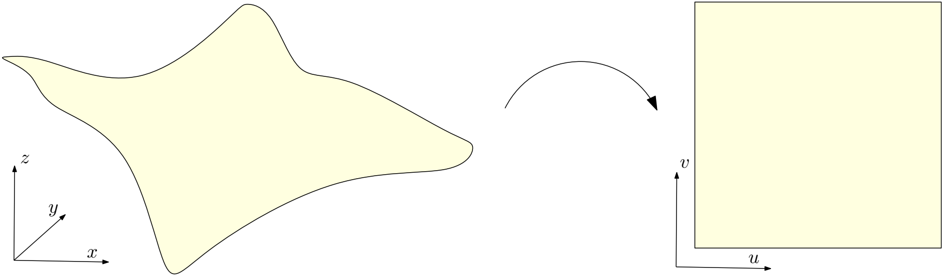
Hálóparaméterezés II.

Vaitkus Márton

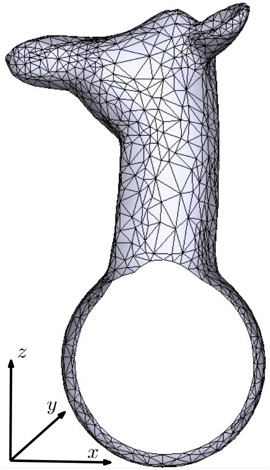
3D Számítógépes Geometria 2 (2018)

Az előző előadás tartalmából...

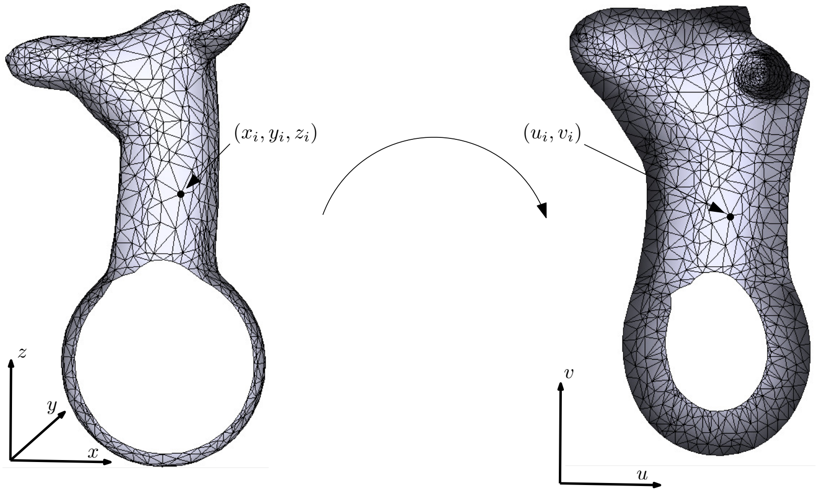
Paraméterezés – Inverz Feladat: 3D → 2D



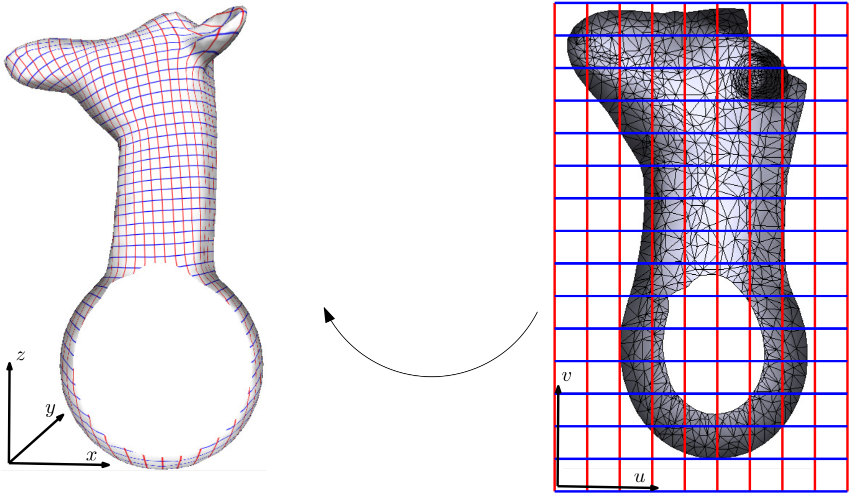
Feladat: 3D Háromszögháló $\to$ 2D Háromszögháló



Feladat: 3D Háromszögháló → 2D Háromszögháló

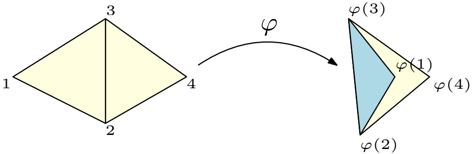


Feladat: 3D Háromszögháló → 2D Háromszögháló

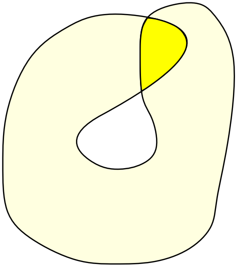


Paraméterezés követelményei: Egyértelműség

- A leképezés legyen 1-1 (**injektív**) – háromszöghálókra:



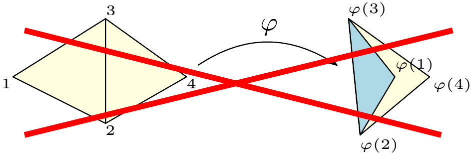
Lokális injektivitás
(Háromszögek nem fordulnak át.)



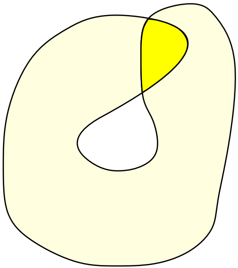
Globális injektivitás
(Határgörbe nem metszi önmagát.)

Paraméterezés követelményei: Egyértelműség

- A leképezés legyen 1-1 (**injektív**) – háromszöghálókra:



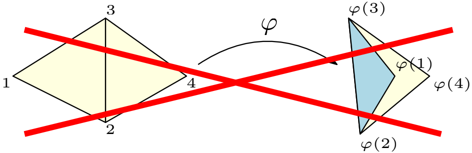
Lokális injektivitás
(Háromszögek nem fordulnak át.)



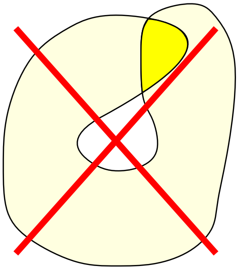
Globális injektivitás
(Határgörbe nem metszi önmagát.)

Paraméterezés követelményei: Egyértelműség

- A leképezés legyen 1-1 (**injektív**) – háromszöghálókra:



Lokális injektivitás
(Háromszögek nem fordulnak át.)



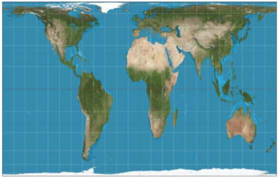
Globális injektivitás
(Határgörbe nem metszi önmagát.)

Paraméterezés követelményei: Torzítás

- Régi hagyományok: térképészet
- Minden térkép torzít! – Differenciálgeometriai tétel
- Kompromisszumot kell kötni – **torzítási mérték** minimalizálása

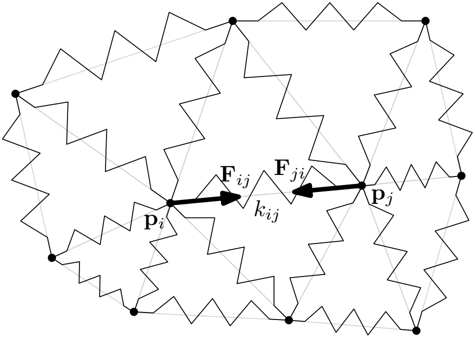
Földgömb

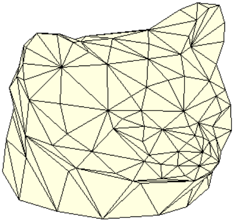
Szögtartó (Mercator)



Területtartó

Tutte módszere – Alapötlet: élek = rugók



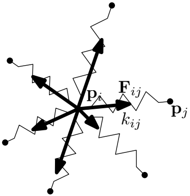


Rugóerő: $\mathbf{F}_{ij} = -k_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p_j})$

Tutte módszere – Egyenletrendszer

- **Egyensúly** feltétele: erők összege 0
- A $\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$ pontban:

$$\Big(\sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} k_{ij}\Big)\mathbf{p}_i - \sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} k_{ij}\mathbf{p}_j = 0$$



- **Lineáris egyenletrendszer** az u, v koordinátákra:

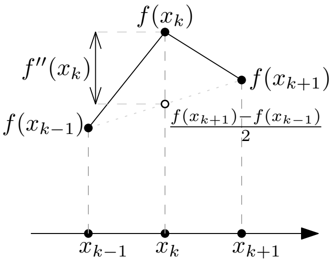
$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{L}\mathbf{v} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{L}_{ij} = \begin{cases} \sum_{k \neq i} k_{ik} & i = j \\ -k_{ij} & i \neq j \end{cases}$$

- Határgörbe fix – nincs rá egyenlet, átkerül a jobboldalra

Laplace-operátor és harmonikus függvények

- Második derivált közelítése:

$$f''(x_i) \approx 2\frac{\frac{x_{i+1}+x_{i-1}}{2} - x_i}{h^2}$$

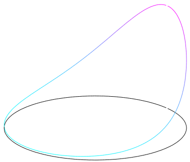


- Intuíció: eltérés a pont körüli átlagtól
- Általánosítás – **Laplace-operátor**:

$$\Delta f(x_1, \dots x_d) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \mathrm{div}(\mathrm{grad} f)$$

- **Laplace-egyenlet** – *harmonikus függvények*:

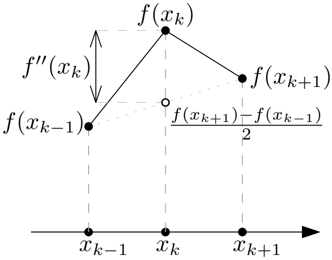
$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= 0, & x &\in \mathrm{int}\Omega \\ f(x) &= f_0(x) & x &\in \partial\Omega \end{aligned}$$



Laplace-operátor és harmonikus függvények

- Második derivált közelítése:

$$f''(x_i) \approx 2\frac{\frac{x_{i+1}+x_{i-1}}{2} - x_i}{h^2}$$

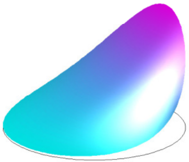


- Intuíció: eltérés a pont körüli átlagtól
- Általánosítás – **Laplace-operátor**:

$$\Delta f(x_1, \ldots x_d) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \mathrm{div}(\mathrm{grad} f)$$

- **Laplace-egyenlet** – *harmonikus függvények*:

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= 0, & x &\in \mathrm{int}\Omega \\ f(x) &= f_0(x) & x &\in \partial\Omega \end{aligned}$$



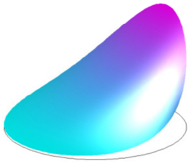
Tutte = Diszkrét Harmonikus?

- Tutte – egyenlet pl. u_i-ra:

$$u_i - \sum_j \left(\frac{k_{ij}}{\sum_l k_{il}} \right) u_j = 0$$

- "Átlagtól való eltérés = 0"
- $\mathbf{Lu} = \mathbf{0}$ " $\approx$ " $\Delta u = 0$?
- $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ – diszkrét harmonikus függvények?
- Háromszögenként lineáris fv. – sátorfüggvények lin. kombinációja:

$$u(x) \approx \sum u_i \varphi_i(x)$$



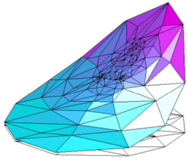
- De lineáris függvényre triviálisan $\Delta u \equiv 0$... ☠

Tutte = Diszkrét Harmonikus?

- Tutte – egyenlet pl. u_i-ra:

$$u_i - \sum_j \left(\frac{k_{ij}}{\sum_l k_{il}} \right) u_j = 0$$

- "Átlagtól való eltérés = 0"
- $\mathbf{Lu} = \mathbf{0}$ " $\approx$ " $\Delta u = 0$?
- $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ – diszkrét harmonikus függvények?
- Háromszögenként lineáris fv. – sátorfüggvények lin. kombinációja:



$$u(x) \approx \sum u_i \varphi_i(x)$$

- De lineáris függvényre triviálisan $\Delta u \equiv 0$... ☠

A Dirichlet-energia

- Laplace-egyenlet:

$$\Delta f = 0$$

- "Függvény ne változzon sokat"
- Függvény változása = Gradiens hossznégyzete integrálva

$$\int_\Omega |\nabla f|^2 \; d\Omega \to \min.$$

Dirichlet-energia – Laplace-egyenlet megoldása minimalizálja:

$$\boxed{E_D[f] = \int_\Omega |\nabla f|^2 \, d\Omega \to \min. \Leftrightarrow \Delta f = 0}$$

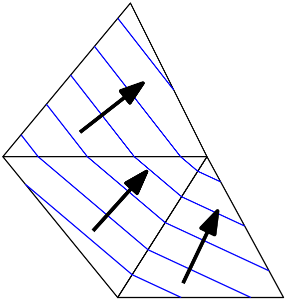
Dirichlet-energia háromszöghálóra

- Dirichlet-energia:

$$\boxed{E_D[f] = \int_\Omega |\nabla f|^2 \, d\Omega \to \min.}$$

- Háromszögenként lineáris függvény $f(x) \approx \sum_i f_i \varphi_i(x)$ – gradiense konstans:

$$E_D[f] \approx \sum_{T \in \mathcal{T}} A_T \, |\nabla f|^2$$



Gradiens a háromszögben

- Lineáris interpoláció – baricentrikus koordináták:

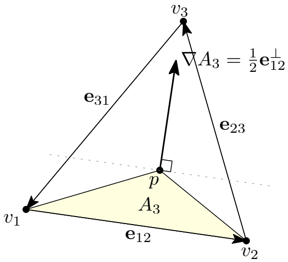
$$\nabla f(p) = \frac{1}{A}\left(\nabla A_1 f(\mathbf{v}_1) + \nabla A_2 f(\mathbf{v}_2) + \nabla A_3 f(\mathbf{v}_3)\right)$$

- Terület gradiense:

$$\nabla A_3 = \frac{1}{2}\mathbf{e}_{12}^{\perp}$$

- Így a gradiens:

$$\nabla f(T) = \underbrace{\frac{1}{2A_T}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_{23}^{\perp} & \mathbf{e}_{31}^{\perp} & \mathbf{e}_{12}^{\perp}\end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_T}\begin{bmatrix} f(\mathbf{v}_1) \\ f(\mathbf{v}_2) \\ f(\mathbf{v}_3)\end{bmatrix}.$$



Mit kaptunk?

