

Hálóparaméterezés I.

Vaitkus Márton

3D Számítógépes Geometria 2 (2018)

Miről lesz szó

1

Bevezetés

- Feladat
- Alkalmazások
- Követelmények

2

Tutte módszere

- Alapötlet
- Súlyok megválasztása – uniform es kotangens súlyok
- Súlyok megválasztása – ált. baricentrikus koordináták
- Súlyok megválasztása – Összehasonlítás

3

Tutte módszere – folytonos analógia

- Tutte-mátrix mint diszkrét Laplace-operátor
- Dirichlet-energia
- Dirichlet-energia háromszöghálókon – Végeselem-módszer (FEM)

1

Bevezetés

- Feladat
- Alkalmazások
- Követelmények

2

Tutte módszere

- Alapötlet
- Súlyok megválasztása – uniform es kotangens súlyok
- Súlyok megválasztása – ált. baricentrikus koordináták
- Súlyok megválasztása – Összehasonlítás

3

Tutte módszere – folytonos analógia

- Tutte-mátrix mint diszkrét Laplace-operátor
- Dirichlet-energia
- Dirichlet-energia háromszöghálókra – Végeselem-módszer (FEM)

1 Bevezetés

● Feladat

- Alkalmazások
- Követelmények

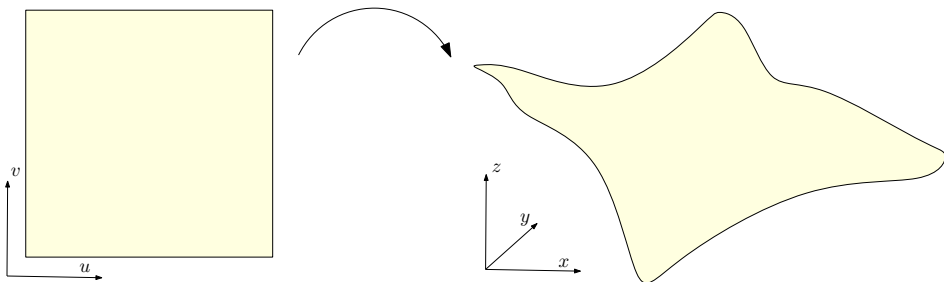
2 Tutte módszere

- Alapötlet
- Súlyok megválasztása – uniform es kotangens súlyok
- Súlyok megválasztása – ált. baricentrikus koordináták
- Súlyok megválasztása – Összehasonlítás

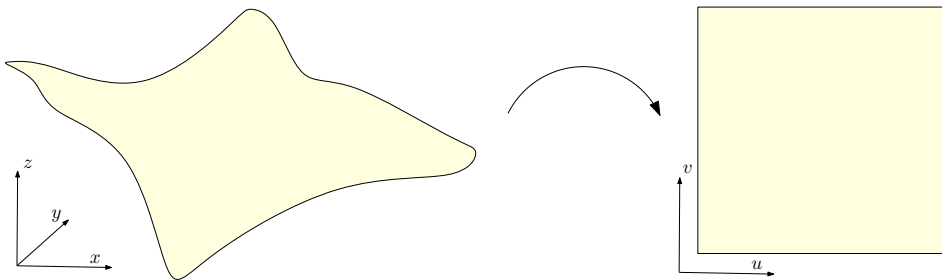
3 Tutte módszere – folytonos analógia

- Tutte-mátrix mint diszkrét Laplace-operátor
- Dirichlet-energia
- Dirichlet-energia háromszöghálókön – Végeselem-módszer (FEM)

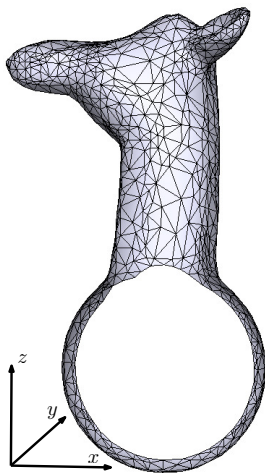
Paraméteres felületek: $2D \rightarrow 3D$



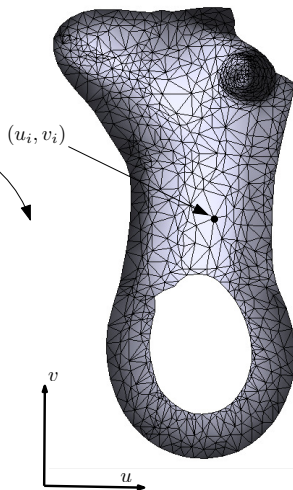
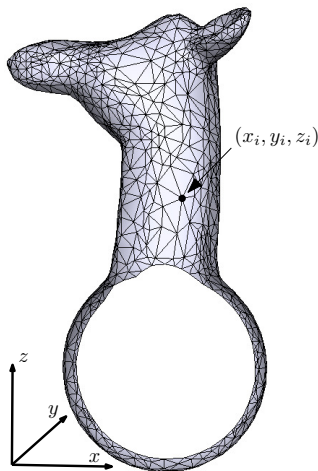
Paraméterezés – Inverz Feladat: $3D \rightarrow 2D$



