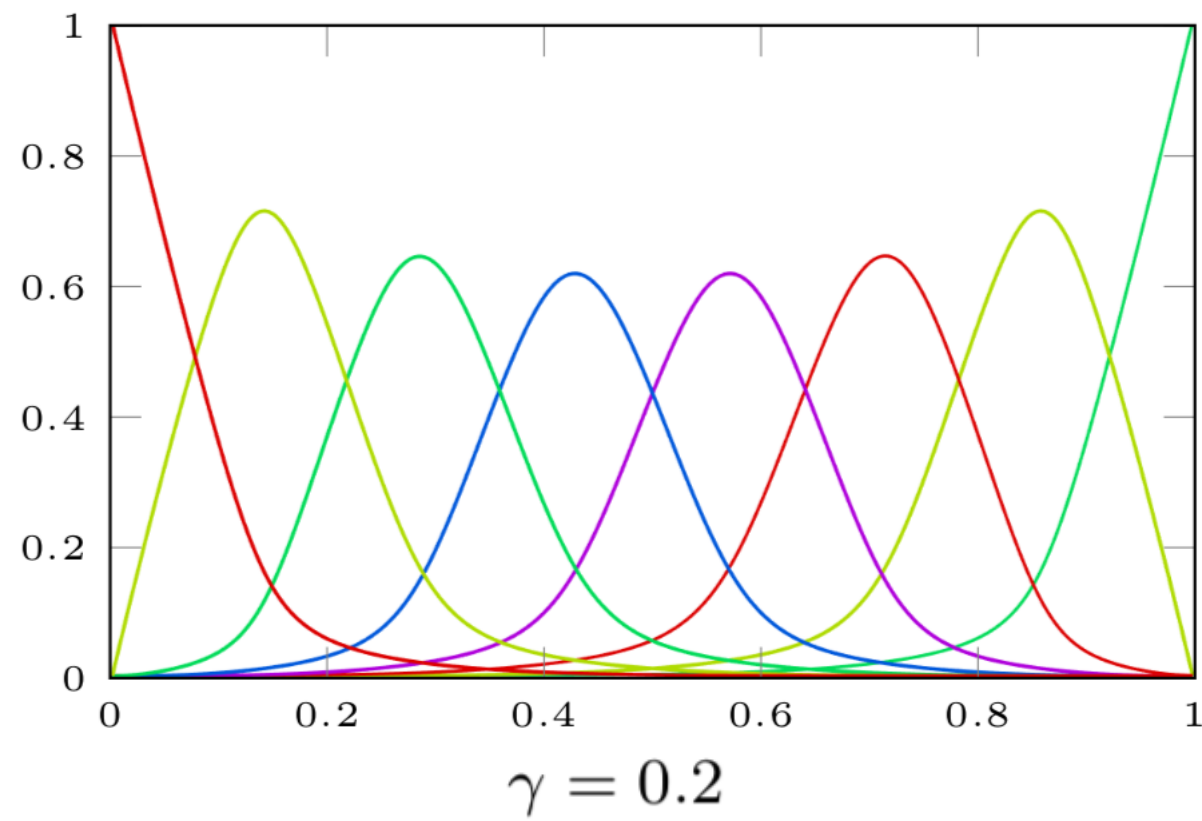
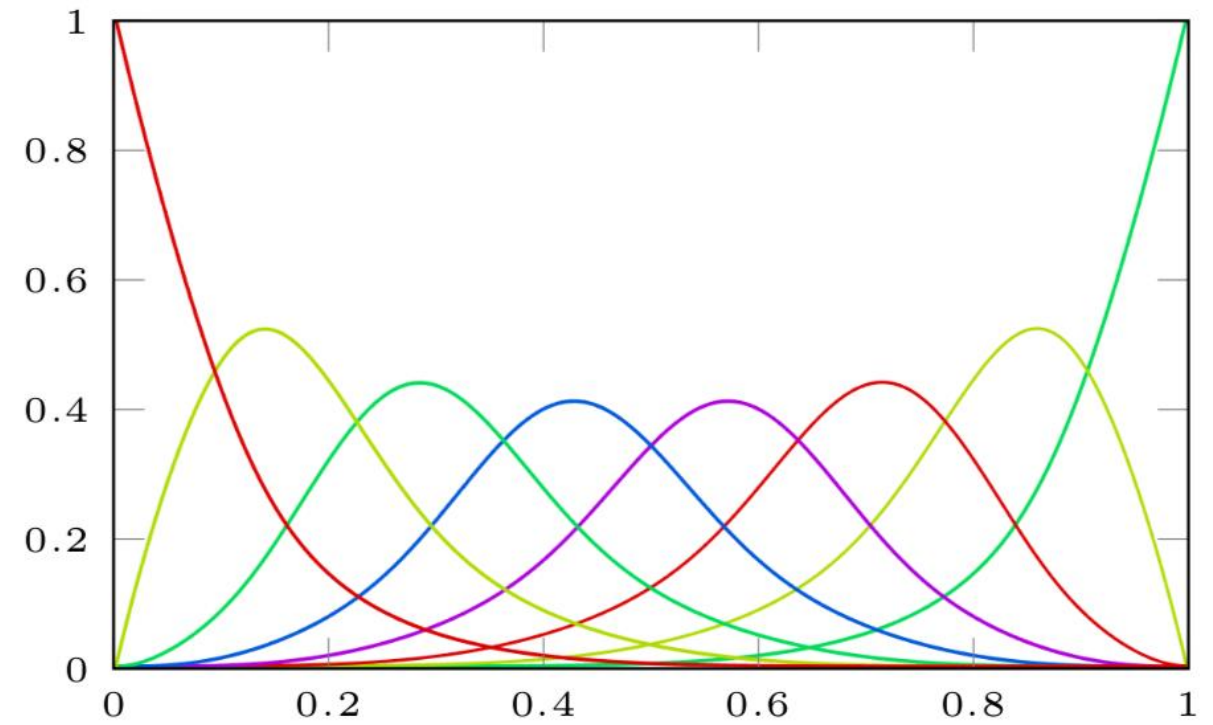


$\gamma = 0.2$

$\gamma = 1$ (Bernstein basis reproduced)