- Behelyettesítve a gradienst a Dirichlet-energiába:

$$E_D(T) = A_T\,|\nabla f(T)|^2 = A_T(\nabla f(T))^T \nabla f(T)$$
$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} f(\mathbf{v}_1) \\ f(\mathbf{v}_2) \\ f(\mathbf{v}_3) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -(\cot\theta_{12}+\cot\theta_{31}) & \cot\theta_{12} & \cot\theta_{31} \\ \cot\theta_{12} & -(\cot\theta_{12}+\cot\theta_{23}) & \cot\theta_{23} \\ \cot\theta_{23} & \cot\theta_{31} & -(\cot\theta_{23}+\cot\theta_{31}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\mathbf{v}_1) \\ f(\mathbf{v}_2) \\ f(\mathbf{v}_3) \end{bmatrix}$$

- Összeadva:

$$\frac{1}{2}\mathbf{f}^T\mathbf{L}\mathbf{f} \to \min. \Leftrightarrow \mathbf{L}\mathbf{f} = \mathbf{0}$$

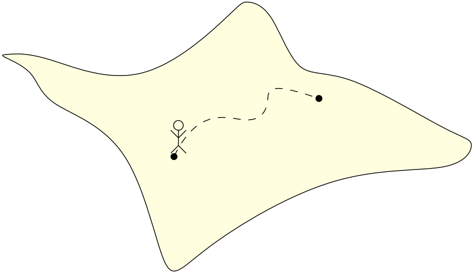
L a korábbi **Tutte-mátrix kotangens súlyokkal**

$$\mathbf{L}_{ij} = \begin{cases} \sum_{k\neq i} \frac{\cot\theta_{ik}+\cot\theta_{ki}}{2} & i = j \\ -\frac{\cot\theta_{ij}+\cot\theta_{ji}}{2} & i \neq j \end{cases}$$

Miről lesz szó

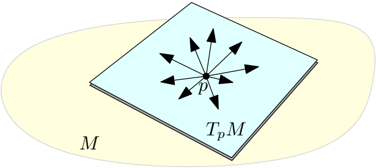
Belső (intrinsic) geometria

- Vizsgáljuk a felületet belülről (mint a felület lakója)
- Felület minden pont körül síknak (Euklideszinek) tűnik...
- Rajzoljunk görbéket a felületen...



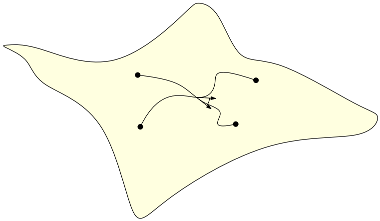
Érintőtér, metrika

- Minden p pontban értelmezhetőek a pont körüli irányok – **érintősík**, T_pM



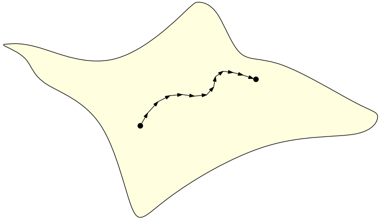
Érintőtér, metrika

- Minden p pontban értelmezhetőek a pont körüli irányok – **érintősík**, T_pM
- Görbék szöge – érintővektorok szöge



Erintőtér, metrika

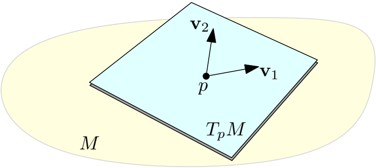
- Minden p pontban értelmezhetőek a pont körüli irányok – **érintősík**, T_pM
- Görbék szöge – érintővektorok szöge
- Görbék ívhossza – érintővektorok hossza



Érintőtér, metrika

- Minden p pontban értelmezhetőek a pont körüli irányok – **érintősík**, T_pM
- Görbék szöge – érintővektorok szöge
- Görbék ívhossza – érintővektorok hossza
- Érintővektorok skalárszorzata – **metrika** (metrikus tenzor, első fundamentális forma, stb.):

$$\begin{aligned} g_p : T_pM \times T_pM &\to \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &\mapsto \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \end{aligned}$$

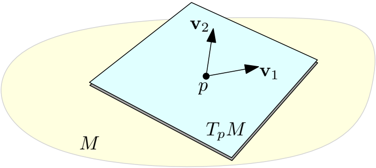


Erintőtér, metrika

- Minden p pontban értelmezhetőek a pont körüli irányok – **érintősík**, T_pM
- Görbék szöge – érintővektorok szöge
- Görbék ívhossza – érintővektorok hossza
- Érintővektorok skalárszorzata – **metrika** (metrikus tenzor, első fundamentális forma, stb.):

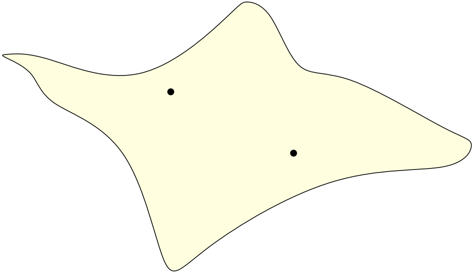
$$\begin{aligned} g_p : T_pM \times T_pM &\to \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &\mapsto \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \end{aligned}$$

- A metrika meghatározza a belső geometriát – hosszak, szögek, területek



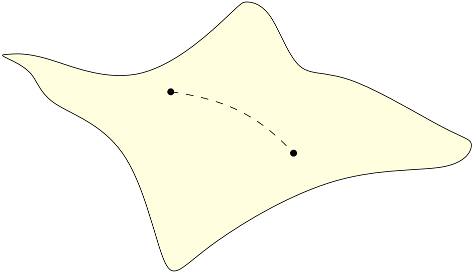
Geodetikusok

- Meghatározható a legrövidebb út ("egyenes") két pont között – **geodetikus görbe**



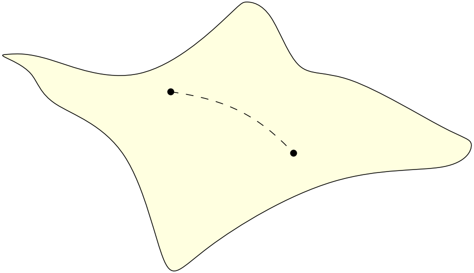
Geodetikusok

- Meghatározható a legrövidebb út ("egyenes") két pont között – **geodetikus görbe**



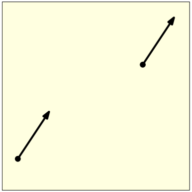
Geodetikusok

- Meghatározható a legrövidebb út ("egyenes") két pont között – **geodetikus görbe**
- Görbe eltérése az egyenestől – **geodetikus görbület**



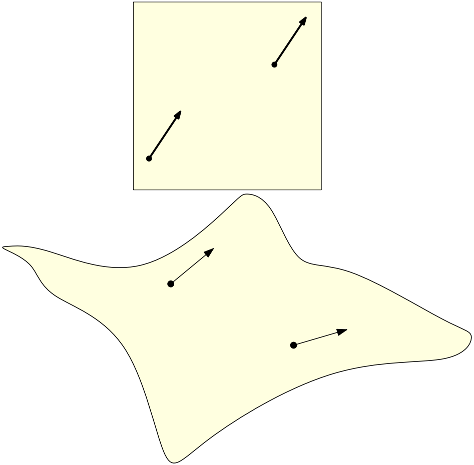
Párhuzamos eltolás

- Metrika birtokában – vektor **párhuzamos eltolása** a felületen



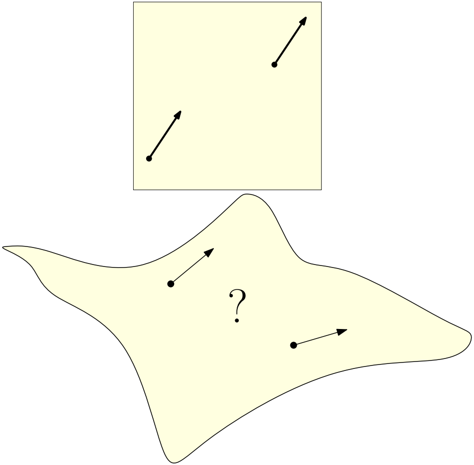
Párhuzamos eltolás

- Metrika birtokában – vektor **párhuzamos eltolása** a felületen
- A síkon triviális...



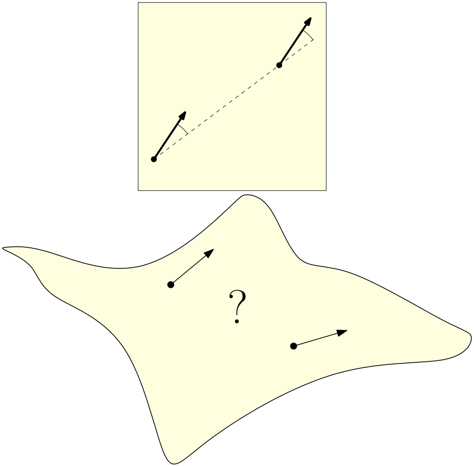
Párhuzamos eltolás

- Metrika birtokában – vektor **párhuzamos eltolása** a felületen
- A síkon triviális...
- ... felületen nem egyértelmű



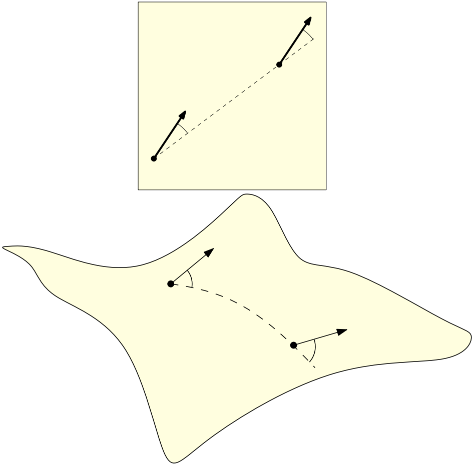
Párhuzamos eltolás

- Metrika birtokában – vektor **párhuzamos eltolása** a felületen
- A síkon triviális...
- ... felületen nem egyértelmű
- Ötlet: Geodetikussal bezárt szög ugyanaz



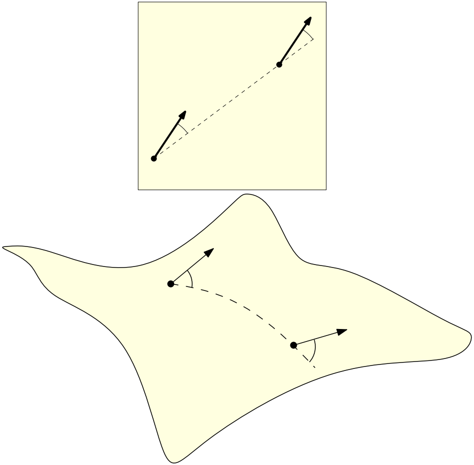
Párhuzamos eltolás

- Metrika birtokában – vektor **párhuzamos eltolása** a felületen
- A síkon triviális...
- ... felületen nem egyértelmű
- Ötlet: Geodetikussal bezárt szög ugyanaz

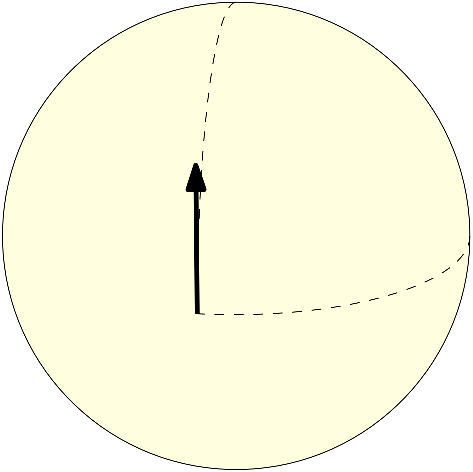


Párhuzamos eltolás

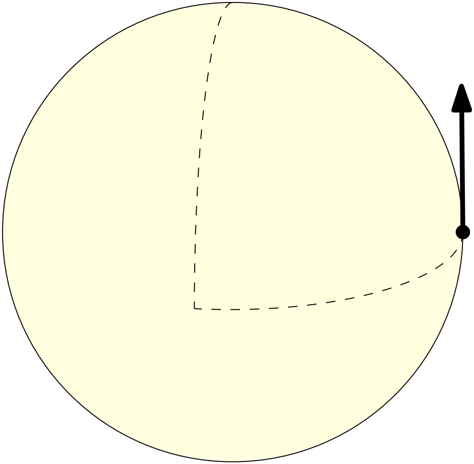
- Metrika birtokában – vektor **párhuzamos eltolása** a felületen
- A síkon triviális...
- ... felületen nem egyértelmű
- Ötlet: Geodetikussal bezárt szög ugyanaz
- Példa: vektor eltolása gömbön