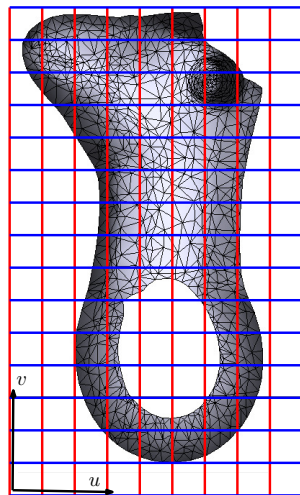
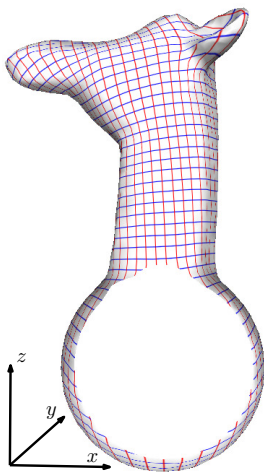
Feladat: 3D Háromszögháló $\rightarrow$ 2D Háromszögháló



Feladat: 3D Háromszögháló $\rightarrow$ 2D Háromszögháló



Feladat: 3D Háromszögháló $\rightarrow$ 2D Háromszögháló



1

Bevezetés

- Feladat
- **Alkalmazások**
- Követelmények

2

Tutte módszere

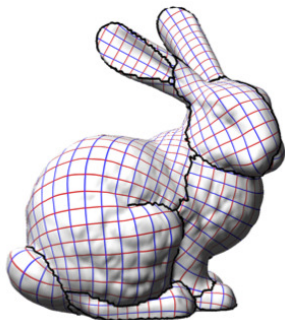
- Alapötlet
- Súlyok megválasztása – uniform es kotangens súlyok
- Súlyok megválasztása – ált. baricentrikus koordináták
- Súlyok megválasztása – Összehasonlítás

3

Tutte módszere – folytonos analógia

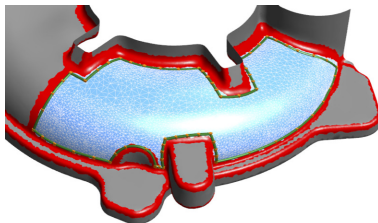
- Tutte-mátrix mint diszkrét Laplace-operátor
- Dirichlet-energia
- Dirichlet-energia háromszöghálókra – Véges elem-módszer (FEM)

Paraméterezés alkalmazásai: Textúrázás

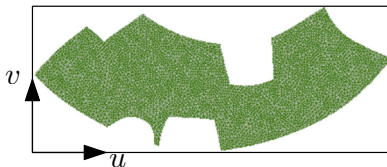


[Lévy et al. 2002]

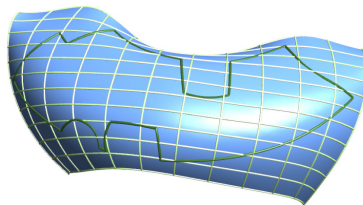
Paraméterezés alkalmazásai: Felületillesztés