$\gamma = 0.6$



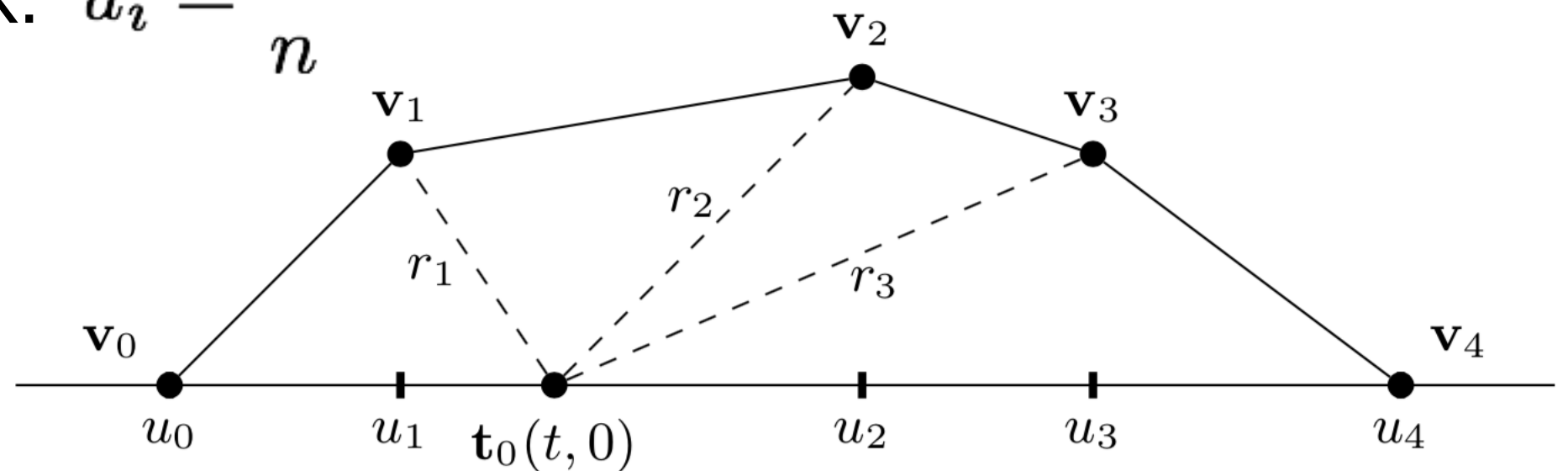
Új bázisfüggvény konstrukció

- Új kontrollpont alapú görbereprezentáció

- $$c^\gamma(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i M_i^{n,\gamma}(t)$$

- Segédmenyiségek: $r_i^\gamma = r_i^\gamma(t) = \sqrt{(u_i - t)^2 + \gamma f_i(t)}$.

Talppontok: $u_i = \frac{i}{n}$



Új bázisfüggvény konstrukció

$$r_i^\gamma = r_i^\gamma(t) = \sqrt{(u_i - t)^2 + \gamma f_i(t)}. \quad \Delta r_i = r_{i+1}^\gamma - r_i^\gamma$$

- Bázisfüggvények:

$$M_0^\gamma(t) = \frac{1 + n\Delta r_0}{2} = \frac{1 + n(r_1^\gamma - r_0^\gamma)}{2}$$

$$M_i^\gamma(t) = \frac{n\Delta r_i - n\Delta r_{i-1}}{2} = \frac{n(r_{i-1}^\gamma - 2r_i^\gamma + r_{i+1}^\gamma)}{2}$$

$$M_n^\gamma(t) = \frac{1 - n\Delta r_{n-1}}{2} = \frac{1 - n(r_n^\gamma - r_{n-1}^\gamma)}{2}$$

- Algebrailag egyszerű (véges differencia)

P-Bézier bázisfüggvények

- Cél: $\gamma = 1$ -re visszakapjuk a Bernstein bázist; speciális súlyozófüggvényeket keresünk
- Kényszeregyenletek: $M_i^1(t) = B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$
- A lineáris egyenletrendszer megoldása

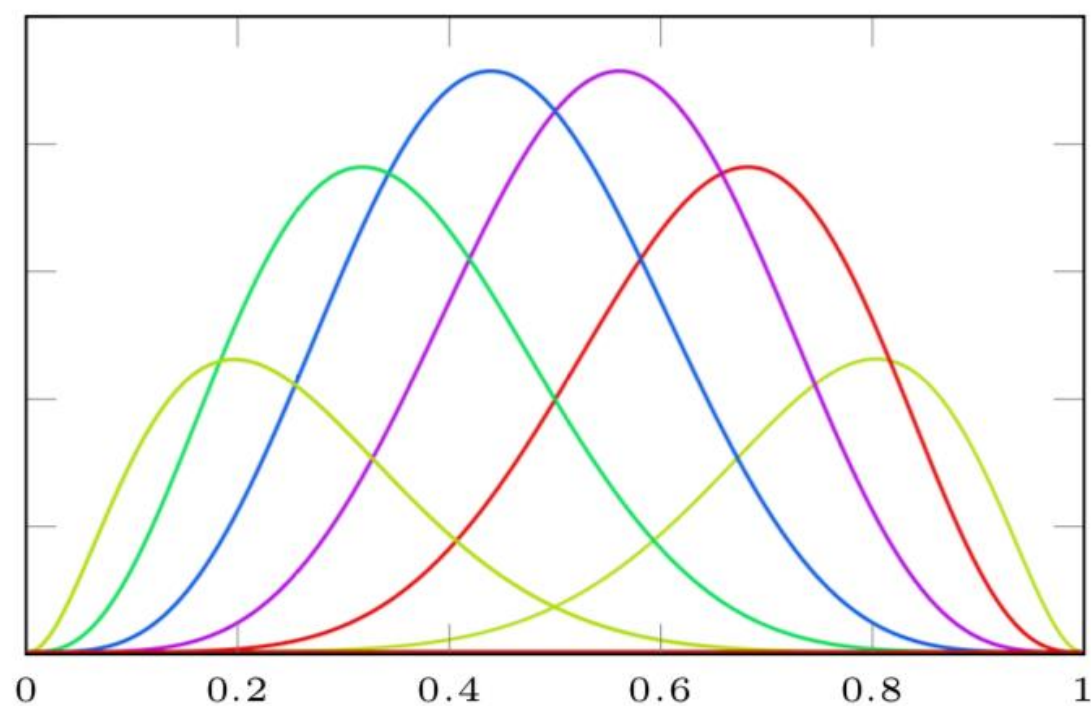
$$r_i^1(t) = t - \frac{i}{n} + \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{i-1} (i-j) B_j(t)$$

ez alapján:

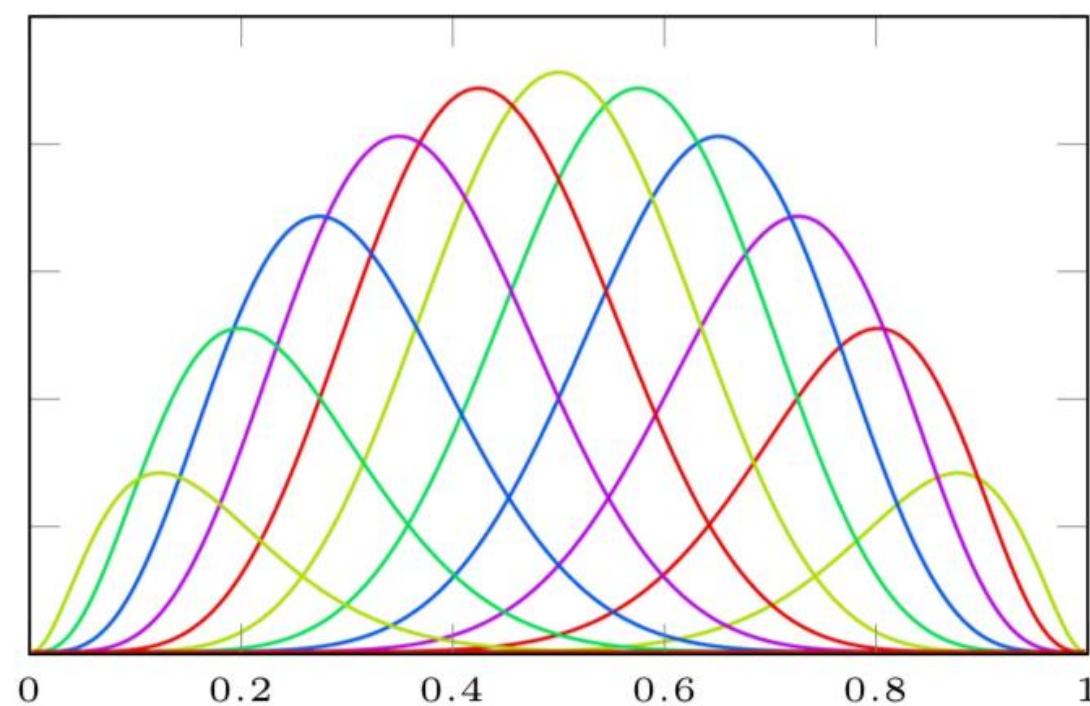
$$f_i(t) = \left(t - \frac{i}{n} + \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{i-1} (i-j) B_j(t) \right)^2 - \left(\frac{i}{n} - t \right)^2$$

Súlyozófüggvények