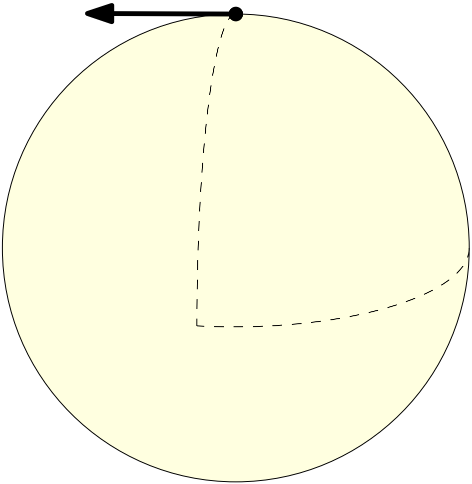
Párhuzamos eltolás a gömbön



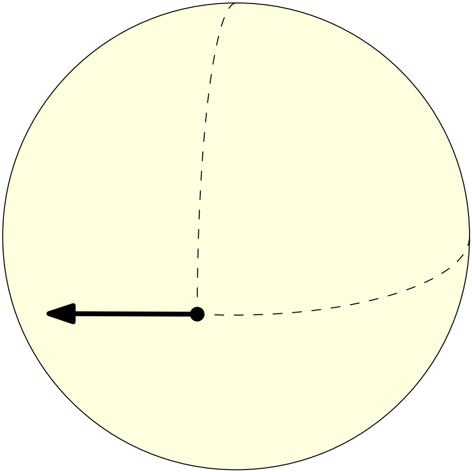
Párhuzamos eltolás a gömbön



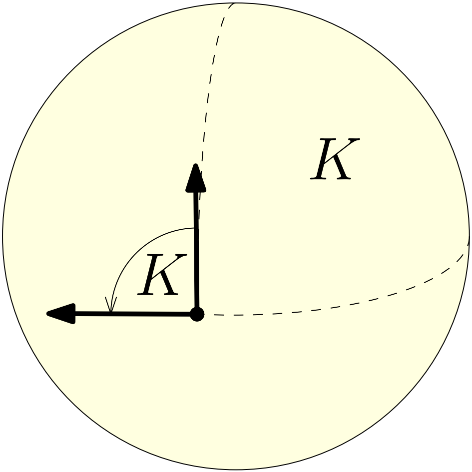
Párhuzamos eltolás a gömbön



Párhuzamos eltolás a gömbön

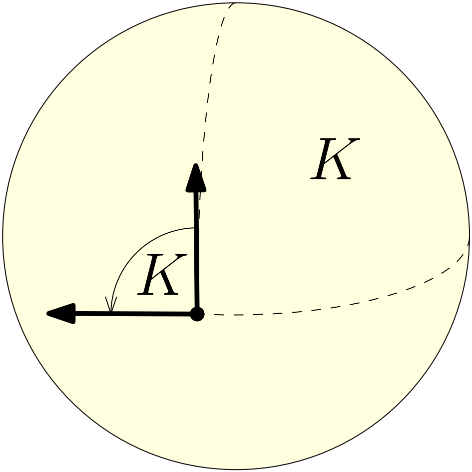


Párhuzamos eltolás a gömbön



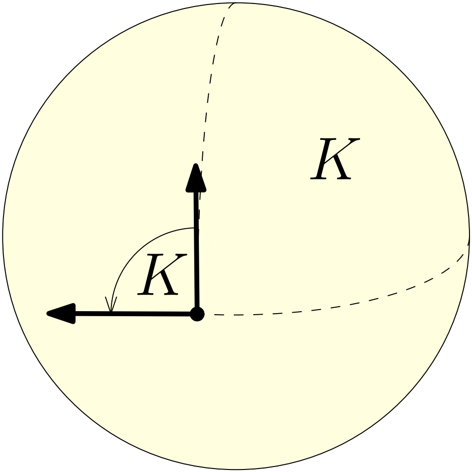
Görbület, Theorema Egregium

- Vektor elfordult! – **Görbület**



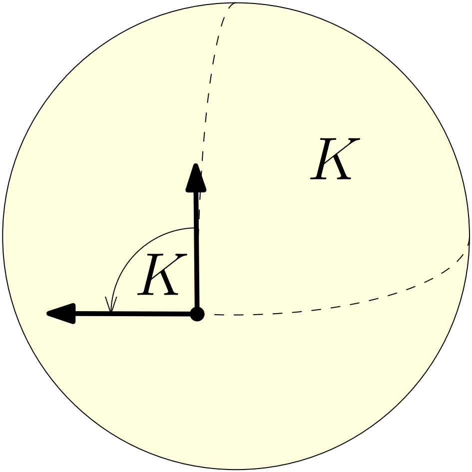
Görbület, Theorema Egregium

- Vektor elfordult! – **Görbület**
- A (gaussi) görbület a metrika függvénye



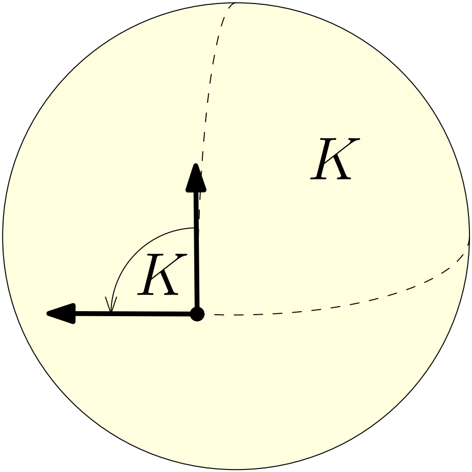
Görbület, Theorema Egregium

- Vektor elfordult! – **Görbület**
- A (gaussi) görbület a metrika függvénye
- Két különböző görbületű felületre nem lehet ugyanaz a metrika – minden leképezés torzít!



Görbület, Theorema Egregium

- Vektor elfordult! – **Görbület**
- A (gaussi) görbület a metrika függvénye
- Két különböző görbületű felületre nem lehet ugyanaz a metrika – minden leképezés torzít!
- Következmény: a Földnek nem létezik tökéletes térképe – **Theorema Egregium** [Gauss, 1848]



Érintőtér, Metrika – Háromszöghálókon

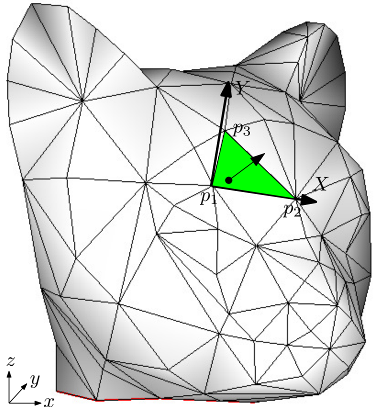
- Háromszöghálókon: szögek, távolságok – élhosszak

Érintőtér, Metrika – Háromszöghálókon

- Háromszöghálókon: szögek, távolságok – élhosszak
- Érintőtér – háromszögek

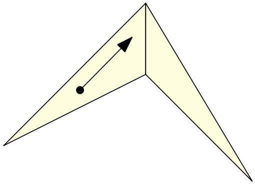
Érintőtér, Metrika – Háromszöghálókon

- Háromszöghálókon: szögek, távolságok – élhosszak
- Érintőtér – háromszögek
- Érintővektor-mező – háromszögenként konstans



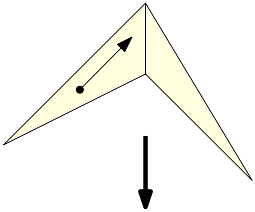
Párhuzamos eltolás, Görbület – Háromszöghálókon

- Párhuzamos eltolás – egyik háromszögről a másikra, síkbahajlítás után



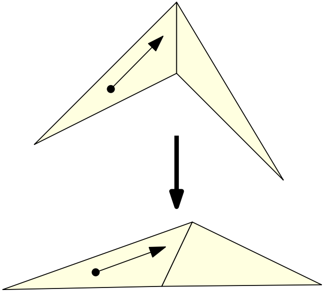
Párhuzamos eltolás, Görbület – Háromszöghálókon

- Párhuzamos eltolás – egyik háromszögről a másikra, síkbahajlítás után



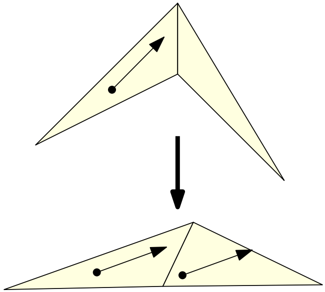
Párhuzamos eltolás, Görbület – Háromszöghálókon

- Párhuzamos eltolás – egyik háromszögről a másikra, síkbahajlítás után



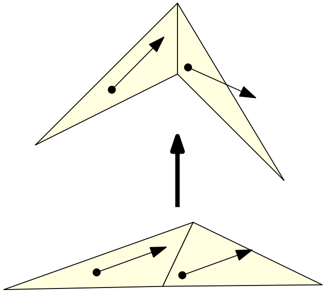
Párhuzamos eltolás, Görbület – Háromszöghálókon

- Párhuzamos eltolás – egyik háromszögről a másikra, síkbahajlítás után



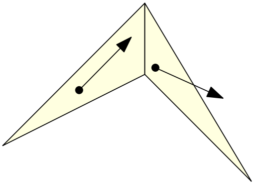
Párhuzamos eltolás, Görbület – Háromszöghálókon

- Párhuzamos eltolás – egyik háromszögről a másikra, síkbahajlítás után



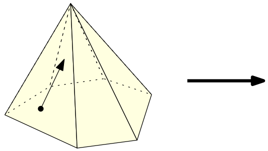
Párhuzamos eltolás, Görbület – Háromszöghálókon

- Párhuzamos eltolás – egyik háromszögről a másikra, síkbahajlítás után



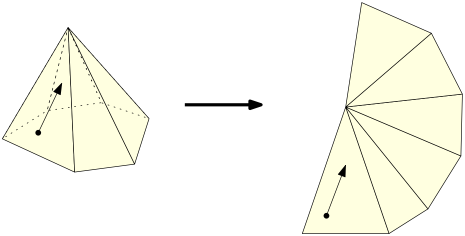
Párhuzamos eltolás, Görbület – Háromszöghálókon

- Párhuzamos eltolás – egyik háromszögről a másikra, síkbahajlítás után
- Csúcspontbeli görbület



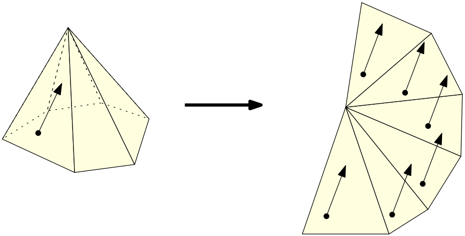
Párhuzamos eltolás, Görbület – Háromszöghálókon

- Párhuzamos eltolás – egyik háromszögről a másikra, síkbahajlítás után
- Csúcspontbeli görbület



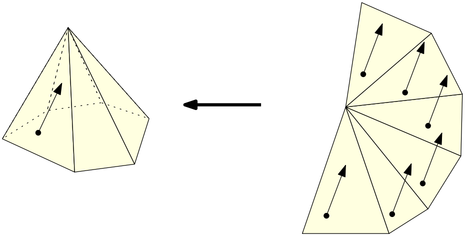
Párhuzamos eltolás, Görbület – Háromszöghálókon

- Párhuzamos eltolás – egyik háromszögről a másikra, síkbahajlítás után
- Csúcspontbeli görbület



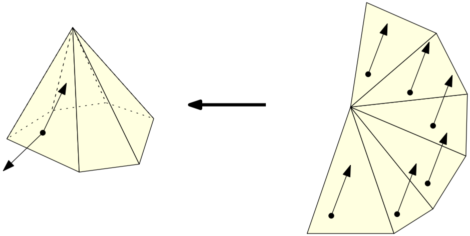
Párhuzamos eltolás, Görbület – Háromszöghálókon

- Párhuzamos eltolás – egyik háromszögről a másikra, síkbahajlítás után
- Csúcspontbeli görbület



Párhuzamos eltolás, Görbület – Háromszöghálókon

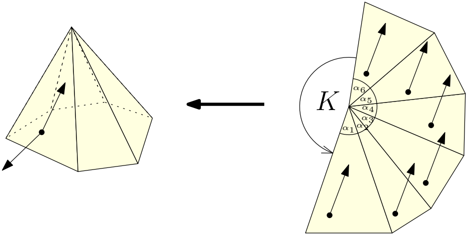
- Párhuzamos eltolás – egyik háromszögről a másikra, síkbahajlítás után
- Csúcspontbeli görbület



Párhuzamos eltolás, Görbület – Háromszöghálókon

- Párhuzamos eltolás – egyik háromszögről a másikra, síkbahajlítás után
- Csúcspontbeli görbület – háromszöglegyező szöghibája:

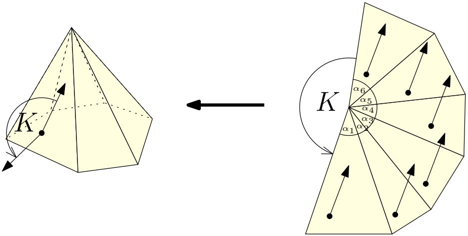
$$K = 2\pi - \sum_i \alpha_i$$



Párhuzamos eltolás, Görbület – Háromszöghálókon

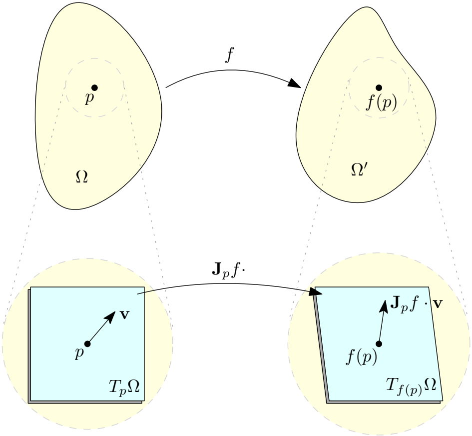
- Párhuzamos eltolás – egyik háromszögről a másikra, síkbahajlítás után
- Csúcspontbeli görbület – háromszöglegyező szöghibája:

$$K = 2\pi - \sum_i \alpha_i$$



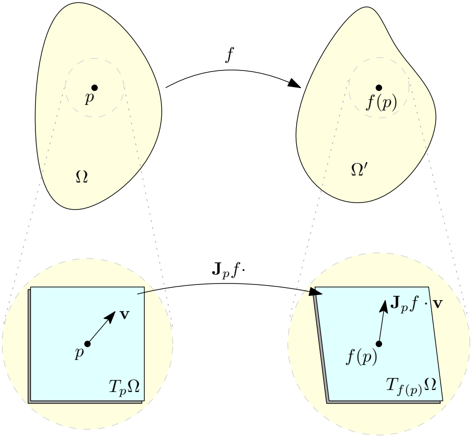
Jacobi-mátrix

- Pont körüli kis környezetben minden leképezés lineáris



Jacobi-mátrix

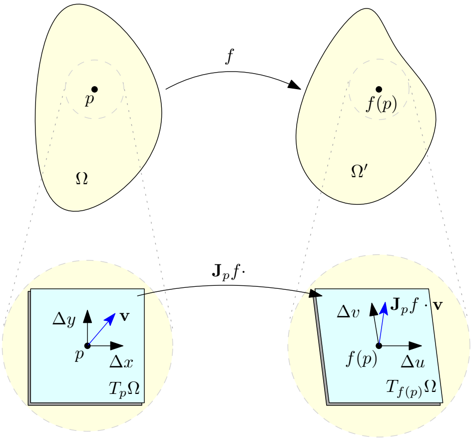
- Pont körüli kis környezetben minden leképezés lineáris
- Kis elmozdulást kis elmozdulásra képzünk – lineárisan



Jacobi-mátrix

- Pont körüli kis környezetben minden leképezés lineáris
- Kis elmozdulást kis elmozdulásra képzünk – lineárisan
- Pont körüli lokális (x, y) es (u, v) koordinátákban kifejezve:

$$\begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

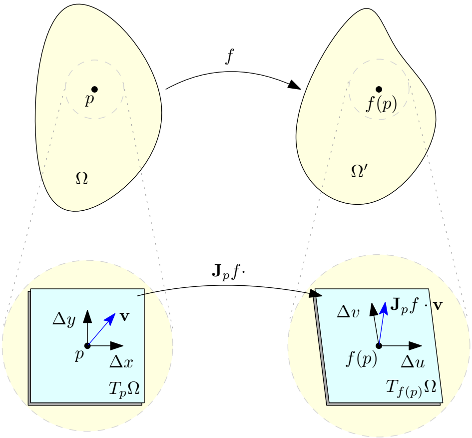


Jacobi-mátrix

- Pont körüli kis környezetben minden leképezés lineáris
- Kis elmozdulást kis elmozdulásra képzünk – lineárisan
- Pont körüli lokális (x, y) es (u, v) koordinátákban kifejezve:

$$\begin{bmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\nabla u^T\\ \nabla v^T\end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_p} \begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix}$$

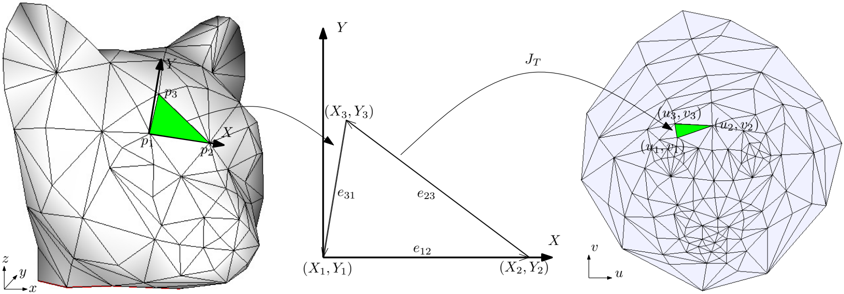
- $\mathbf{J}_p$: **Jacobi-mátrix**



Jacobi-mátrix háromszöghálókon

- Háromszöghálókon – háromszögenként lineáris leképezés
- Jacobi-mátrix – háromszögenként konstans
- Háromszög feletti gradiensből:

$$\mathbf{J}(T) = \begin{bmatrix} \nabla u^T(T) \\ \nabla v^T(T) \end{bmatrix} = \frac{1}{2A_T} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{23}^{\perp} & \mathbf{e}_{31}^{\perp} & \mathbf{e}_{12}^{\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(p_1) & v(p_1) \\ u(p_2) & v(p_2) \\ u(p_3) & v(p_3) \end{bmatrix}.$$



Lineáris leképezés torzítása

- A metrika torzítása:

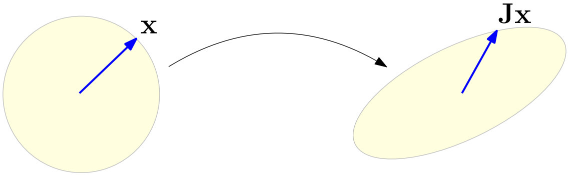
$$\frac{\|\mathbf{Jx}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{J}^T\mathbf{Jx}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$$

Lineáris leképezés torzítása

- A metrika torzítása:

$$\frac{\|\mathbf{Jx}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{J}^T\mathbf{Jx}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$$

- Egységkör képe ellipszis

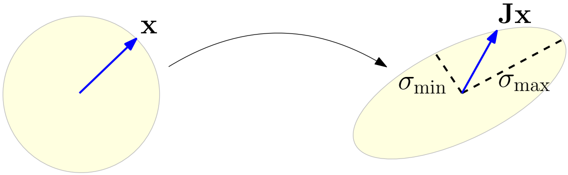


Lineáris leképezés torzítása

- A metrika torzítása:

$$\frac{\|\mathbf{J}\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{J}^T\mathbf{J}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$$

- Egységkör képe ellipszis
- Ellipszis tengelyei a legnagyobb nyújtás/zsugorítás irányai: $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$ – $\mathbf{J}$ **szinguláris értékei**.