Háromszögháló

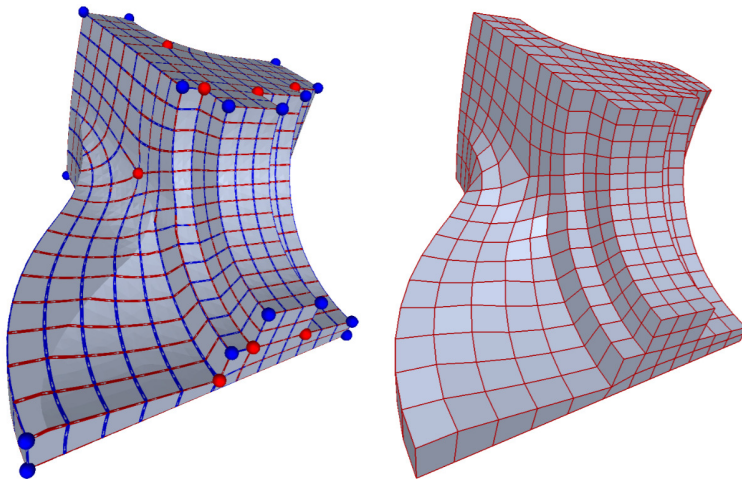


Paraméterezés



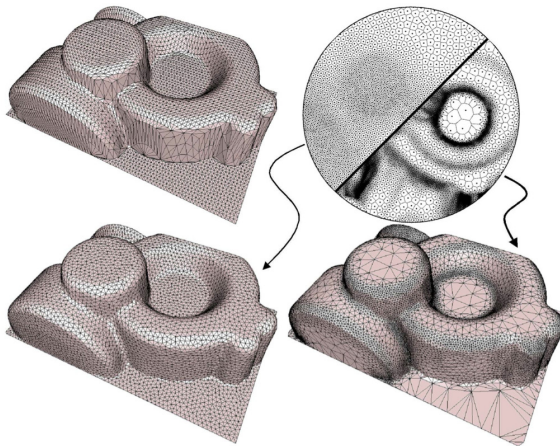
Illesztett B-Spline

Paraméterezés alkalmazásai: Négyszögháló-generálás



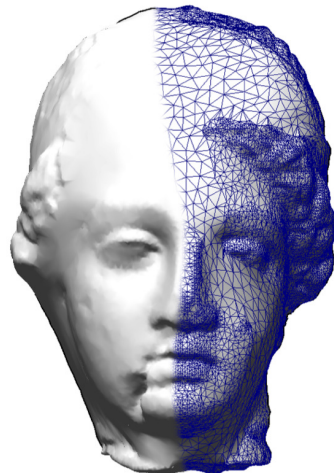
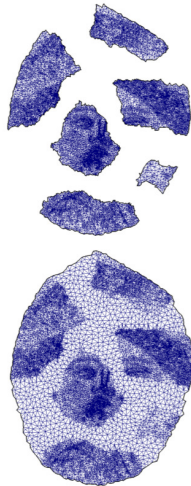
[Bommes et al., 2009]

Paraméterezés alkalmazásai: Újrahálózás



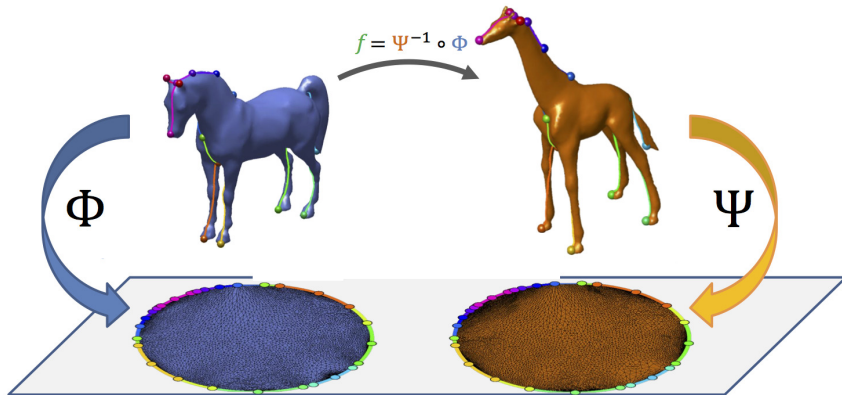
[Alliez et al., 2003]

Paraméterezés alkalmazásai: Felületek extrapolálása



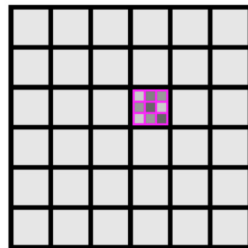
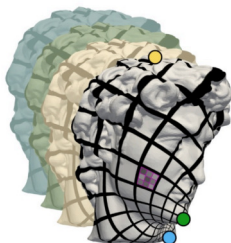
[Lévy, 2003]

Paraméterezés alkalmazásai: Leképezés felületek között



[Aigerman-Poranne, 2016]

Paraméterezés alkalmazásai: Konvolúció, "Deep Learning" felületeken



[Maron et al., 2017]

1

Bevezetés

- Feladat
- Alkalmazások
- Követelmények

2

Tutte módszere

- Alapötlet
- Súlyok megválasztása – uniform es kotangens súlyok
- Súlyok megválasztása – ált. baricentrikus koordináták
- Súlyok megválasztása – Összehasonlítás

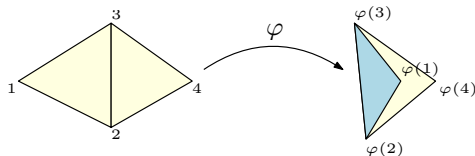
3

Tutte módszere – folytonos analógia

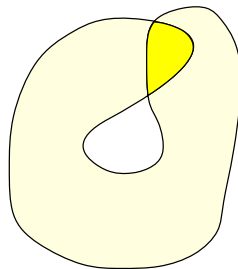
- Tutte-mátrix mint diszkrét Laplace-operátor
- Dirichlet-energia
- Dirichlet-energia háromszöghálókön – Végeselem-módszer (FEM)

Paraméterezés követelményei: Egyértelműség

- A leképezés legyen 1-1 (**injektív**) – háromszöghálókra:



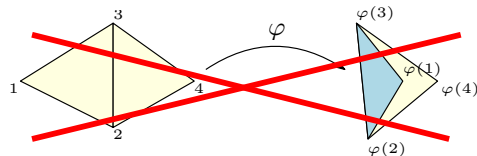
Lokális injektivitás
(Háromszögek nem fordulnak át.)



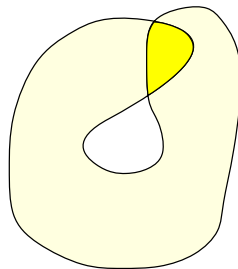
Globális injektivitás
(Határgörbe nem metszi önmagát.)

Paraméterezés követelményei: Egyértelműség

- A leképezés legyen 1-1 (**injektív**) – háromszöghálókra:



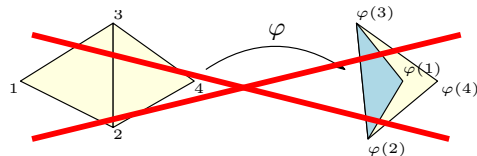
Lokális injektivitás
(Háromszögek nem fordulnak át.)