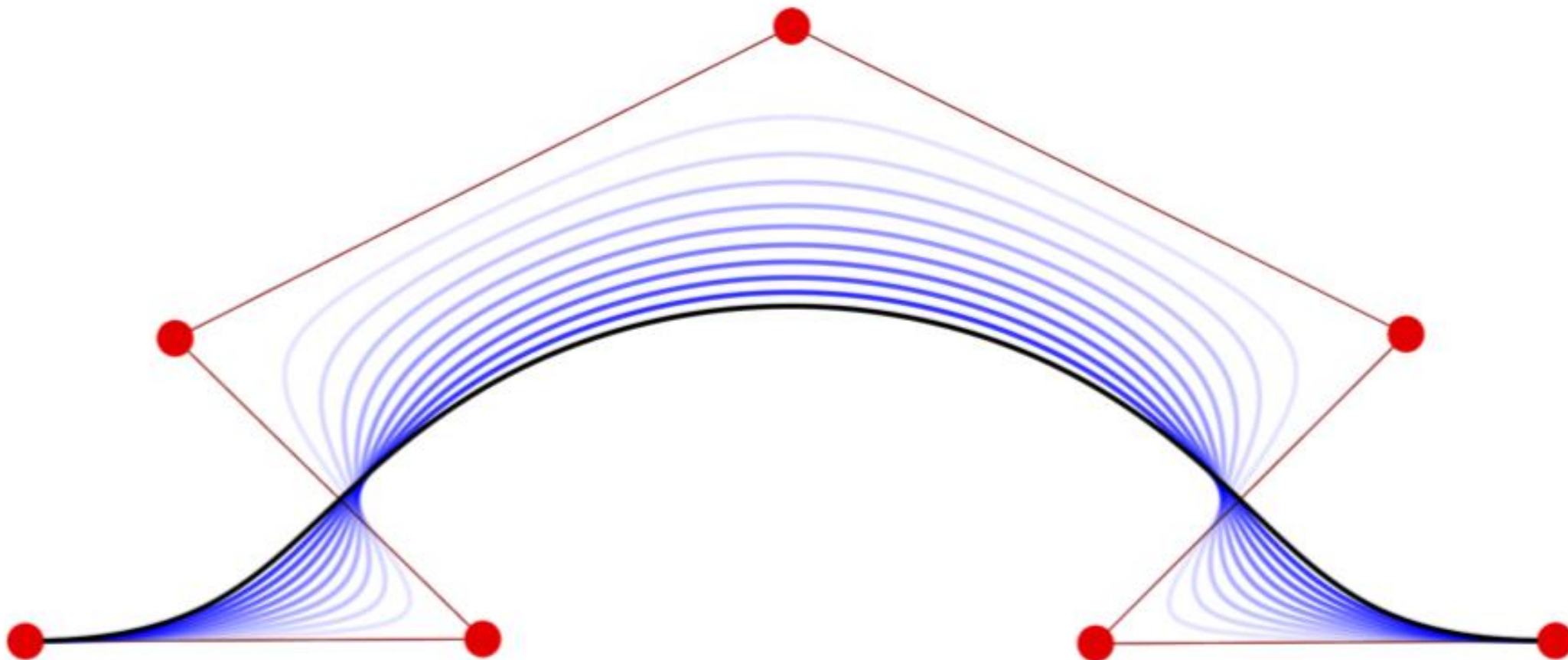
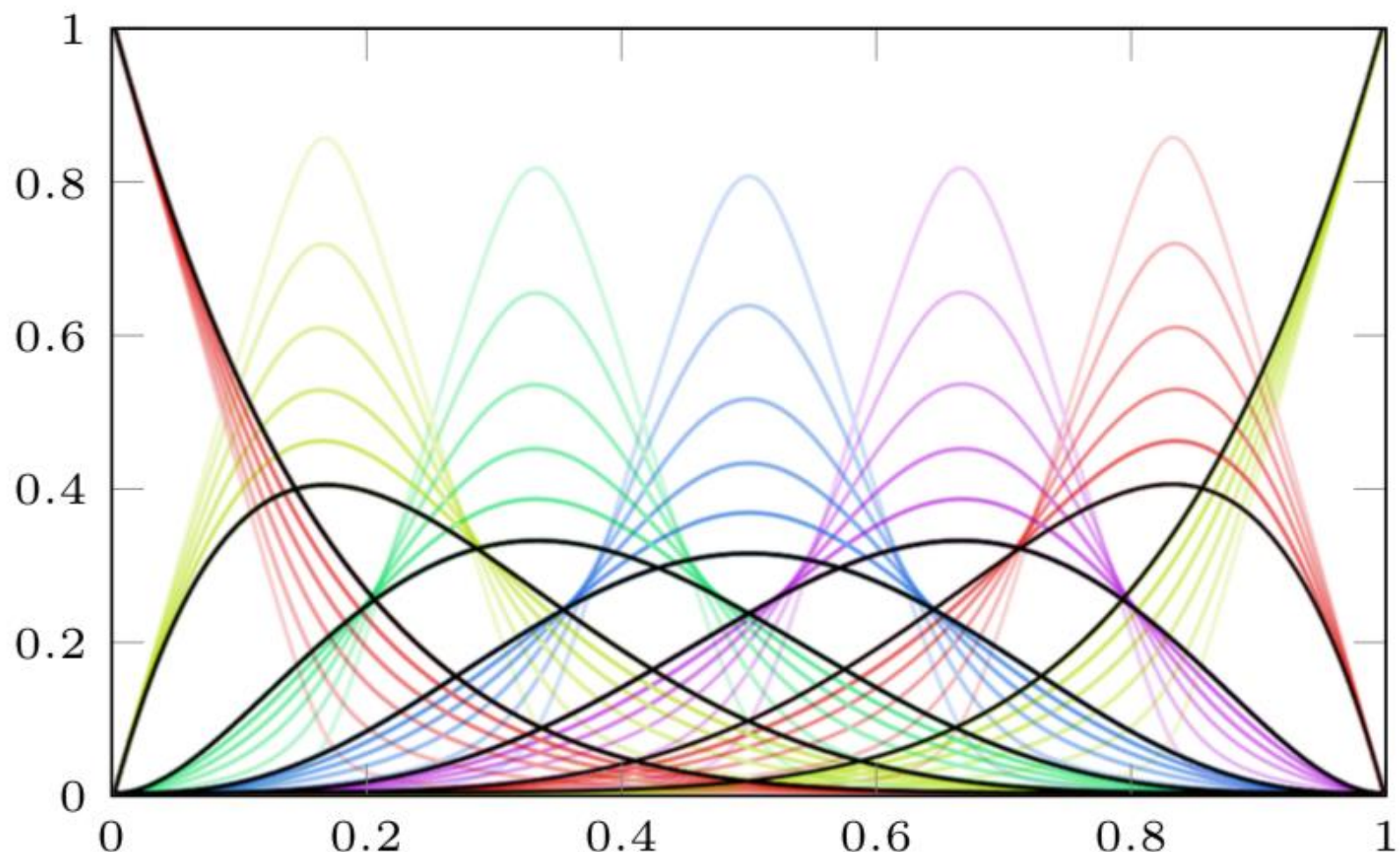
$$f_i(t) = \left(t - \frac{i}{n} + \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{i-1} (i-j) B_j(t) \right)^2 - \left(\frac{i}{n} - t \right)^2$$