Izometrikus paraméterezés – 1. kísérlet

- Ideális eset: $\mathbf{J} = \mathbf{I}$?

Izometrikus paraméterezés – 1. kísérlet

- Ideális eset: $\|\mathbf{Jx}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$!

Izometrikus paraméterezés – 1. kísérlet

- Ideális eset: $\mathbf{x}^T \mathbf{J}^T \mathbf{J} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$

Izometrikus paraméterezés – 1. kísérlet

- Ideális eset: $\mathbf{J}^T\mathbf{J} = \mathbf{I}$

Izometrikus paraméterezés – 1. kísérlet

- Ideális eset: $\mathbf{J}^T\mathbf{J} = \mathbf{I}$
- Másképp: $\mathbf{J}$ legyen **forgatómátrix**!

Izometrikus paraméterezés – 1. kísérlet

- Ideális eset: $\mathbf{J}^T\mathbf{J} = \mathbf{I}$
- Másképp: $\mathbf{J}$ legyen **forgatómátrix**!
- Minimalizált torzítási mérték:

$$E_{\mathrm{G-L}} = \sum_{T \in \mathcal{T}} A_T \left\| \mathbf{J}^T\mathbf{J} - \mathbf{I} \right\|_F^2 \to \min.$$

Izometrikus paraméterezés – 1. kísérlet

- Ideális eset: $\mathbf{J}^T\mathbf{J} = \mathbf{I}$
- Másképp: $\mathbf{J}$ legyen **forgatómátrix**!
- Minimalizált torzítási mérték:

$$E_{\mathrm{G-L}} = \sum_{T \in \mathcal{T}} A_T \left\| \mathbf{J}^T\mathbf{J} - \mathbf{I} \right\|_F^2 \to \min.$$

- **Green-Lagrange tenzor** – Jacobi-mátrix lineáris függveny $\Rightarrow$ negyedfokú energia!

Izometrikus paraméterezés – 1. kísérlet

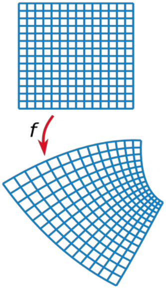
- Ideális eset: $\mathbf{J}^T\mathbf{J} = \mathbf{I}$
- Másképp: $\mathbf{J}$ legyen **forgatómátrix**!
- Minimalizált torzítási mérték:

$$E_{\mathrm{G-L}} = \sum_{T \in \mathcal{T}} A_T \left\| \mathbf{J}^T\mathbf{J} - \mathbf{I} \right\|_F^2 \to \min.$$

- **Green-Lagrange tenzor** – Jacobi-mátrix lineáris függveny ⇒ negyedfokú energia!
- Még visszatérünk rá...

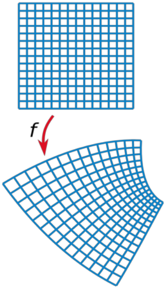
Szögtartas – Feltétel

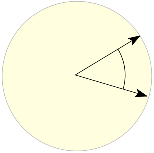
- Leképezés legyen **szögtartó (konform)**



Szögtartas – Feltétel

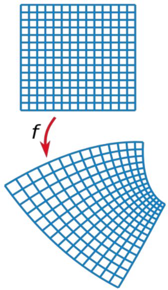
- Leképezés legyen **szögtartó** (**konform**)
- Kört (kisebb vagy nagyobb) körre képez

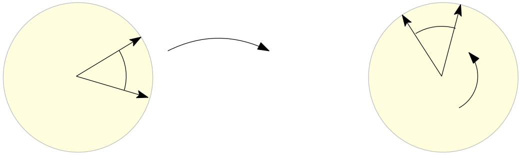




Szögtartas – Feltétel

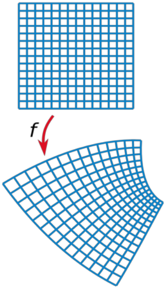
- Leképezés legyen **szögtartó (konform)**
- Kört (kisebb vagy nagyobb) körre képez

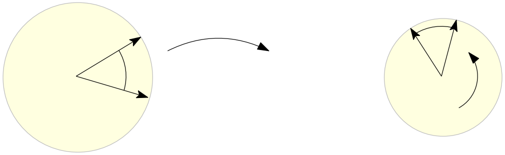




Szögtartas – Feltétel

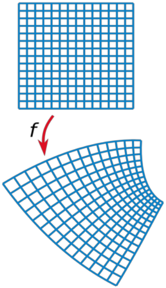
- Leképezés legyen **szögtartó** (**konform**)
- Kört (kisebb vagy nagyobb) körre képez

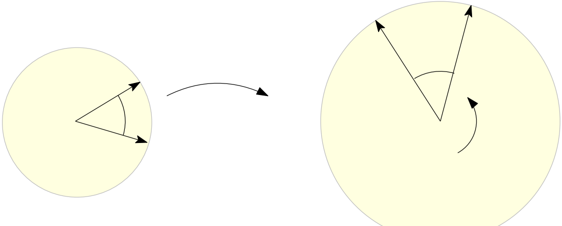




Szögtartas – Feltétel

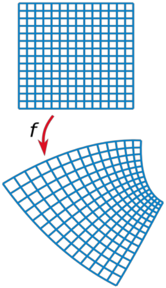
- Leképezés legyen **szögtartó (konform)**
- Kört (kisebb vagy nagyobb) körre képez



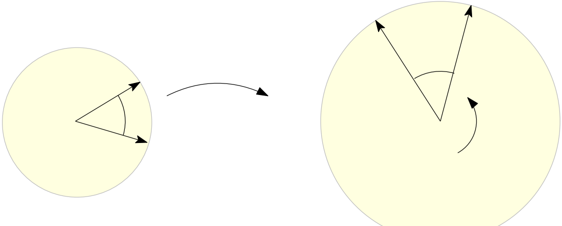


Szögtartas – Feltétel

- Leképezés legyen **szögtartó** (**konform**)
- Kört (kisebb vagy nagyobb) körre képez
- Szögtartás – (lokális) hasonlóság – forgatás + skálázás:



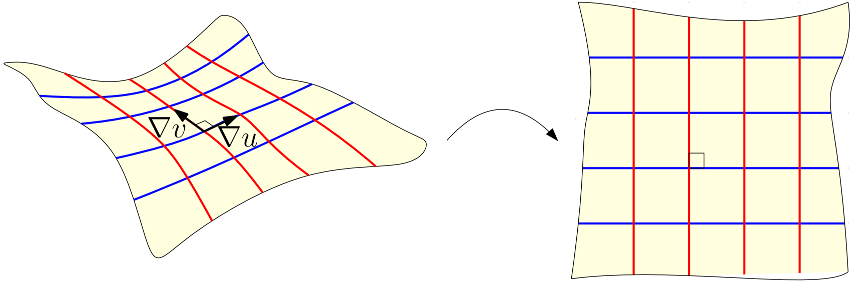
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \nabla u^T \\ \nabla v^T \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$



Szögtartás – Energia

- J sorai (∇u- es ∇v) merőlegesek egymásra es egyenlő hosszúak
- Legkisebb négyzetes értelemben teljesüljön:

$$E_{\text{conf.}}(u,v) = \sum_{T \in \mathcal{T}} A_T \left\| \nabla u - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \nabla v \right\|_F^2 \to \min.$$



Szögtartó Paraméterezés – Háromszöghálókon*

- Kifejtve:

$$E_{\mathrm{conf.}}(u,v)\big|_T = \left\| \nabla u - \nabla v^{\perp} \right\|^2$$

Szögtartó Paraméterezés – Háromszöghálókon*

- Kifejtve:

$$E_{\mathrm{conf.}}(u,v)\Big|_T = (\nabla u - \nabla v^{\perp})^T (\nabla u - \nabla v^{\perp})$$

Szögtartó Paraméterezés – Háromszöghálókon*

- Kifejtve:

$$E_{\mathrm{conf.}}(u,v)\big|_T = \nabla u^T \nabla u + \nabla v^T \nabla v - 2 \nabla u^T \nabla v^\perp$$

Szögtartó Paraméterezés – Háromszöghálókon*

- Kifejtve:

$$E_{\text{conf.}}(u,v)\Big|_T = \underbrace{\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2}_{\text{Dirichlet}} - 2\underbrace{(\nabla u)^T \nabla v^{\perp}}$$

Szögtartó Paraméterezés – Háromszöghálókon*

- Kifejtve:

$$E_{\text{conf.}}(u,v)\big|_T = \underbrace{\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2}_{\text{Dirichlet}} - 2 \underbrace{(\nabla u)^T \nabla v^{\perp}}_{|\nabla u||\nabla v|\cos(\varphi+90^\circ)}$$

Szögtartó Paraméterezés – Háromszöghálókon*

- Kifejtve:

$$E_{\mathrm{conf.}}(u,v)\big|_T = \underbrace{\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2}_{\text{Dirichlet}} - 2\underbrace{(\nabla u)^T \nabla v^{\perp}}_{|\nabla u||\nabla v|\sin(\varphi)}$$

Szögtartó Paraméterezés – Háromszöghálókon*

- Kifejtve:

$$E_{\text{conf.}}(u,v)\Big|_T = \underbrace{\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2}_{\text{Dirichlet}} - 2\underbrace{(\nabla u)^T \nabla v^\perp}_{\nabla u \times \nabla v}$$

Szögtartó Paraméterezés – Háromszöghálókon*

- Kifejtve:

$$E_{\text{conf.}}(u,v)\big|_T = \underbrace{\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2}_{\text{Dirichlet}} - 2\underbrace{(\nabla u)^T \nabla v^{\perp}}_{A_T}$$

Szögtartó Paraméterezés – Háromszöghálókon*

- Kifejtve:

$$E_{\text{conf.}}(u,v)\big|_T = \underbrace{\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2}_{\text{Dirichlet}} - 2\underbrace{(\nabla u)^T \nabla v^\perp}_{A_T}$$

- Háromszöghálókon – $\nabla u = \mathbf{G}\mathbf{u}, \nabla v = \mathbf{G}\mathbf{v}$:

$$E_{\text{conf.}}(\mathbf{u},\mathbf{v})\big|_T = \mathbf{u}^T \underbrace{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}_{\mathbf{L}} \mathbf{u} + \mathbf{v}^T \underbrace{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}_{\mathbf{L}} \mathbf{v} - \begin{bmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v}\end{bmatrix} ??? \begin{bmatrix}\mathbf{u} \\ \mathbf{v}\end{bmatrix}$$

Szögtartó Paraméterezés – Háromszöghálókon*

- Kifejtve:

$$E_{\text{conf.}}(u,v)\big|_T = \underbrace{\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2}_{\text{Dirichlet}} - 2\underbrace{(\nabla u)^T \nabla v^{\perp}}_{A_T}$$

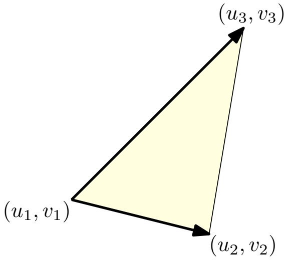
- Háromszöghálókon – $\nabla u = \mathbf{G}\mathbf{u}, \nabla v = \mathbf{G}\mathbf{v}$:

$$E_{\text{conf.}}(\mathbf{u},\mathbf{v})\big|_T = \mathbf{u}^T \underbrace{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}_{\mathbf{L}} \mathbf{u} + \mathbf{v}^T \underbrace{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}_{\mathbf{L}} \mathbf{v} - \begin{bmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v}\end{bmatrix} ??? \begin{bmatrix}\mathbf{u} \\ \mathbf{v}\end{bmatrix}$$

- $\mathbf{L}$ – kotangens Laplace-mátrix:

$$\mathbf{L}_{ij} = \begin{cases} \sum_{k\neq i} \frac{\cot\theta_{ik} + \cot\theta_{ki}}{2} & i = j \\ -\frac{\cot\theta_{ij} + \cot\theta_{ji}}{2} & i \neq j \end{cases}$$

Ujjgyakorlat*

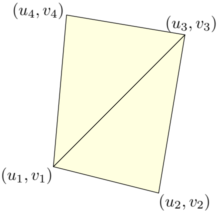


$$A_T = \det\left(\begin{bmatrix} u_2 - u_1 & u_3 - u_1 \\ v_2 - v_1 & v_3 - v_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \mathbf{A}_T \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_T = \dots$$

Ujjgyakorlat*

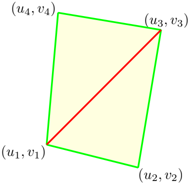
$$
\mathbf{A}_T = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
 & & & & 1 & -1 \\
 & & & -1 & & 1 \\
 & & & 1 & -1 & \\
 & -1 & 1 & & & \\
1 & & -1 & & & \\
-1 & 1 & & & &
\end{bmatrix}
\end{array}
$$



Mi történik két szomszédos háromszögre? $\mathbf{A}_{123} + \mathbf{A}_{134} = \ldots$

Ujjgyakorlat*

$$
\mathbf{A}_{123} + \mathbf{A}_{134} =
\begin{array}{c}
\\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
 & & & & & 1 & 0 & -1 \\
 & & & & -1 & & 1 & \\
 & & & & 0 & -1 & & 1 \\
 & & & & 1 & & -1 & \\
 & -1 & 0 & 1 & & & & \\
1 & & -1 & & & & & \\
0 & 1 & & -1 & & & & \\
-1 & & 1 & & & & &
\end{bmatrix}
\end{array}
$$



Szögtartó Paraméterezés – Egyenletrendszer*

- Minimalizált energia:

$$E_{\text{conf.}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \mathbf{L} \mathbf{u} + \mathbf{v}^T \mathbf{L} \mathbf{v} - \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}$$