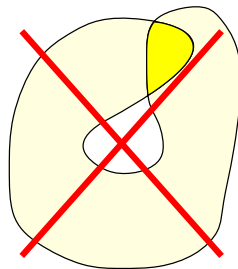
Globális injektivitás
(Határgörbe nem metszi önmagát.)

Paraméterezés követelményei: Egyértelműség

- A leképezés legyen 1-1 (**injektív**) – háromszöghálókra:



Lokális injektivitás
(Háromszögek nem fordulnak át.)



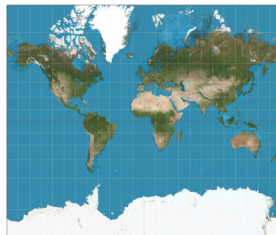
Globális injektivitás
(Határgörbe nem metszi önmagát.)

Paraméterezés követelményei: Torzítás

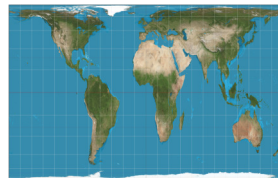
- Régi hagyományok: térképészet
- Minden térkép torzít!
–
Differenciálgeometriai tétel
- Kompromisszumot kell kötni – **torzítási mérték** minimalizálása



Földgömb

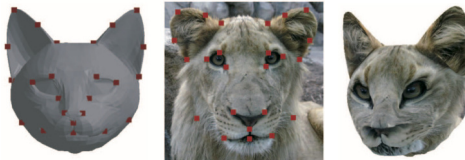


Szögtartó (Mercator)

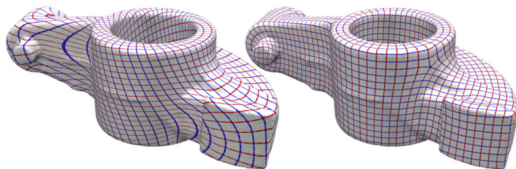


Területtartó

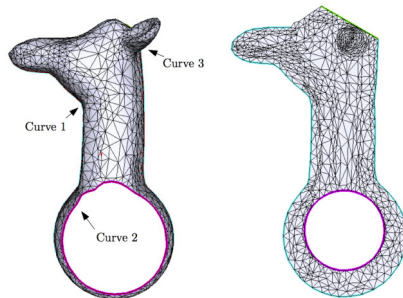
Paraméterezés követelményei: Kényszerek



Pozíció



Koordinátavonal



Geometria

Mai előadás

1

Bevezetés

- Feladat
- Alkalmazások
- Követelmények

2

Tutte módszere

- Alapötlet
- Súlyok megválasztása – uniform es kotangens súlyok
- Súlyok megválasztása – ált. baricentrikus koordináták
- Súlyok megválasztása – Összehasonlítás

3

Tutte módszere – folytonos analógia

- Tutte-mátrix mint diszkrét Laplace-operátor
- Dirichlet-energia
- Dirichlet-energia háromszöghálókon – Végeselem-módszer (FEM)

A következő előadás tartalmából...

- ❶ Differenciálgeometria alapok
 - Belső geometria, érintőtér, metrika
 - Görbület – Theorema Egregium
- ❷ Leképezések torzítása
 - Jacobi-mátrix
 - Szinguláris értékek
- ❸ Szögtartó paraméterezés
 - Konform energia
 - Határgörbe megkötése: Boundary-First Flattening (BFF)
- ❹ Izometrikus paraméterezés (ARAP)
 - ARAP-energia
 - Lokális-Globális módszer, forgatómező-inicializálás
- ❺ Injektivitás biztosítása
 - Heurisztikák: súlyozás, energiasimítás
 - Belsőpont-módszer

1

Bevezetés

- Feladat
- Alkalmazások
- Követelmények

2

Tutte módszere

- Alapötlet
- Súlyok megválasztása – uniform es kotangens súlyok
- Súlyok megválasztása – ált. baricentrikus koordináták
- Súlyok megválasztása – Összehasonlítás

3

Tutte módszere – folytonos analógia

- Tutte-mátrix mint diszkrét Laplace-operátor
- Dirichlet-energia
- Dirichlet-energia háromszöghálókra – Véges elem-módszer (FEM)

1 Bevezetés

- Feladat
- Alkalmazások
- Követelmények

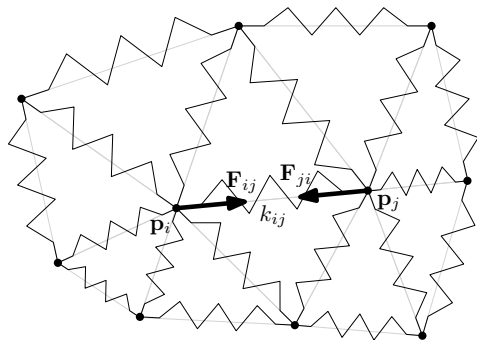
2 Tutte módszere

- Alapötlet
- Súlyok megválasztása – uniform es kotangens súlyok
- Súlyok megválasztása – ált. baricentrikus koordináták
- Súlyok megválasztása – Összehasonlítás