$n = 7$



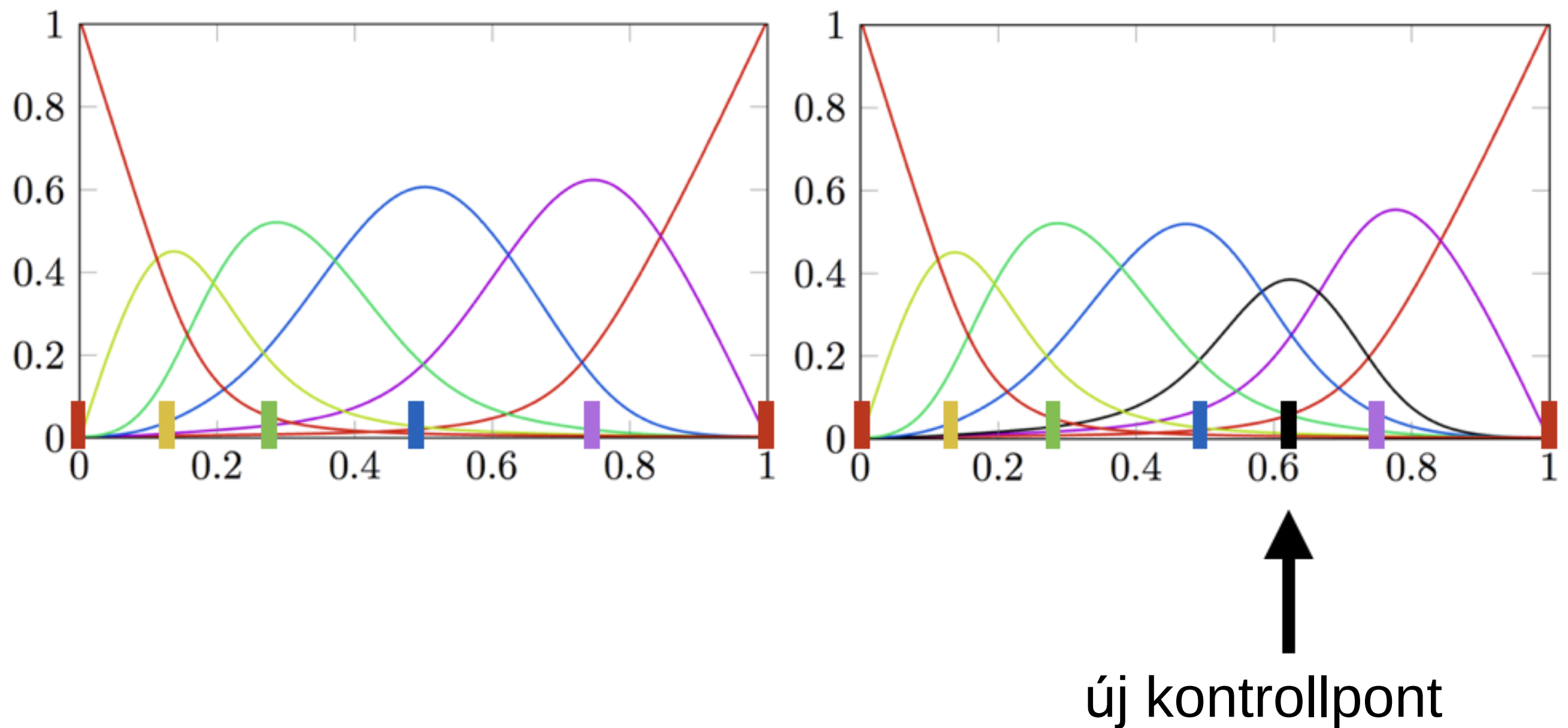
$n = 12$



P-Bspline

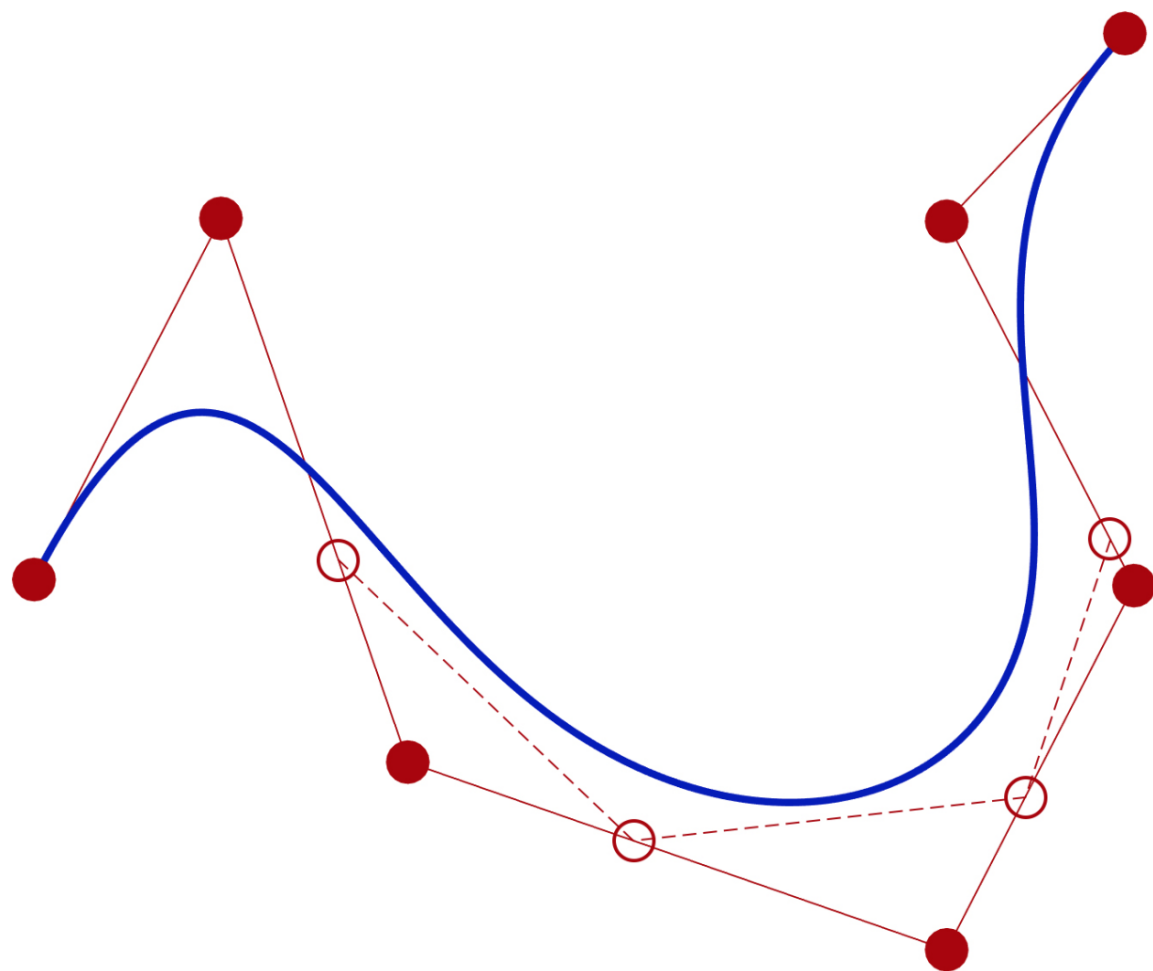
- Új kontrollpont alapú görbereprezentáció
- Valójában egy folytonos paraméterrel (proximity) definiált görbecsalád
- B-spline görbék - reprodukálhatóak
- C^{d-1} folytonosság
- Görbék folytonos összekapcsolása - egyszerű
- Nagyon jó approximációs tulajdonságok