Szögtartó Paraméterezés – Egyenletrendszer*

- Minimalizált energia:

$$E_{\text{conf.}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \begin{bmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{L} & \\ & \mathbf{L}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{u} \\ \mathbf{v}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v}\end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix}\mathbf{u} \\ \mathbf{v}\end{bmatrix}$$

Szögtartó Paraméterezés – Egyenletrendszer*

- Minimalizált energia:

$$E_{\mathrm{conf.}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \begin{bmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v}\end{bmatrix} \underbrace{\left(\begin{bmatrix}\mathbf{L} & \\ & \mathbf{L}\end{bmatrix} - \mathbf{A}\right)}_{\mathbf{L}_C} \begin{bmatrix}\mathbf{u} \\ \mathbf{v}\end{bmatrix}$$

Szögtartó Paraméterezés – Egyenletrendszer*

- Minimalizált energia:

$$E_{\mathrm{conf.}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \begin{bmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v}\end{bmatrix} \mathbf{L}_C \begin{bmatrix}\mathbf{u} \\ \mathbf{v}\end{bmatrix}$$

Szögtartó Paraméterezés – Egyenletrendszer*

- Minimalizált energia:

$$E_{\text{conf.}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \begin{bmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v}\end{bmatrix} \mathbf{L}_C \begin{bmatrix}\mathbf{u} \\ \mathbf{v}\end{bmatrix}$$

- Minimalizálás után:

$$\boxed{\mathbf{L}_C \begin{bmatrix}\mathbf{u} \\ \mathbf{v}\end{bmatrix} = \mathbf{0}}$$

Szögtartó Paraméterezés – Egyenletrendszer*

- Minimalizált energia:

$$E_{\mathrm{conf.}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} \end{bmatrix} \mathbf{L}_C \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}$$

- Minimalizálás után:

$$\boxed{\mathbf{L}_C \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathbf{0}}$$

- $\mathbf{L}_C$ – diszkrét (kotangens) Laplace-matrix, Neumann peremfeltétellel:

$$\mathbf{L}_{ij} = \begin{cases} -(\cot\theta_{ij} + \cot\theta_{ji}) & i \neq j; i,j < |\mathcal{V}| \text{ vagy } i,j \geq |\mathcal{V}| \\ \sum_{e_{ij} \in \mathcal{E}_i} (\cot\theta_{ij} + \cot\theta_{ji}) & i = j; i,j < |\mathcal{V}| \text{ vagy } i,j \geq |\mathcal{V}| \\ 1 & i < |\mathcal{V}|\,; j \geq |\mathcal{V}|\,; e_{ij} \in \partial\mathcal{E} \\ -1 & i \geq |\mathcal{V}|\,; j < |\mathcal{V}|\,; e_{ij} \in \partial\mathcal{E} \end{cases}$$

Szögtartó Paraméterezés – Peremfeltételek*

$$\mathbf{L}_C \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

- Diszkrét Laplace-egyenlet ($\Delta f = 0$) – Neumann-peremfeltétellel

Szögtartó Paraméterezés – Peremfeltételek*

$$\mathbf{L}_C \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

- Diszkrét Laplace-egyenlet ($\Delta f = 0$) – Neumann-peremfeltétellel
- Homogén egyenletrendszer – végtelen sok megoldás!

Szögtartó Paraméterezés – Peremfeltételek*

$$\mathbf{L}_C \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

- Diszkrét Laplace-egyenlet ($\Delta f = 0$) – Neumann-peremfeltétellel
- Homogén egyenletrendszer – végtelen sok megoldás!
- Másképpen – szögtartás esetén négy szabadsági fok: $u - v$ eltolás, forgatás, skálázás = 2 pont (2×2 koordináta) lerögzítése

Szögtartó Paraméterezés – Peremfeltételek*

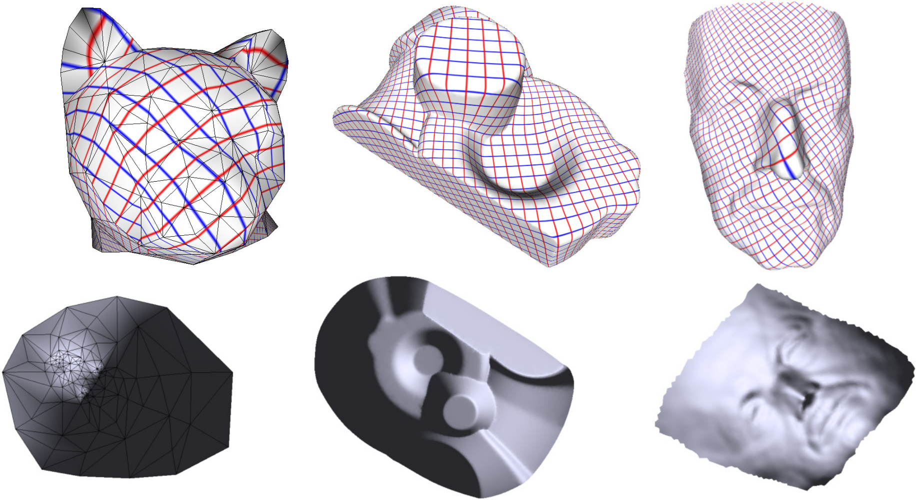
$$\mathbf{L}_C \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

- Diszkrét Laplace-egyenlet ($\Delta f = 0$) – Neumann-peremfeltétellel
- Homogén egyenletrendszer – végtelen sok megoldás!
- Másképpen – szögtartás esetén négy szabadsági fok: $u - v$ eltolás, forgatás, skálázás = 2 pont (2×2 koordináta) lerögzítése
- Probléma: az eredmény függ a választott pontoktól!

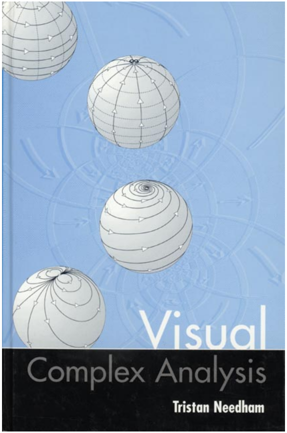
Szögtartó Paraméterezés – Sajátvektor-alapú Módszer*

- Mi a feladat?
$$E_C(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \begin{bmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v}\end{bmatrix} \mathbf{L}_C \begin{bmatrix}\mathbf{u} \\ \mathbf{v}\end{bmatrix} \to \min.$$
- $\mathbf{L}_C$ legkisebb (nem-0) sajatvektora minimalizalja E_C-t a $\|\mathbf{x}\|^2 = 1, \mathbf{e}^T\mathbf{x} = 0$ kenyszerek mellett $(\mathbf{e} = [1 \cdots 1])$.
- Szemlelet: parameterezett halo sulypontja az origoban, tehetetlensegi nyomateka 1.
- Inverz Hatvany-modszerrel: $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{L}_c^{-1}\mathbf{x}_i$ – Egyszer pl. Cholesky-faktorizaljuk $\mathbf{L}_C$-t es iterativan visszahelyettesitunk

Szögtartó Paraméterezés – Eredmények



Kapcsolat a Komplex Függvényekkel – Könyvajánló



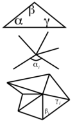
Szögtartó Paraméterezés – Más Módszerek*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} w_i(\alpha_i - \alpha_i^*)^2 \to \min.$$

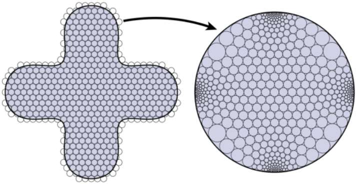
$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = 0$$

$$\sum_i \alpha_i - 2\pi = 0$$

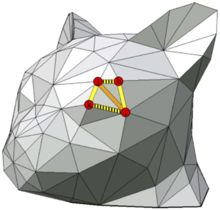
$$\prod_i \sin(\beta_i) - \prod_i \sin(\gamma_i) = 0$$



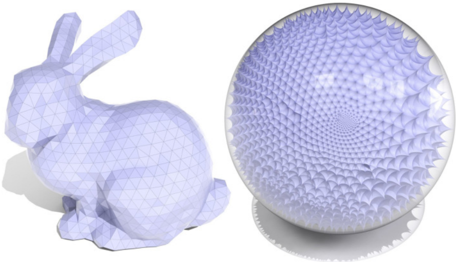
Szögek



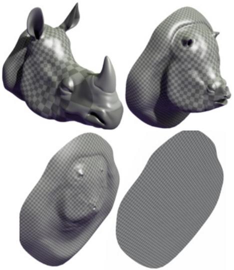
Körpakolás



Kpx. Kettősviszony



Hiperbolikus Geometria



Görbületfolyam

Mi is van a határgörbével?

Riemann Uniformizációs Tétel

Bármely egyszeresen összefüggő felületdarab síkba teríthető szögtartó módon

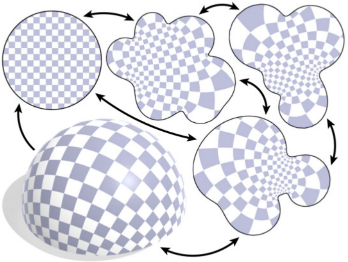
Mi is van a határgörbével?

Riemann Uniformizációs Tétel

Bármely egyszeresen összefüggő felületdarab síkba teríthető szögtartó módon

Riemann Leképezési Tétel

A sík bármely két egyszeresen összefüggő tartománya között létezik szögtartó leképezés.



Mi is van a határgörbével?

Riemann Uniformizációs Tétel

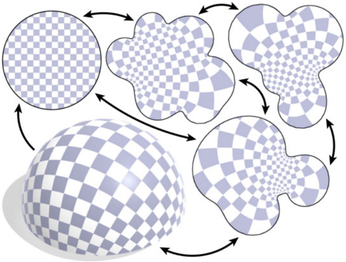
Bármely egyszeresen összefüggő felületdarab síkba teríthető szögtartó módon

Riemann Leképezési Tétel

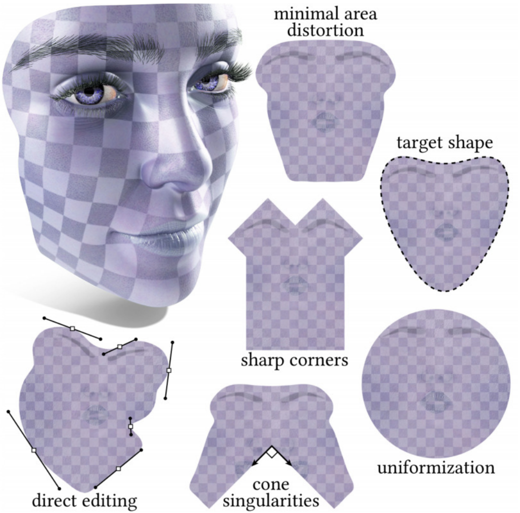
A sík bármely két egyszeresen összefüggő tartománya között létezik szögtartó leképezés.

Következmény

A korábbi módszerrel kiadódott határgörbe a diszkretizáció függvénye!



Új módszer: Boundary First Flattening (BFF) – DEMÓ!



R. Sawhney, K. Crane. "Boundary First Flattening". ACM ToG 37(1), 2017.

Skálatényezők és Peremfeltételek

- Szögtartás $\Longleftrightarrow$ Forgatás & nyújtás – Logaritmikus skálatényező: $u : M \to \mathbb{R}, \ |e_{\mathrm{new}}| = e^u \, |e_{\mathrm{old}}|$

Skálatényezők és Peremfeltételek

- Szögtartás $\Longleftrightarrow$ Forgatás & nyújtás – Logaritmikus skálatényező: $u : M \to \mathbb{R}, \; |e_{\text{new}}| = e^u \, |e_{\text{old}}|$
- A felület belsejében:

$$\Delta u = -K \qquad \text{(Liouville-egyenlet)}$$

Skálatényezők és Peremfeltételek

- Szögtartás $\iff$ Forgatás & nyújtás – Logaritmikus skálatényező: $u : M \to \mathbb{R},\ |e_{\text{new}}| = e^u\,|e_{\text{old}}|$
- A felület belsejében:

$$\Delta u = -K \qquad \text{(Liouville-egyenlet)}$$

- A határgörbe mentén:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \kappa_{\text{old}} - e^u \kappa_{\text{new}} \qquad \text{(Cherrier-egyenlet)}$$

Skálatényezők és Peremfeltételek

- Szögtartás $\iff$ Forgatás & nyújtás – Logaritmikus skálatényező: $u : M \to \mathbb{R},\ |e_{\mathrm{new}}| = e^u\,|e_{\mathrm{old}}|$
- A felület belsejében:

$$\Delta u = -K \qquad \text{(Liouville-egyenlet)}$$

- A határgörbe mentén:

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \kappa_{\mathrm{old}} - e^u \kappa_{\mathrm{new}} \qquad \text{(Cherrier-egyenlet)}$$

- Szögtartás $\Rightarrow$ Határgörbe görbület- és ívhossz-eloszlása nem független!

$$u \underset{\text{Poisson-egyenlet}}{\overset{\text{Poisson-egyenlet}}{\rightleftharpoons}} \kappa$$

Skálatényezők és Peremfeltételek

- Szögtartás $\Longleftrightarrow$ Forgatás & nyújtás – Logaritmikus skálatényező: $u : M \to \mathbb{R},\ |e_{\mathrm{new}}| = e^u\,|e_{\mathrm{old}}|$
- A felület belsejében:

$$\Delta u = -K \qquad \text{(Liouville-egyenlet)}$$

- A határgörbe mentén:

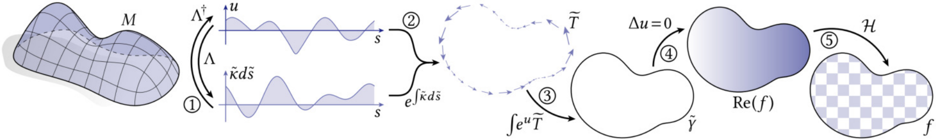
$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \kappa_{\mathrm{old}} - e^u \kappa_{\mathrm{new}} \qquad \text{(Cherrier-egyenlet)}$$

- Szögtartás $\Rightarrow$ Határgörbe görbület- és ívhossz-eloszlása nem független!

$$u \underset{\text{Poisson}-\text{egyenlet}}{\overset{\text{Poisson}-\text{egyenlet}}{\rightleftharpoons}} \kappa$$

- $u = 0$ – legkisebb területtorzítás!

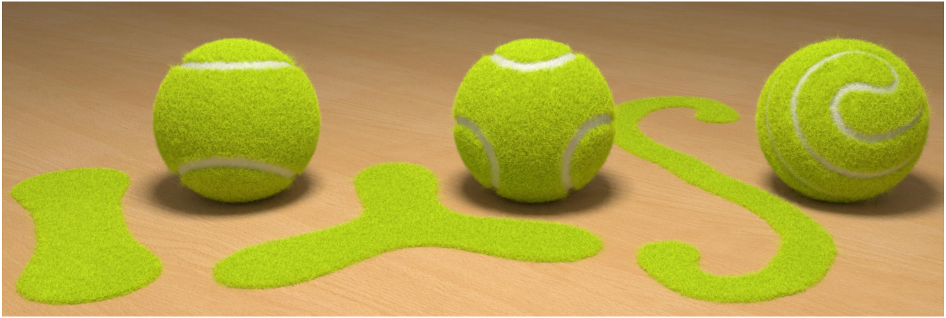
BFF Algoritmus



Számításigény $\approx$ Tutte!