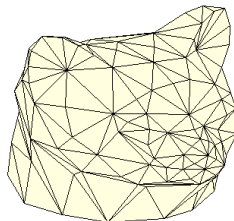
3 Tutte módszere – folytonos analógia

- Tutte-mátrix mint diszkrét Laplace-operátor
- Dirichlet-energia
- Dirichlet-energia háromszöghálókön – Végeselem-módszer (FEM)

Tutte módszere – Alapötlet: élek = rugók

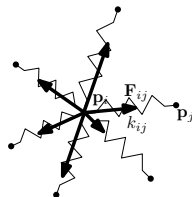


Rugóerő: $\mathbf{F}_{ij} = -k_{ij}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)$



Tutte módszere – Egyenletrendszer

- **Egyensúly** feltétele: erők összege 0

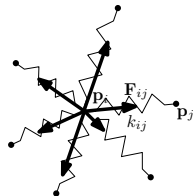


Tutte módszere – Egyenletrendszer

- **Egyensúly** feltétele: erők összege 0

- A $\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$ pontban:

$$\sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} k_{ij} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = 0$$

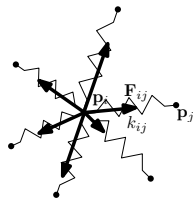


Tutte módszere – Egyenletrendszer

- **Egyensúly** feltétele: erők összege 0

- A $\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$ pontban:

$$\left(\sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} k_{ij} \right) \mathbf{p}_i - \sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} k_{ij} \mathbf{p}_j = 0$$



Tutte módszere – Egyenletrendszer

- **Egyensúly** feltétele: erők összege 0

- A $\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$ pontban:

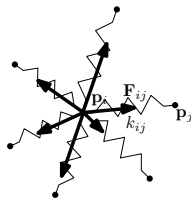
$$\left(\sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} k_{ij} \right) \mathbf{p}_i - \sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} k_{ij} \mathbf{p}_j = 0$$

- **Lineáris egyenletrendszer** az u, v koordinátákra:

$$\mathbf{L} \mathbf{u} = 0$$

$$\mathbf{L} \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{L}_{ij} = \begin{cases} \sum_{k \neq i} k_{ik} & i = j \\ -k_{ij} & i \neq j \end{cases}$$



Tutte módszere – Egyenletrendszer

- **Egyensúly** feltétele: erők összege 0

- A $\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$ pontban:

$$\left(\sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} k_{ij} \right) \mathbf{p}_i - \sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} k_{ij} \mathbf{p}_j = 0$$

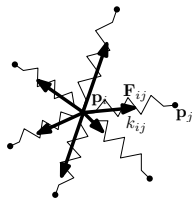
- **Lineáris egyenletrendszer** az u, v koordinátákra:

$$\mathbf{L} \mathbf{u} = 0$$

$$\mathbf{L} \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{L}_{ij} = \begin{cases} \sum_{k \neq i} k_{ik} & i = j \\ -k_{ij} & i \neq j \end{cases}$$

- Határgörbe fix – nincs rá egyenlet, átkerül a jobboldalra



Tutte módszere – Megoldás, az injektivitás feltétele

- Szimmetrikus, pozitív-definit egyenletrendszer –
Megoldás: CG, Cholesky – Ritka, $O(n)$
skálázódik ($200000 \Delta \approx 1 \text{ sec.(!)}$)

Tutte módszere – Megoldás, az injektivitás feltétele

- Szimmetrikus, pozitív-definit egyenletrendszer –
Megoldás: CG, Cholesky – Ritka, $O(n)$
skálázódik ($200000 \Delta \approx 1 \text{ sec.}(!)$)
- Tutte: "How to Draw a Graph" (1963) – ha
teljesül, hogy:

akkor, az egyenletrendszer megoldása egy
injektív leképezés.



W.T. Tutte (1917–2002)

Tutte módszere – Megoldás, az injektivitás feltétele

- Szimmetrikus, pozitív-definit egyenletrendszer –
Megoldás: CG, Cholesky – Ritka, $O(n)$
skálázódik ($200000 \Delta \approx 1 \text{ sec.}(!)$)
- Tutte: "How to Draw a Graph" (1963) – ha
teljesül, hogy:
 - a határgörbe képe **konvex** poligon

akkor, az egyenletrendszer megoldása egy
injektív leképezés.



W.T. Tutte (1917–2002)

Tutte módszere – Megoldás, az injektivitás feltétele

- Szimmetrikus, pozitív-definit egyenletrendszer –
Megoldás: CG, Cholesky – Ritka, $O(n)$
skálázódik ($200000 \Delta \approx 1 \text{ sec.}(!)$)
- Tutte: "How to Draw a Graph" (1963) – ha teljesül, hogy:
 - a határgörbe képe **konvex** poligon
 - a rugóállandók **pozitívak**: $k_{ij} > 0$
 akkor, az egyenletrendszer megoldása egy **injektív** leképezés.