Kontrollpont beszúrás

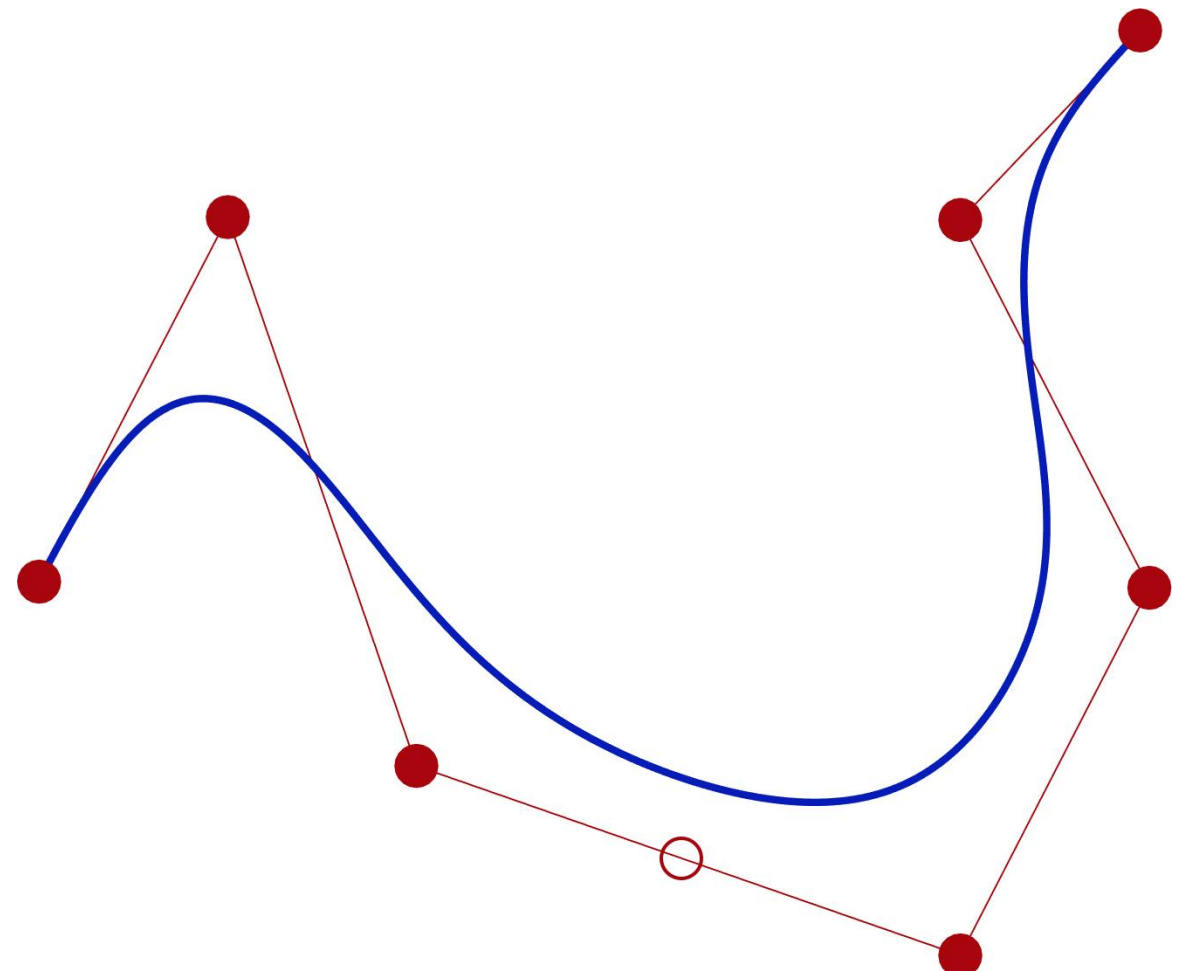


DEMO

Kontrollpont beszúrás



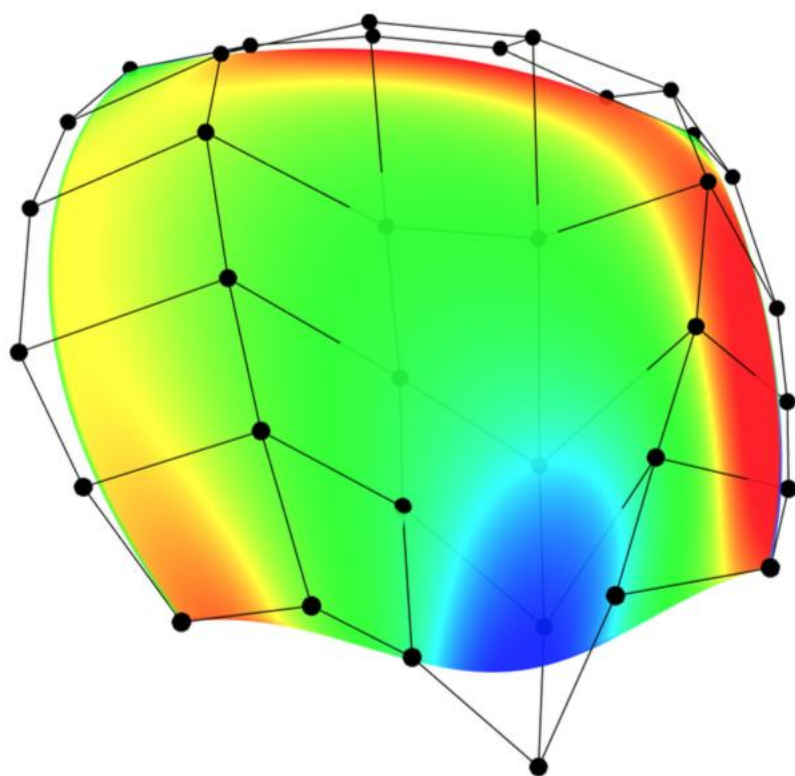
B-spline



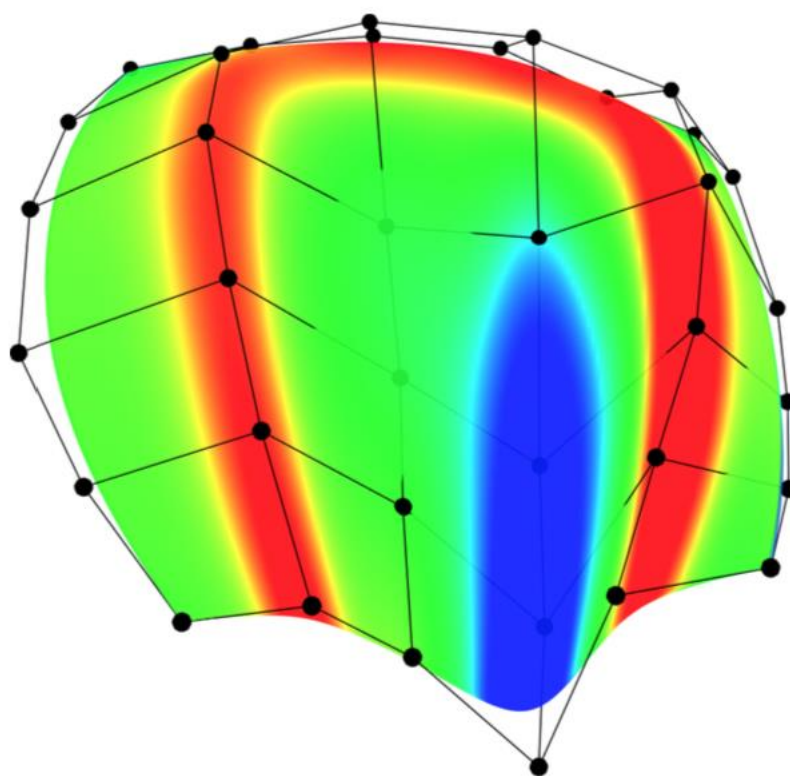
P-Bspline

Tenzorszorzat felületek

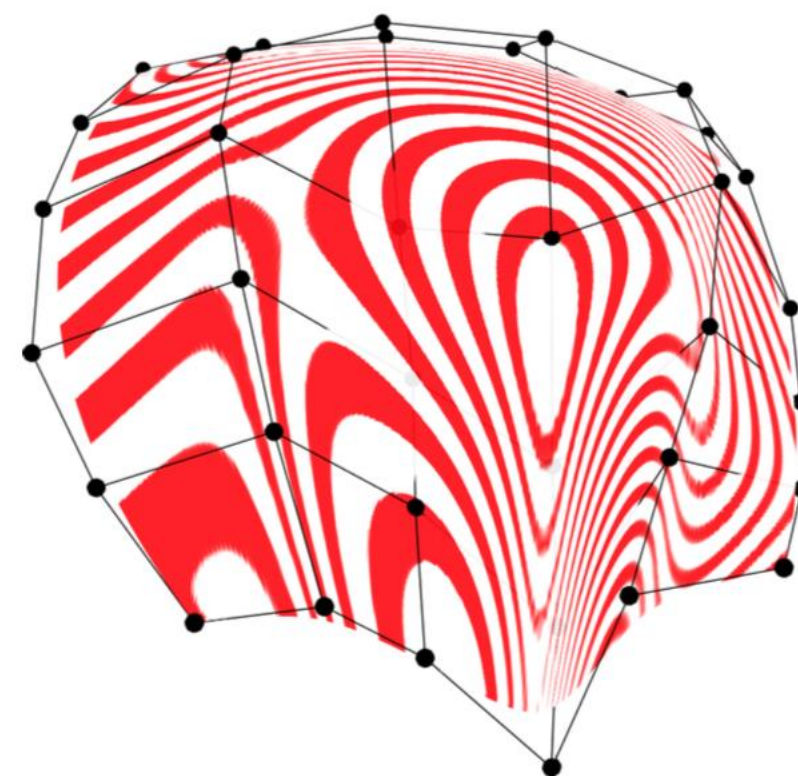
- $$S^{\gamma_u, \gamma_v}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{ij} M_i^{n, \gamma_u}(u) M_j^{m, \gamma_v}(v)$$