Érdekesség: Optimális Vágógörbék*

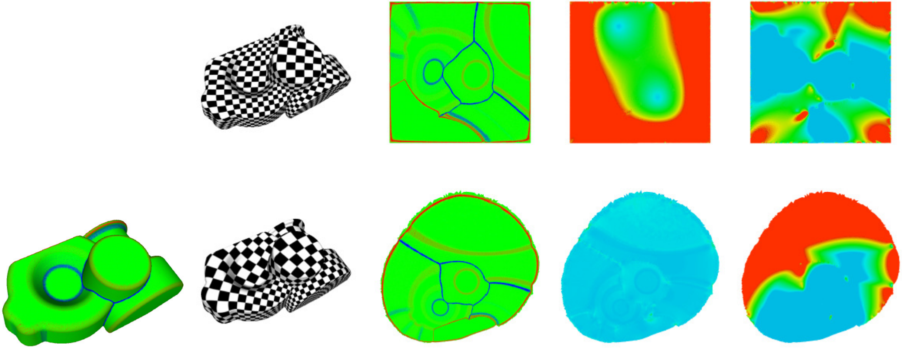
Felület felvágása minimális torzítással síkbateríthető darabokra – a leképezést nem kell kiszámítani, csak az u skálatényezőt!



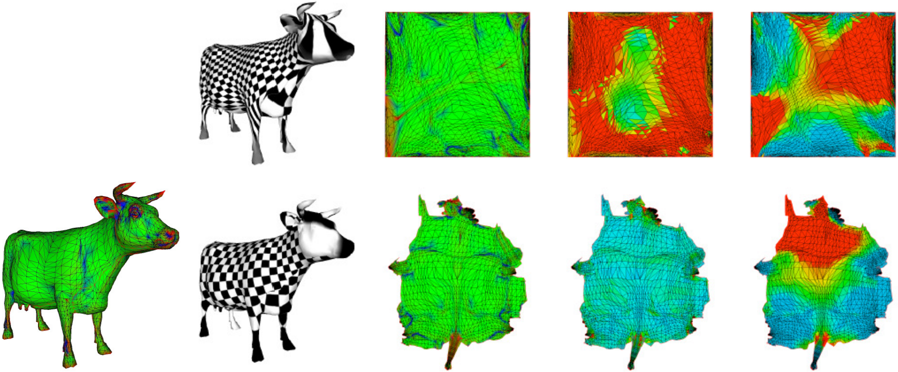
N. Sharp, K. Crane. "Variational Surface Cutting". ACM ToG 37(4), 2018.

https://www.cs.cmu.edu/ kmcrane/Projects/VariationalCuts/

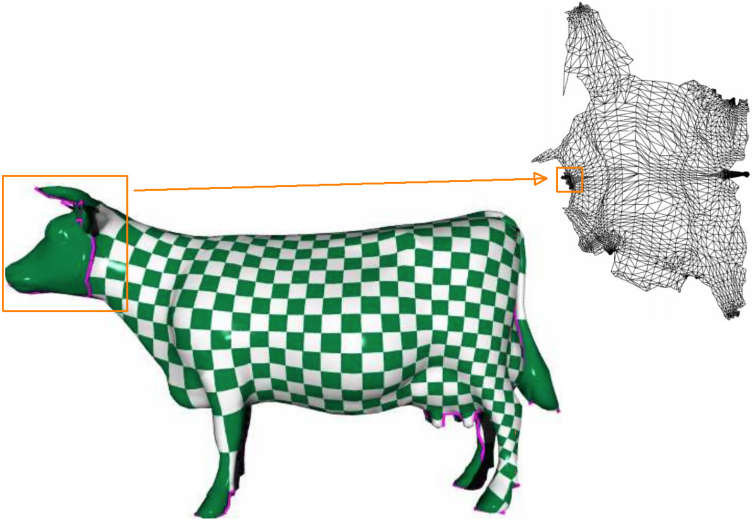
Harmonikus vs. Szögtartás



Harmonikus vs. Szögtartás



Területtorzítás?

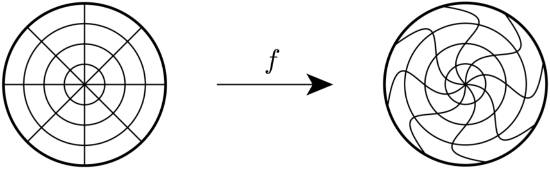


Területtartás?

- És ha a háromszögek területet akarjuk megőrizni?

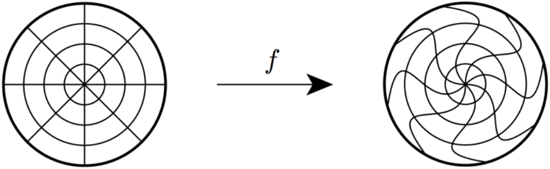
Területtartás?

- És ha a háromszögek területet akarjuk megőrizni?
- Fix határral sem egyértelmű! (Összenyomhatatlan folyadék áramlása)



Területtartás?

- És ha a háromszögek területet akarjuk megőrizni?
- Fix határral sem egyértelmű! (Összenyomhatatlan folyadék áramlása)



- Terület + Szögtartás $\implies$ Izometria!

Izometrikus paraméterezés – 2. kísérlet

- Izometria – $\mathbf{J}$ legyen forgatómátrix:

Izometrikus paraméterezés – 2. kísérlet

- Izometria – $\mathbf{J}$ legyen forgatómátrix:

$$\mathbf{J}^T\mathbf{J} = \mathbf{I}$$

Izometrikus paraméterezés – 2. kísérlet

- Izometria – **J** legyen forgatómátrix:

$$\mathbf{J}^T\mathbf{J} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{J} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}}$$

Izometrikus paraméterezés – 2. kísérlet

- Izometria – $\mathbf{J}$ legyen forgatómátrix:

$$\mathbf{J}^T\mathbf{J} = \mathbf{I}$$
$$\mathbf{J} = \mathbf{R}$$

Izometrikus paraméterezés – 2. kísérlet

- Izometria – $\mathbf{J}$ legyen forgatómátrix:

$$\mathbf{J}^T\mathbf{J} = \mathbf{I}$$
$$\mathbf{J} = \mathbf{R}$$

- Legkisebb négyzetes értelemben teljesüljön – **As-Rigid-As-Possible** (ARAP) energia:

$$E_{\mathrm{ARAP}} = \sum_{T \in \mathcal{T}} A_T \left\| \mathbf{J}_T - \mathbf{R}_T \right\|_F^2 \to \min.$$

ahol $\mathbf{R}_T$ a $\mathbf{J}_T$-hez *legközelebbi forgatómátrix*:

$$\mathbf{J}_T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{R}_T = ???$$

Ujjgyakorlat

- Jacobi-mátrix:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- Legközelebbi **hasonlóság**:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} e & f \\ -f & e \end{bmatrix}$$

- Eltérést minimalizáljuk:

$$E(e,f) = \|\mathbf{J} - \mathbf{S}\|_F^2 = (a-e)^2 + (b-f)^2 + (c-(-f))^2 + (d-e)^2 \to \min.$$

- Számítsuk ki:

$$\frac{\partial E(e,f)}{\partial e} = 0 \Rightarrow e = \dots$$
$$\frac{\partial E(e,f)}{\partial f} = 0 \Rightarrow f = \dots$$

Ujjgyakorlat

- Jacobi-mátrix:
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
- Legközelebbi **hasonlóság**:
$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} e & f \\ -f & e \end{bmatrix}$$
- Számitsuk ki:
$$\frac{\partial E(e,f)}{\partial e} = 0 \Rightarrow e = \frac{a+d}{2}$$
$$\frac{\partial E(e,f)}{\partial f} = 0 \Rightarrow f = \frac{b-c}{2}$$
- Legközelebbi **forgatómátrix** (segítség: $\det \mathbf{R} = 1$!):
$$\mathbf{S} = r\mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{R} = \frac{1}{r}\mathbf{S}$$
$$r = \dots$$

Ujjgyakorlat

- Jacobi-matrix:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- Legkozelebbi **hasonlosag**:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} e & f \\ -f & e \end{bmatrix}$$

- Szamitsuk ki:

$$\frac{\partial E(e,f)}{\partial e} = 0 \Rightarrow e = \frac{a+d}{2}$$
$$\frac{\partial E(e,f)}{\partial f} = 0 \Rightarrow f = \frac{b-c}{2}$$

- Legkozelebbi **forgatomatrix** (segitseg: $\det \mathbf{R} = 1!$):

$$\mathbf{S} = r\mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{R} = \frac{1}{r}\mathbf{S}$$
$$r = \sqrt{\det \mathbf{S}}$$

Izometrikus paraméterezés – 2. kísérlet

- Izometria – $\mathbf{J}$ legyen forgatómátrix:

$$\mathbf{J}^T\mathbf{J} = \mathbf{I}$$
$$\mathbf{J} = \mathbf{R}$$

- Legkisebb négyzetes értelemben teljesüljön – **As-Rigid-As-Possible** (ARAP) energia:

$$E_{\mathrm{ARAP}} = \sum_{T\in\mathcal{T}} A_T \left\|\mathbf{J}_T - \mathbf{R}_T\right\|_F^2 \to \min.$$

ahol $\mathbf{R}_T$ a $\mathbf{J}_T$-hez legközelebbi forgatómátrix:

$$\boxed{\mathbf{J}_T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{R}_T = \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{S}_T}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{a+d}{2} & \frac{b-c}{2} \\ \frac{c-b}{2} & \frac{a+d}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_T}}$$

- Bonyolult függvénye az ismeretleneknek – nehéz direkt optimalizálni...

Paraméterezés Illesztése Forgatómátrixokra

- Ha fixáljuk **J**-t, **R** egyszerűen (háromszögenként) számítható

Paraméterezés Illesztése Forgatómátrixokra

- Ha fixáljuk **J**-t, **R** egyszerűen (háromszögenként) számítható
- Ha fixáljuk **R**-t:

$$E_{\text{ARAP}} = \|\mathbf{J} - \mathbf{R}\|_F^2$$

Paraméterezés Illesztése Forgatómátrixokra

- Ha fixáljuk **J**-t, **R** egyszerűen (háromszögenként) számítható
- Ha fixáljuk **R**-t:
$$E_{\mathrm{ARAP}} = \left\| \begin{bmatrix} \nabla u^T \\ \nabla v^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_u^T \\ \mathbf{R}_v^T \end{bmatrix} \right\|_F^2$$

Paraméterezés Illesztése Forgatómátrixokra

- Ha fixáljuk **J**-t, **R** egyszerűen (háromszögenként) számítható
- Ha fixáljuk **R**-t:

$$E_{\mathrm{ARAP}} = \left\| \begin{bmatrix} \nabla u^T \\ \nabla v^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_u^T \\ \mathbf{R}_v^T \end{bmatrix} \right\|_F^2 = \|\nabla u - \mathbf{R}_u\|^2 + \|\nabla v - \mathbf{R}_v\|^2$$

Paraméterezés Illesztése Forgatómátrixokra

- Ha fixáljuk **J**-t, **R** egyszerűen (háromszögenként) számítható
- Ha fixáljuk **R**-t:

$$E_{\text{ARAP}} = \left\| \begin{bmatrix} \nabla u^T \\ \nabla v^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_u^T \\ \mathbf{R}_v^T \end{bmatrix} \right\|_F^2 = \|\nabla u - \mathbf{R}_u\|^2 + \|\nabla v - \mathbf{R}_v\|^2$$

- Tehát u es v ismét külön kezelhető!

Paraméterezés Illesztése Forgatómátrixokra

- Ha fixáljuk **J**-t, **R** egyszerűen (háromszögenként) számítható
- Ha fixáljuk **R**-t:

$$E_{\mathrm{ARAP}} = \left\| \begin{bmatrix} \nabla u^T \\ \nabla v^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_u^T \\ \mathbf{R}_v^T \end{bmatrix} \right\|_F^2 = \|\nabla u - \mathbf{R}_u\|^2 + \|\nabla v - \mathbf{R}_v\|^2$$

- Tehát u es v ismét külön kezelhető!
- Felidézve, hogy pl. $\nabla u = \mathbf{G}\mathbf{u}$:

$$\|\nabla u - \mathbf{R}_u\|^2 = \|\mathbf{G}\mathbf{u} - \mathbf{R}_u\|^2 =$$

Paraméterezés Illesztése Forgatómátrixokra

- Ha fixáljuk **J**-t, **R** egyszerűen (háromszögenként) számítható
- Ha fixáljuk **R**-t:

$$E_{\mathrm{ARAP}} = \left\| \begin{bmatrix} \nabla u^T \\ \nabla v^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_u^T \\ \mathbf{R}_v^T \end{bmatrix} \right\|_F^2 = \|\nabla u - \mathbf{R}_u\|^2 + \|\nabla v - \mathbf{R}_v\|^2$$

- Tehát u es v ismét külön kezelhető!
- Felidézve, hogy pl. $\nabla u = \mathbf{G}\mathbf{u}$:

$$\|\nabla u - \mathbf{R}_u\|^2 = \|\mathbf{G}\mathbf{u} - \mathbf{R}_u\|^2 = \mathbf{u}^T\mathbf{G}^T\mathbf{G}\mathbf{u} - 2(\mathbf{G}^T\mathbf{R})^T\mathbf{u}$$

Paraméterezés Illesztése Forgatómátrixokra

- Ha fixáljuk **J**-t, **R** egyszerűen (háromszögenként) számítható
- Ha fixáljuk **R**-t:

$$E_{\text{ARAP}} = \left\| \begin{bmatrix} \nabla u^T \\ \nabla v^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_u^T \\ \mathbf{R}_v^T \end{bmatrix} \right\|_F^2 = \|\nabla u - \mathbf{R}_u\|^2 + \|\nabla v - \mathbf{R}_v\|^2$$

- Tehát u es v ismét külön kezelhető!
- Felidézve, hogy pl. $\nabla u = \mathbf{G}\mathbf{u}$:

$$\|\nabla u - \mathbf{R}_u\|^2 = \|\mathbf{G}\mathbf{u} - \mathbf{R}_u\|^2 = \mathbf{u}^T \underbrace{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}_{\mathbf{L}} \mathbf{u} - 2 \underbrace{(\mathbf{G}^T\mathbf{R}_u)^T \mathbf{u}}_{\mathbf{d}_u^T \mathbf{u} \approx \operatorname{div} \mathbf{R}_u}$$

Paraméterezés Illesztése Forgatómátrixokra

- Ha fixáljuk **J**-t, **R** egyszerűen (háromszögenként) számítható
- Ha fixáljuk **R**-t:

$$E_{\mathrm{ARAP}} = \left\| \begin{bmatrix} \nabla u^T \\ \nabla v^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_u^T \\ \mathbf{R}_v^T \end{bmatrix} \right\|_F^2 = \|\nabla u - \mathbf{R}_u\|^2 + \|\nabla v - \mathbf{R}_v\|^2$$