W.T. Tutte (1917–2002)

1 Bevezetés

- Feladat
- Alkalmazások
- Követelmények

2 Tutte módszere

- Alapötlet
- Súlyok megválasztása – uniform es kotangens súlyok
- Súlyok megválasztása – ált. baricentrikus koordináták
- Súlyok megválasztása – Összehasonlítás

3 Tutte módszere – folytonos analógia

- Tutte-mátrix mint diszkrét Laplace-operátor
- Dirichlet-energia
- Dirichlet-energia háromszöghálókra – Véges elem-módszer (FEM)

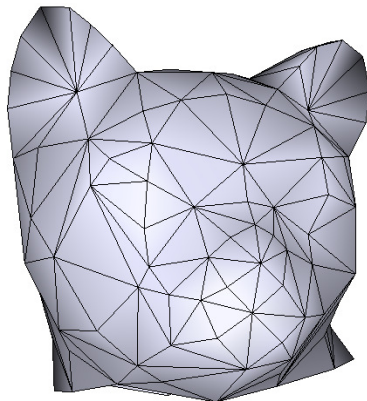
- Milyen rugóállandókat válasszunk?

- Milyen rugóállandókat válasszunk?
- Legegyszerűbb választás: uniform

$$k_{ij} = 1$$

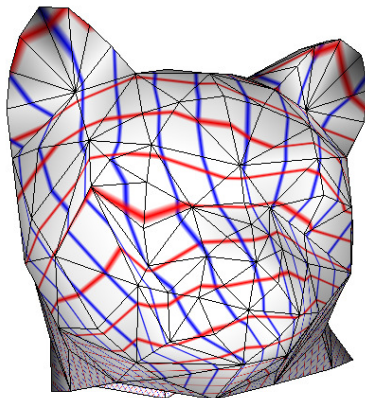
- Milyen rugóállandókat válasszunk?
- Legegyszerűbb választás: uniform

$$k_{ij} = 1$$



- Milyen rugóállandókat válasszunk?
- Legegyszerűbb választás: uniform

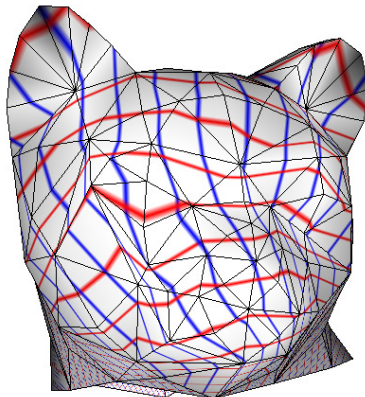
$$k_{ij} = 1$$



- Milyen rugóállandókat válasszunk?
- Legegyszerűbb választás: uniform

$$k_{ij} = 1$$

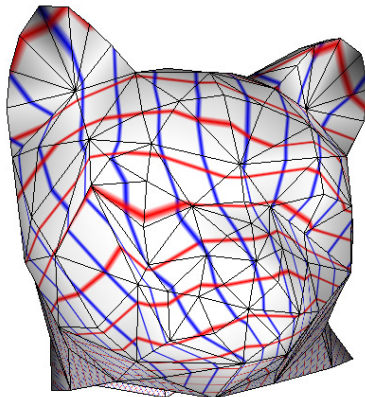
- Nagy torzítás!



- Milyen rugóállandókat válasszunk?
- Legegyszerűbb választás: uniform

$$k_{ij} = 1$$

- Nagy torzítás!
- Mit választhatunk még?



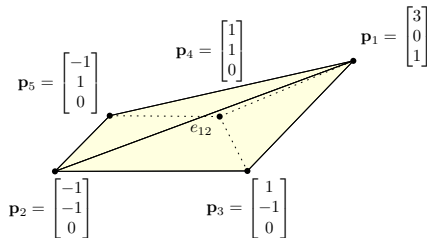
Újjgyakorlat

$$k_{12} = 1.0, \quad k_{13} = 1.0$$

$$k_{14} = 1.0, \quad k_{15} = 1.0$$

$$\mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{p}'_3 = \mathbf{p}_3$$

$$\mathbf{p}'_4 = \mathbf{p}_4, \quad \mathbf{p}'_5 = \mathbf{p}_5$$



$$(k_{12} + k_{13} + k_{14} + k_{15})\mathbf{p}'_1 - k_{12}\mathbf{p}'_2 - k_{13}\mathbf{p}'_3 - k_{14}\mathbf{p}'_4 - k_{15}\mathbf{p}'_5 = 0$$

$$\mathbf{p}'_1 = \dots$$

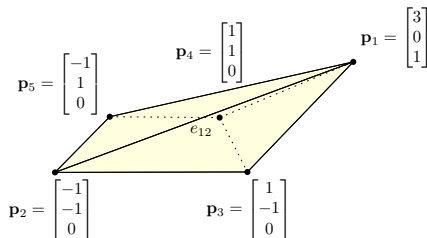
Újjgyakorlat

$$k_{12} = 1.0, \quad k_{13} = 1.0$$

$$k_{14} = 1.0, \quad k_{15} = 1.0$$

$$\mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{p}'_3 = \mathbf{p}_3$$

$$\mathbf{p}'_4 = \mathbf{p}_4, \quad \mathbf{p}'_5 = \mathbf{p}_5$$



$$4\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}'_3 - \mathbf{p}'_4 - \mathbf{p}'_5 = 0$$

$$\mathbf{p}'_1 = \frac{\mathbf{p}'_2 + \mathbf{p}'_3 + \mathbf{p}'_4 + \mathbf{p}'_5}{4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