Bézier



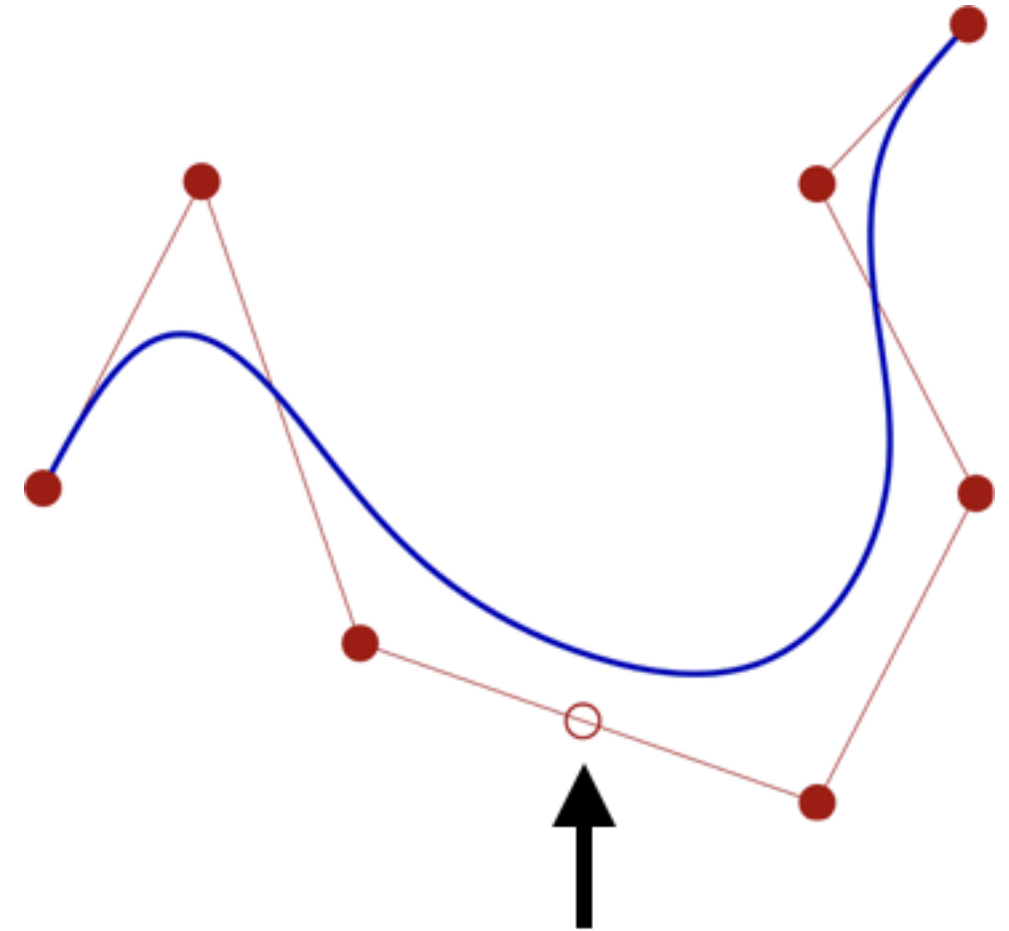
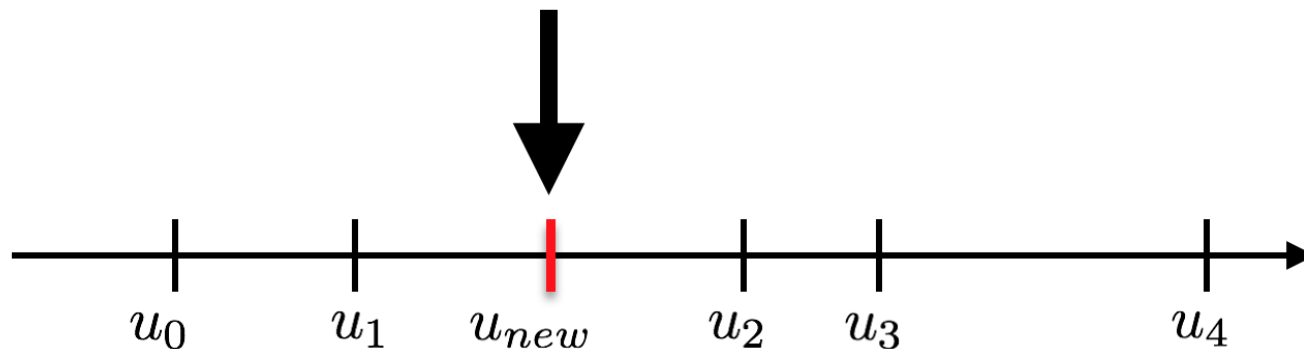
P-Bézier ($\gamma_u = 0.3, \gamma_v = 0.8$)



Kontrollpont beszúrás

- A görbe és a kontrollpolygon egyaránt megmarad

1. új talppont beszúrva



2. új kontrollpont a húron

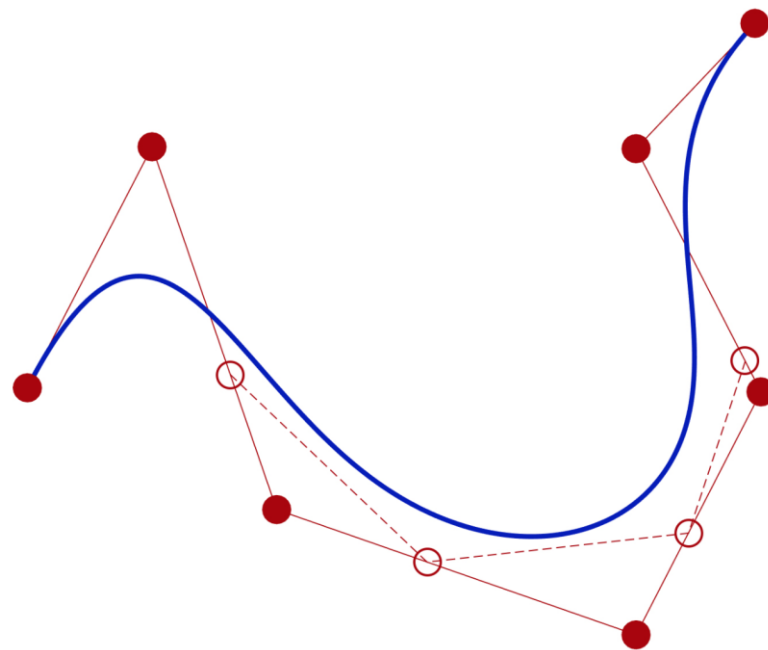
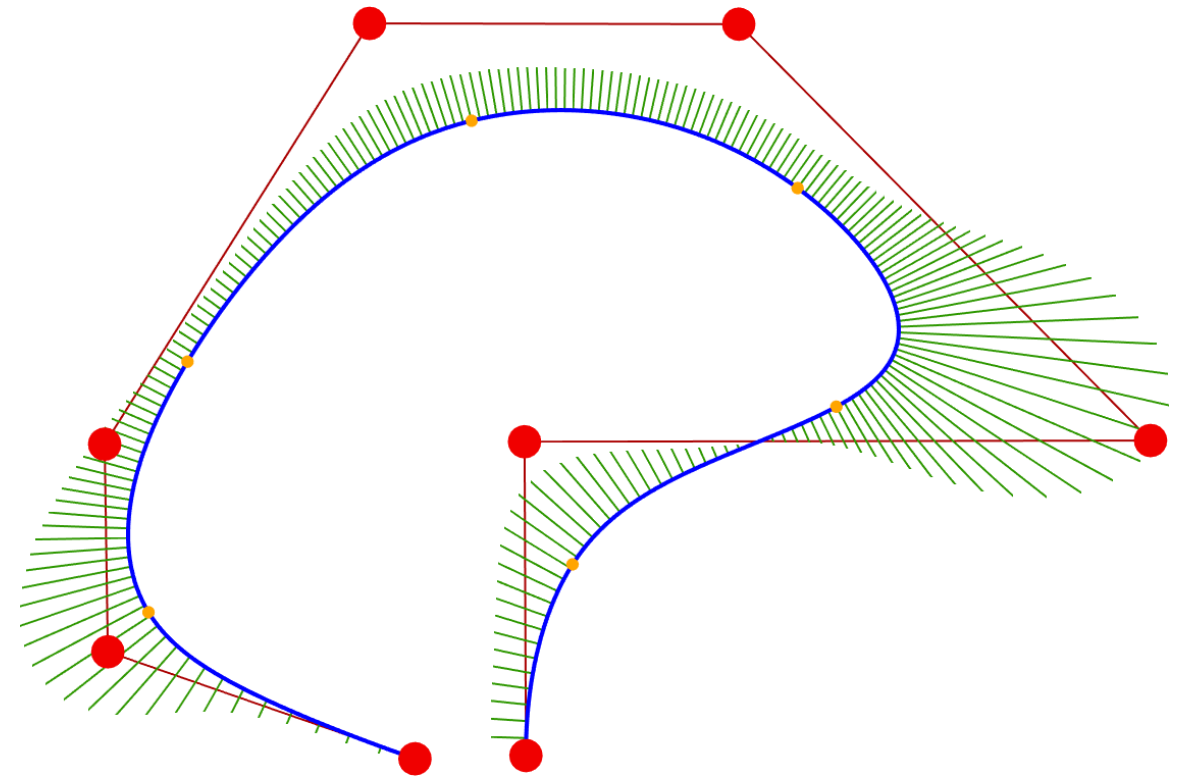
$$M_i \mathbf{P}_i + M_{i+1} \mathbf{P}_{i+1} = M_i^* \mathbf{P}_i + M^* \mathbf{P}^* + M_{i+1}^* \mathbf{P}_{i+1}$$