- Tehát u es v ismét külön kezelhető!
- Felidézve, hogy pl. $\nabla u = \mathbf{G}\mathbf{u}$:

$$\|\nabla u - \mathbf{R}_u\|^2 = \|\mathbf{G}\mathbf{u} - \mathbf{R}_u\|^2 = \mathbf{u}^T\mathbf{L}\mathbf{u} - 2\mathbf{d}_u^T\mathbf{u}$$

Paraméterezés Illesztése Forgatómátrixokra

- Ha fixáljuk **J**-t, **R** egyszerűen (háromszögenként) számítható
- Ha fixáljuk **R**-t:

$$E_{\mathrm{ARAP}} = \left\| \begin{bmatrix} \nabla u^T \\ \nabla v^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_u^T \\ \mathbf{R}_v^T \end{bmatrix} \right\|_F^2 = \|\nabla u - \mathbf{R}_u\|^2 + \|\nabla v - \mathbf{R}_v\|^2$$

- Tehát u es v ismét külön kezelhető!
- Felidézve, hogy pl. $\nabla u = \mathbf{G}\mathbf{u}$:

$$\|\nabla u - \mathbf{R}_u\|^2 = \|\mathbf{G}\mathbf{u} - \mathbf{R}_u\|^2 = \mathbf{u}^T \mathbf{L}\mathbf{u} - 2\mathbf{d}_u^T \mathbf{u}$$

- Deriválás után:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{L}\mathbf{u} &= \mathbf{d}_u \\ \mathbf{L}\mathbf{v} &= \mathbf{d}_v \end{aligned}}$$

Paraméterezés Illesztése Forgatómátrixokra

- Ha fixáljuk **J**-t, **R** egyszerűen (háromszögenként) számítható
- Ha fixáljuk **R**-t:

$$E_{\mathrm{ARAP}} = \left\| \begin{bmatrix} \nabla u^T \\ \nabla v^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_u^T \\ \mathbf{R}_v^T \end{bmatrix} \right\|_F^2 = \|\nabla u - \mathbf{R}_u\|^2 + \|\nabla v - \mathbf{R}_v\|^2$$

- Tehát u es v ismét külön kezelhető!
- Felidézve, hogy pl. $\nabla u = \mathbf{G}\mathbf{u}$:

$$\|\nabla u - \mathbf{R}_u\|^2 = \|\mathbf{G}\mathbf{u} - \mathbf{R}_u\|^2 = \mathbf{u}^T\mathbf{L}\mathbf{u} - 2\mathbf{d}_u^T\mathbf{u}$$

- Deriválás után:

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{d}_u \\ \mathbf{L}\mathbf{v} = \mathbf{d}_v \end{array}}$$

- **Poisson-egyenletek** – $\Delta f = g$

ARAP – Lokális-Globális Módszer

$$E_{ARAP}(T) = \|\mathbf{J}_T - \mathbf{R}_T\|_\mathrm{F}^2$$

ARAP – Lokális-Globális Módszer

$$E_{ARAP}(T) = \|\mathbf{J}_T - \mathbf{R}_T\|_\mathrm{F}^2$$

- *Lokális-globális módszer*: ha az energia egyik tagját lefixáljuk, a probléma egyszerűsödik:

ARAP – Lokális-Globális Módszer

$$E_{ARAP}(T) = \|\mathbf{J}_T - \mathbf{R}_T\|_F^2$$

- *Lokális-globális módszer*: ha az energia egyik tagját lefixáljuk, a probléma egyszerűsödik:
  - Fix leképezéshez keresünk ideális forgatásokat: háromszögenkent számítható $\Rightarrow$ **lokális fázis**

ARAP – Lokális-Globális Módszer

$$E_{ARAP}(T) = \|\mathbf{J}_T - \mathbf{R}_T\|_F^2$$

- *Lokális-globális módszer*: ha az energia egyik tagját lefixáljuk, a probléma egyszerűsödik:
  - Fix leképezéshez keresünk ideális forgatásokat: háromszögenkent számítható ⇒ **lokális fázis**
  - Fix forgatásokhoz illesztünk egy leképezést: *Poisson-egyenletek* a csúcspontok koordinátáira ⇒ **globális fázis**:

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{d}_u$$
$$\mathbf{L}\mathbf{v} = \mathbf{d}_v$$

$\mathbf{L}$ konstans kotangens Laplace-mátrix, $\mathbf{d}_u, \mathbf{d}_v$ a forgatómátrix sorainak divergenciái

ARAP Paraméterezés – Inicializálás

- Hogyan indítjuk el az iterációkat?

ARAP Paraméterezés – Inicializálás

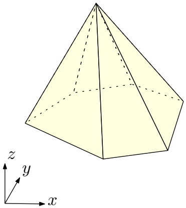
- Hogyan indítjuk el az iterációkat?
- Egy lehetőség: egy másik paraméterezésből (Tutte, Konform) inicializáljuk a Jacobi-mátrixokat

ARAP Paraméterezés – Inicializálás

- Hogyan indítjuk el az iterációkat?
- Egy lehetőség: egy másik paraméterezésből (Tutte, Konform) inicializáljuk a Jacobi-mátrixokat
- Jobb választás: inicializáljuk a **forgatómátrixokat**!

ARAP Paraméterezés – Inicializálás

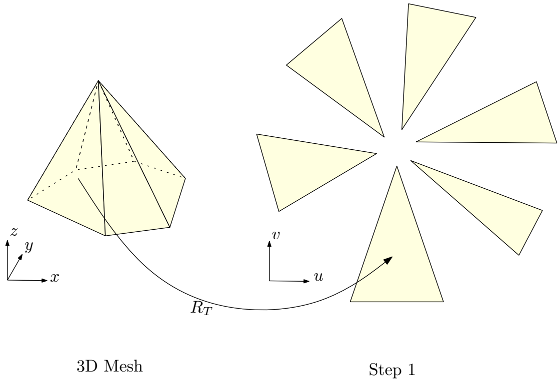
- Hogyan indítjuk el az iterációkat?
- Egy lehetőség: egy másik paraméterezésből (Tutte, Konform) inicializáljuk a Jacobi-mátrixokat
- Jobb választás: inicializáljuk a **forgatómátrixokat**!



3D Mesh

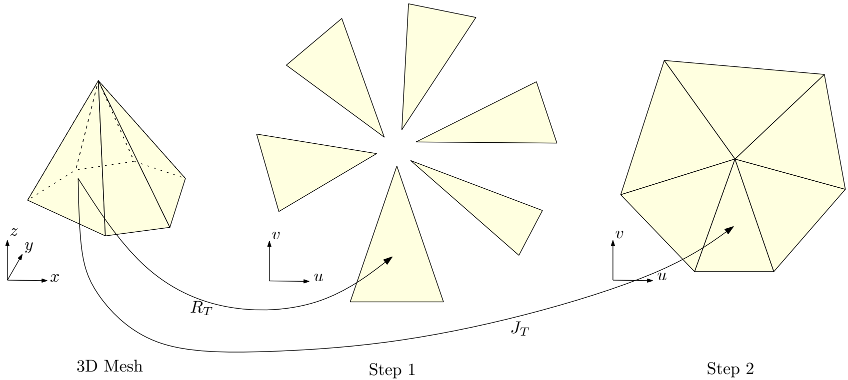
ARAP Paraméterezés – Inicializálás

- Hogyan indítjuk el az iterációkat?
- Egy lehetőség: egy másik paraméterezésből (Tutte, Konform) inicializáljuk a Jacobi-mátrixokat
- Jobb választás: inicializáljuk a **forgatómátrixokat**!



ARAP Paraméterezés – Inicializálás

- Hogyan indítjuk el az iterációkat?
- Egy lehetőség: egy másik paraméterezésből (Tutte, Konform) inicializáljuk a Jacobi-mátrixokat
- Jobb választás: inicializáljuk a **forgatómátrixokat**!



ARAP Paraméterezés – Forgatómező Inicializálás

ARAP Paraméterezés – Forgatómező Inicializálás

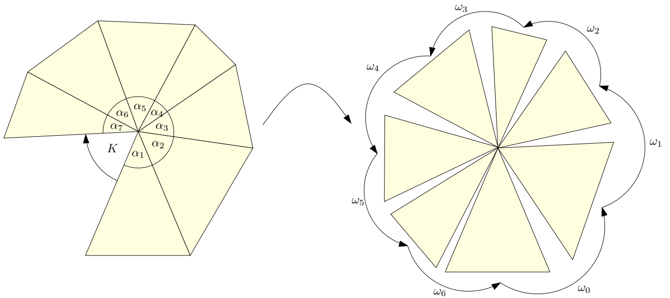
- Lapítsuk ki a hálót háromszögenként egy feszítőfa mentén...

ARAP Paraméterezés – Forgatómező Inicializálás

- Lapítsuk ki a hálót háromszögenként egy feszítőfa mentén...
- Probléma: gaussi görbület $\Leftrightarrow$ szöghiba!

ARAP Paraméterezés – Forgatómező Inicializálás

- Lapítsuk ki a hálót háromszögenként egy feszítőfa mentén...
- Probléma: gaussi görbület ⇔ szöghiba!
- Megoldás: osszuk el egyenletesen a háromszöglegyezők görbületét extra forgatásokkal



ARAP Paraméterezés – Forgatómező Inicializálás

- Minden csúcspontra egy lineáris egyenlet a forgatási szögekre:

$$\sum_{e_{ij} \in \mathcal{E}_{p_i}} \omega_{ij} = K_{p_i}$$

ARAP Paraméterezés – Forgatómező Inicializálás

- Minden csúcspontra egy lineáris egyenlet a forgatási szögekre:

$$\sum_{e_{ij} \in \mathcal{E}_{p_i}} \omega_{ij} = K_{p_i}$$

- Alulhatározott lineáris rendszer a forgatási szögekre:

$$\mathbf{C}\omega = \mathbf{K}$$

ARAP Paraméterezés – Forgatómező Inicializálás

- Minden csúcspontra egy lineáris egyenlet a forgatási szögekre:

$$\sum_{e_{ij} \in \mathcal{E}_{p_i}} \omega_{ij} = K_{p_i}$$

- Alulhatározott lineáris rendszer a forgatási szögekre:

$$\mathbf{C}\omega = \mathbf{K}$$

- Legkevesebb forgatas – $\sum \omega_{ij}^2 = \|\omega\|^2 \to \min.$ – legkisebb normaju megoldas:

$$\boxed{\omega = \mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1}\mathbf{K}}$$

ARAP Paraméterezés – Forgatómező Inicializálás

- Minden csúcspontra egy lineáris egyenlet a forgatási szögekre:

$$\sum_{e_{ij}\in\mathcal{E}_{p_i}} \omega_{ij} = K_{p_i}$$

- Alulhatározott lineáris rendszer a forgatási szögekre:

$$\mathbf{C}\omega = \mathbf{K}$$

- Legkevesebb forgatas – $\sum \omega_{ij}^2 = \|\omega\|^2 \rightarrow \min.$ – legkisebb normaju megoldas:

$$\boxed{\omega = \mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1}\mathbf{K}}$$

- A szögek birtokában a korábbi fabejárással megkapjuk a forgatómátrixokat!

ARAP Paraméterezés – Forgatómező Inicializálás

- Minden csúcspontra egy lineáris egyenlet a forgatási szögekre:

$$\sum_{e_{ij} \in \mathcal{E}_{p_i}} \omega_{ij} = K_{p_i}$$

- Alulhatározott lineáris rendszer a forgatási szögekre:

$$\mathbf{C}\omega = \mathbf{K}$$

- Legkevesebb forgatas – $\sum \omega_{ij}^2 = \|\omega\|^2 \to \min.$ – legkisebb normaju megoldas:

$$\boxed{\omega = \mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1}\mathbf{K}}$$

- A szögek birtokában a korábbi fabejárással megkapjuk a forgatómátrixokat!
- Tehát **2 lineáris rendszert kell megoldani** az ARAP paraméterezéshez:

ARAP Paraméterezés – Forgatómező Inicializálás

- Minden csúcspontra egy lineáris egyenlet a forgatási szögekre:

$$\sum_{e_{ij} \in \mathcal{E}_{p_i}} \omega_{ij} = K_{p_i}$$

- Alulhatározott lineáris rendszer a forgatási szögekre:

$$\mathbf{C}\omega = \mathbf{K}$$

- Legkevesebb forgatas – $\sum \omega_{ij}^2 = \|\omega\|^2 \to \min.$ – legkisebb normaju megoldas:

$$\boxed{\omega = \mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1}\mathbf{K}}$$

- A szögek birtokában a korábbi fabejárással megkapjuk a forgatómátrixokat!
- Tehát **2 lineáris rendszert kell megoldani** az ARAP paraméterezéshez:
    - Egy alulhatározott rendszert a forgatómátrixokhoz

ARAP Paraméterezés – Forgatómező Inicializálás

- Minden csúcspontra egy lineáris egyenlet a forgatási szögekre:

$$\sum_{e_{ij} \in \mathcal{E}_{p_i}} \omega_{ij} = K_{p_i}$$

- Alulhatározott lineáris rendszer a forgatási szögekre:

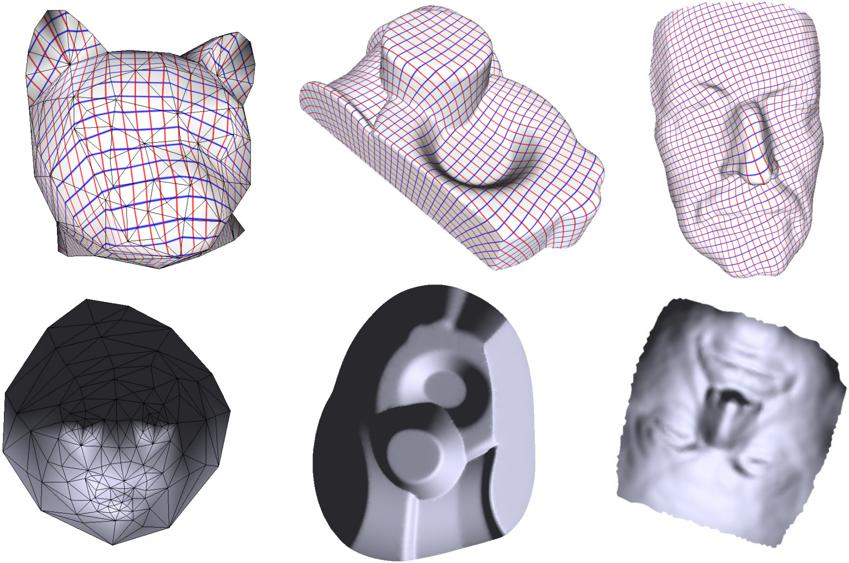
$$\mathbf{C}\omega = \mathbf{K}$$

- Legkevesebb forgatas – $\sum \omega_{ij}^2 = \|\omega\|^2 \to \min.$ – legkisebb normaju megoldas:

$$\boxed{\omega = \mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1}\mathbf{K}}$$

- A szögek birtokában a korábbi fabejárással megkapjuk a forgatómátrixokat!
- Tehát **2 lineáris rendszert kell megoldani** az ARAP paraméterezéshez:
  - Egy alulhatározott rendszert a forgatómátrixokhoz
  - Egy Poisson-egyenletet (kotangens-Laplace együtthatómátrix) az $u - v$ koordinátákhoz

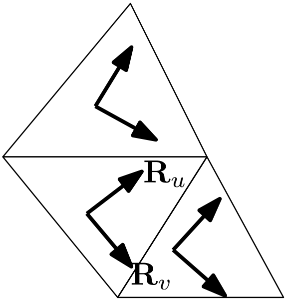
ARAP Paraméterezés – Eredmények



Kapcsolat a vektormezőkkel

- Értelmezzük a forgatómátrixok sorait egység hosszú vektorokként (irányokként):

$$\mathsf{R} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{R}_u \\ \mathsf{R}_v \end{bmatrix}$$

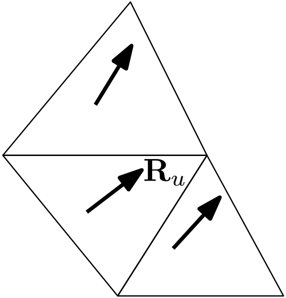


Kapcsolat a vektormezőkkel

- Értelmezzük a forgatómátrixok sorait egység hosszú vektorokként (irányokként):

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_u \\ \mathbf{R}_v \end{bmatrix}$$

- Elég az egyik vektor – háromszögenként konstans **vektormező (iránymező)**

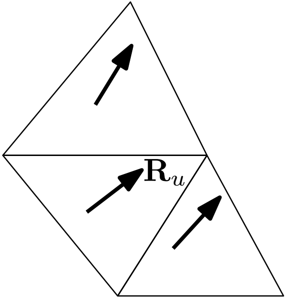


Kapcsolat a vektormezőkkel

- Értelmezzük a forgatómátrixok sorait egység hosszú vektorokként (irányokként):

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_u \\ \mathbf{R}_v \end{bmatrix}$$

- Elég az egyik vektor – háromszögenként konstans **vektormező (iránymező)**
- Legsimább forgatásmező = legsimább (legkevesebbet forgó) iránymező!