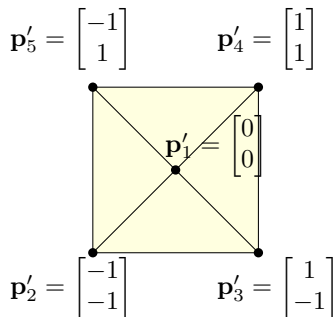
Ujjgyakorlat

$$k_{12} = 1.0, \quad k_{13} = 1.0$$

$$k_{14} = 1.0, \quad k_{15} = 1.0$$

$$\mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{p}'_3 = \mathbf{p}_3$$

$$\mathbf{p}'_4 = \mathbf{p}_4, \quad \mathbf{p}'_5 = \mathbf{p}_5$$



$$4\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}'_3 - \mathbf{p}'_4 - \mathbf{p}'_5 = 0$$

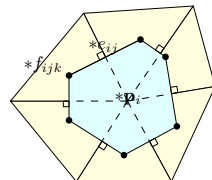
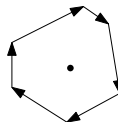
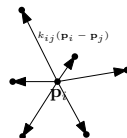
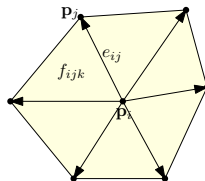
$$\mathbf{p}'_1 = \frac{\mathbf{p}'_2 + \mathbf{p}'_3 + \mathbf{p}'_4 + \mathbf{p}'_5}{4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Súlyok megválasztása – uniform es kotangens súlyok

Súlyok megválasztása – Duális hálók

- Erők összege 0:

$$\sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} k_{ij} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = 0,$$

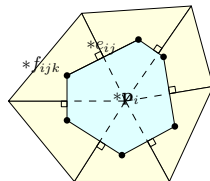
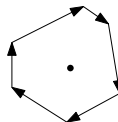
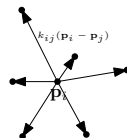
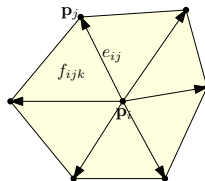


Súlyok megválasztása – Duális hálók

- Erők összege 0:

$$\sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} k_{ij} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = 0,$$

- $k_{ij} = \frac{|\mathbf{F}_{ij}|}{|\mathbf{e}_{ij}|}$



Súlyok megválasztása – uniform es kotangens súlyok

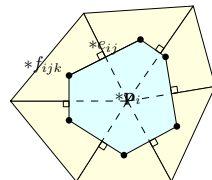
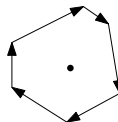
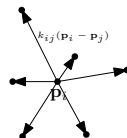
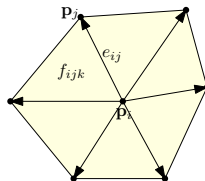
Súlyok megválasztása – Duális hálók

- Erők összege 0:

$$\sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} k_{ij} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = 0,$$

- $k_{ij} = \frac{|\mathbf{F}_{ij}|}{|\mathbf{e}_{ij}|}$

- Forgassuk el 90 fokkal...



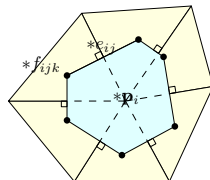
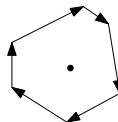
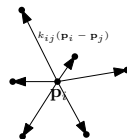
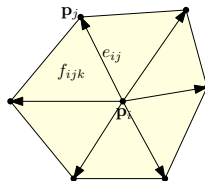
Súlyok megválasztása – Duális hálók

- Erők összege 0:

$$\sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} k_{ij} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = 0,$$

- $k_{ij} = \frac{|\mathbf{F}_{ij}|}{|\mathbf{e}_{ij}|}$

- Forgassuk el 90 fokkal...
- Duális háló (ld. Delaunay-Voronoi):

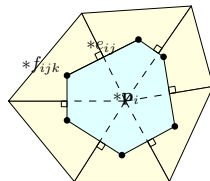
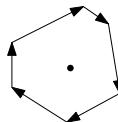
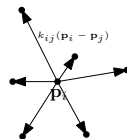
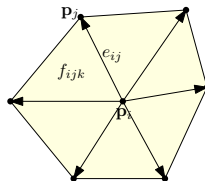


Súlyok megválasztása – Duális hálók

- Erők összege 0:

$$\sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} k_{ij} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = 0,$$

- $k_{ij} = \frac{|\mathbf{F}_{ij}|}{|\mathbf{e}_{ij}|}$
- Forgassuk el 90 fokkal...
- Duális háló (ld. Delaunay-Voronoi):
 - Csúcs $\rightarrow$ Duális Lap



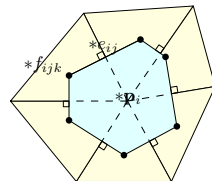
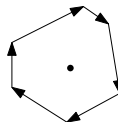
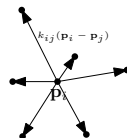
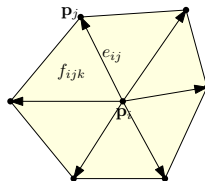
Súlyok megválasztása – Duális hálók