Összefoglalás

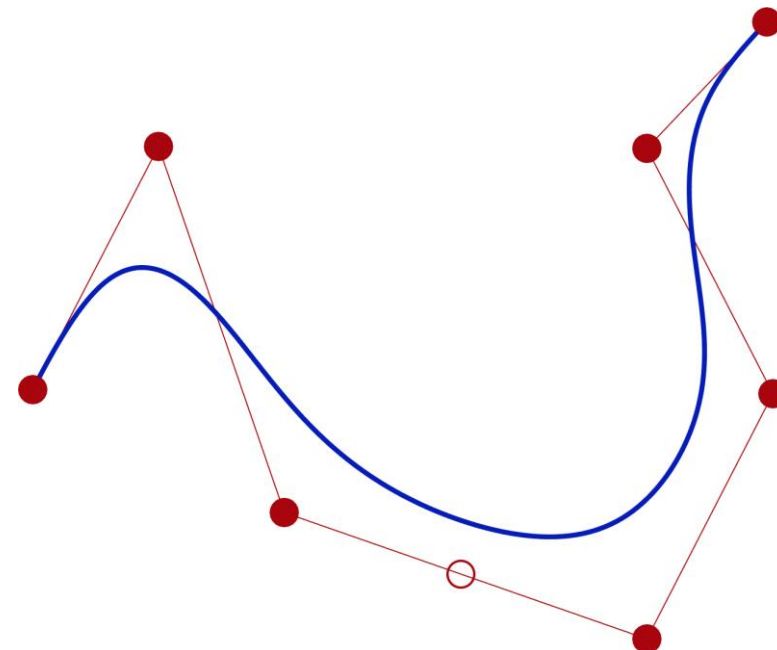
- Új kontrollpont alapú görbe reprezentáció
- Egy folytonos paraméterrel definiált görbecsalád
- Bézier görbe - reprodukálható
- C^∞ folytonosság
- Előnyös approximációs tulajdonságok

További eredmények

- P-Bspline
- Nem uniform talppont vektor



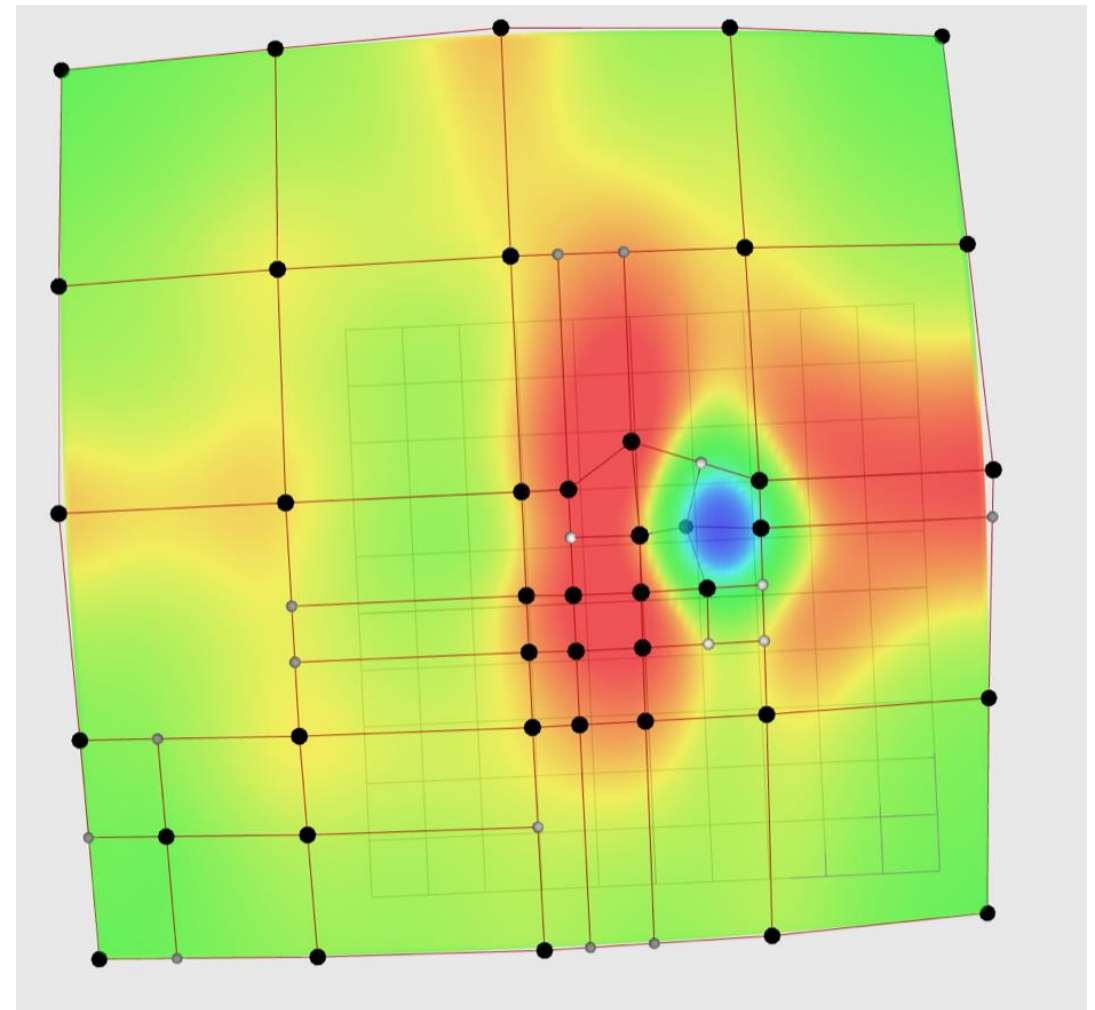
B-spline



P-Bspline

Jövőbeli tervek

- Felosztás
- Felületek:
 - N-oldalú felület
 - T-mesh



Köszönöm a
figyelmet!