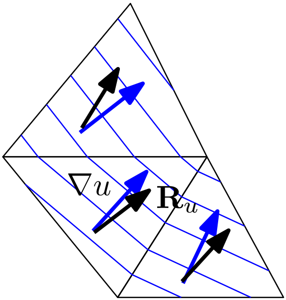
Kapcsolat a vektormezőkkel

- Értelmezzük a forgatómátrixok sorait egység hosszú vektorokként (irányokként):

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_u \\ \mathbf{R}_v \end{bmatrix}$$

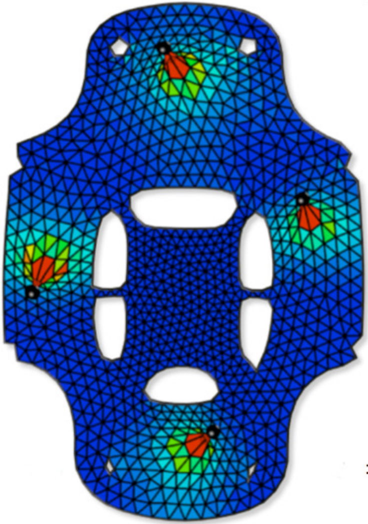
- Elég az egyik vektor – háromszögenként konstans **vektormező (iránymező)**
- Legsimább forgatásmező = legsimább (legkevesebbet forgó) iránymező!
- Összevarrás = **gradiens-illesztés**:

$$\sum_{T\in\mathcal{T}} A_T \left\|\nabla u - \mathbf{R}_u\right\|^2 \to \min.$$



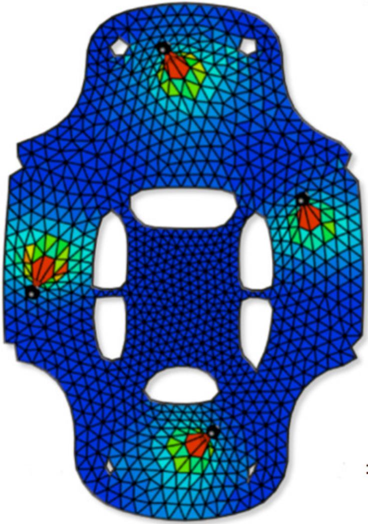
Lokális injektivitás

- Csak a Tutte-módszer biztosítja, hogy a háromszögek nem fordulnak át!



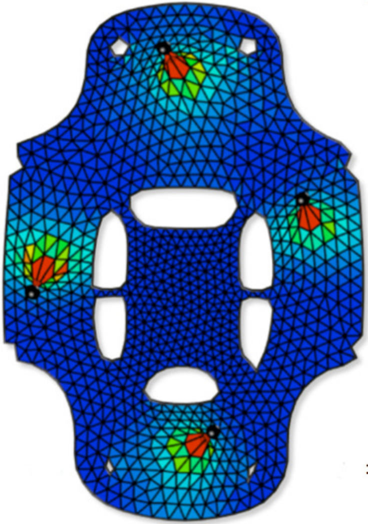
Lokális injektivitás

- Csak a Tutte-módszer biztosítja, hogy a háromszögek nem fordulnak át!
- Heurisztikák:



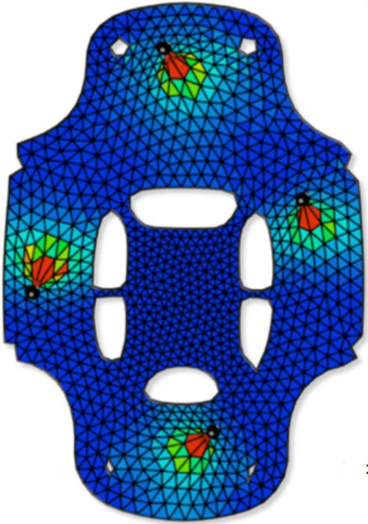
Lokális injektivitás

- Csak a Tutte-módszer biztosítja, hogy a háromszögek nem fordulnak át!
- Heurisztikák:
    - Iteratív súlyozás



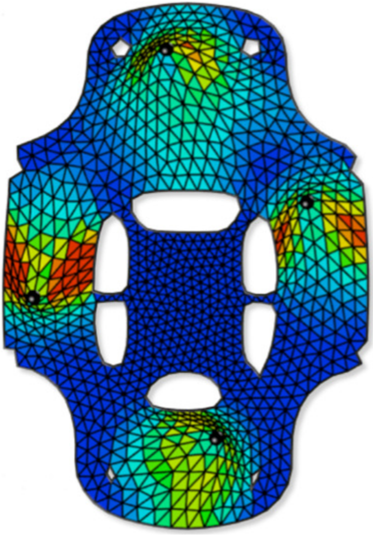
Lokális injektivitás

- Csak a Tutte-módszer biztosítja, hogy a háromszögek nem fordulnak át!
- Heurisztikák:
    - Iteratív súlyozás
    - Energia simítás



Lokális injektivitás

- Csak a Tutte-módszer biztosítja, hogy a háromszögek nem fordulnak át!
- Heurisztikák:
  - Iteratív súlyozás
  - Energia simítás

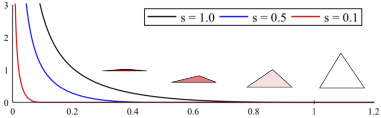


Lokális injektivitás

- Csak a Tutte-módszer biztosítja, hogy a háromszögek nem fordulnak át!
- Heurisztikák:
  - Iteratív súlyozás
  - Energia simítás
- Garantált módszerek:

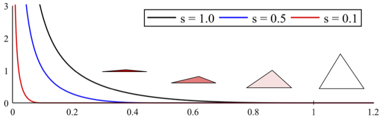
Lokális injektivitás

- Csak a Tutte-módszer biztosítja, hogy a háromszögek nem fordulnak át!
- Heurisztikák:
  - Iteratív súlyozás
  - Energia simítás
- Garantált módszerek:
  - Háromszög átfordulni készül $\Rightarrow E \to \infty$ (belsőpont módszer)



Lokális injektivitás

- Csak a Tutte-módszer biztosítja, hogy a háromszögek nem fordulnak át!
- Heurisztikák:
  - Iteratív súlyozás
  - Energia simítás
- Garantált módszerek:
  - Háromszög átfordulni készül $\Rightarrow E \to \infty$ (belsőpont módszer)
  - Magas fokú, nem-konvex energiák – gradient descent, Newton módszer, ...

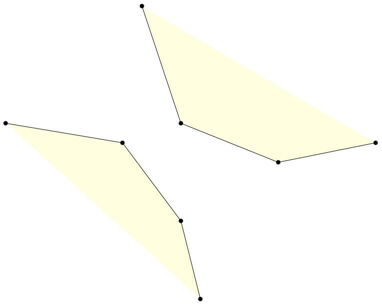


Globális Injektivitás [Smith-Schaefer, 2015]

- Ha egy háromszög sem fordul át, a határgörbe még átmetszheti magát...

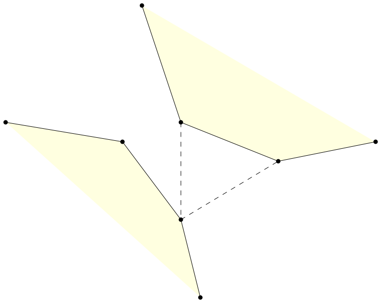
Globális Injektivitás [Smith-Schaefer, 2015]

- Ha egy háromszög sem fordul át, a határgörbe még átmetszheti magát...
- Ötlet: határpontok által alkotott virtuális háromszögek átfordulását vizsgáljuk!



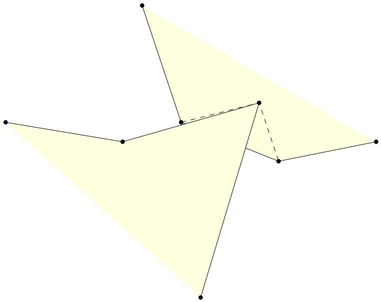
Globális Injektivitás [Smith-Schaefer, 2015]

- Ha egy háromszög sem fordul át, a határgörbe még átmetszheti magát...
- Ötlet: határpontok által alkotott virtuális háromszögek átfordulását vizsgáljuk!



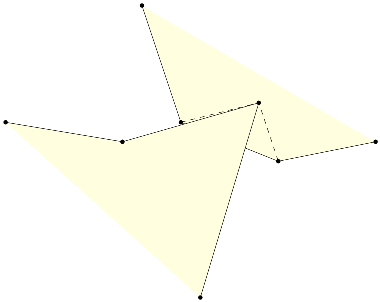
Globális Injektivitás [Smith-Schaefer, 2015]

- Ha egy háromszög sem fordul át, a határgörbe még átmetszheti magát...
- Ötlet: határpontok által alkotott virtuális háromszögek átfordulását vizsgáljuk!

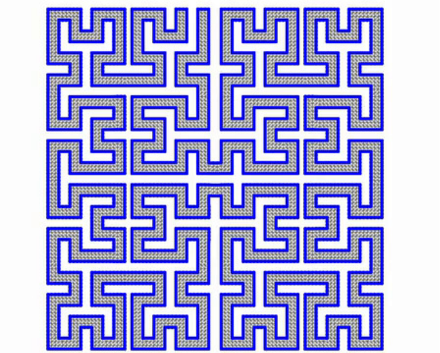


Globális Injektivitás [Smith-Schaefer, 2015]

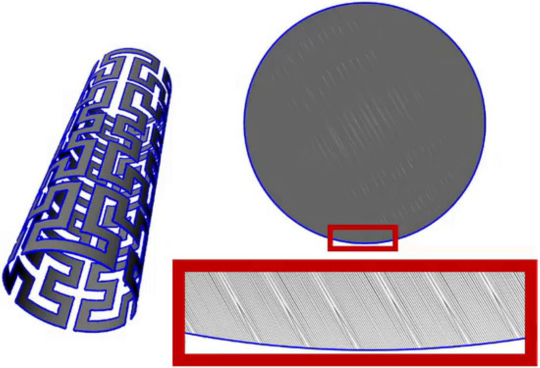
- Ha egy háromszög sem fordul át, a határgörbe még átmetszheti magát...
- Ötlet: határpontok által alkotott virtuális háromszögek átfordulását vizsgáljuk!
- Térbeli hash-sel nagyon hatékony iteratív algoritmus!



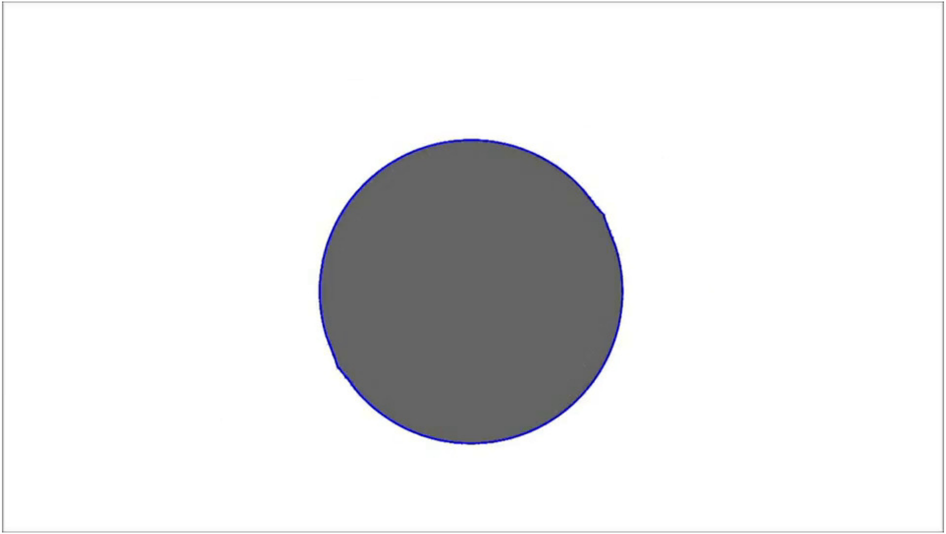
Robusztusság – Animáció!



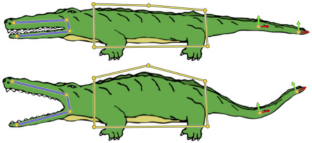
Robusztusság – Animáció!



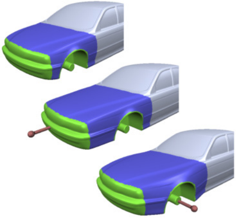
Robusztusság – Animáció!



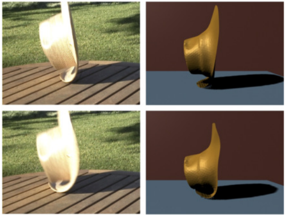
Kitekintés: (kotangens) Laplace mindenütt



2D Deformáció

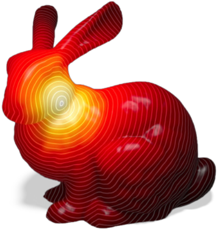


3D Deformáció

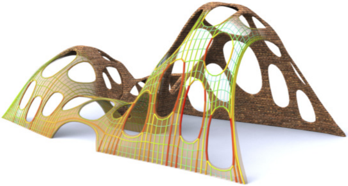


Szimuláció

Szegmentálás



Távolságszámítás



Statika

Köszönöm a figyelmet!