- Erők összege 0:

$$\sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} k_{ij} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = 0,$$

- $k_{ij} = \frac{|\mathbf{F}_{ij}|}{|\mathbf{e}_{ij}|}$

- Forgassuk el 90 fokkal...
- Duális háló (ld. Delaunay-Voronoi):
 - Csúcs $\rightarrow$ Duális Lap
 - Él $\rightarrow$ Duális Él



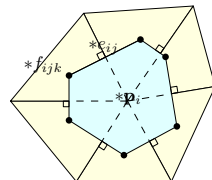
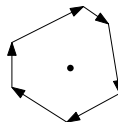
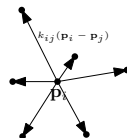
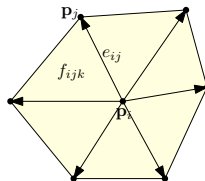
Súlyok megválasztása – Duális hálók

- Erők összege 0:

$$\sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} k_{ij} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = 0,$$

- $k_{ij} = \frac{|\mathbf{F}_{ij}|}{|\mathbf{e}_{ij}|}$

- Forgassuk el 90 fokkal...
- Duális háló (ld. Delaunay-Voronoi):
 - Csúcs $\rightarrow$ Duális Lap
 - Él $\rightarrow$ Duális Él
 - Lap $\rightarrow$ Duális Csúcs



Súlyok megválasztása – Duális hálók

- Erők összege 0:

$$\sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} k_{ij} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = 0,$$

- $k_{ij} = \frac{|\mathbf{F}_{ij}|}{|\mathbf{e}_{ij}|}$

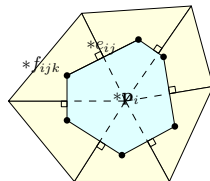
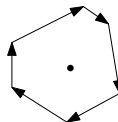
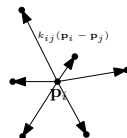
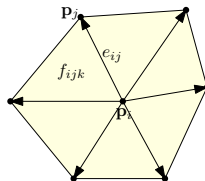
- Forgassuk el 90 fokkal...

- Duális háló (ld. Delaunay-Voronoi):

- Csúcs $\rightarrow$ Duális Lap
- Él $\rightarrow$ Duális Él
- Lap $\rightarrow$ Duális Csúcs

- Megfordítva a logikát:

$$k_{ij} = \frac{|*e_{ij}|}{|e_{ij}|}$$

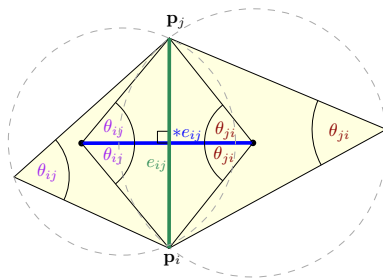


Súlyok megválasztása – Voronoi duális, kotangens formula

- Voronoi duális: duális csúcs =
körülírható kör középpontja

Súlyok megválasztása – Voronoi duális, kotangens formula

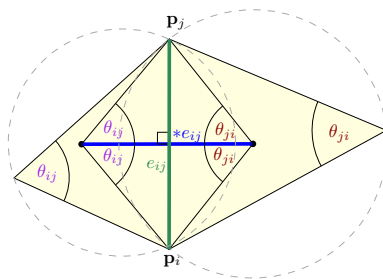
- Voronoi duális: duális csúcs = körülírt kör középpontja
- Rugóállandóra zárt képlet elemi geometriából



$$k_{ij} = \frac{|*e_{ij}|}{|e_{ij}|} = \frac{\cot \theta_{ij} + \cot \theta_{ji}}{2}$$

Súlyok megválasztása – Voronoi duális, kotangens formula

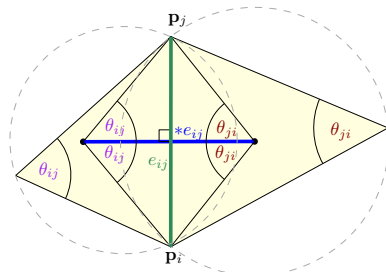
- Voronoi duális: duális csúcs = körülírható kör középpontja
- Rugóállandóra zárt képlet elemi geometriából
- **Kotangens formula**, "diszkrét harmonikus" rugóállandó



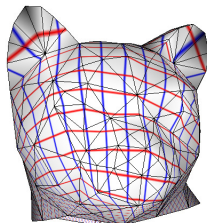
$$k_{ij} = \frac{|*e_{ij}|}{|e_{ij}|} = \frac{\cot \theta_{ij} + \cot \theta_{ji}}{2}$$

Súlyok megválasztása – Voronoi duális, kotangens formula

- Voronoi duális: duális csúcs = körülírható kör középpontja
- Rugóállandóra zárt képlet elemi geometriából
- **Kotangens formula**, "diszkrét harmonikus" rugóállandó
- Jobb, mint az uniform...



$$k_{ij} = \frac{|*e_{ij}|}{|e_{ij}|} = \frac{\cot \theta_{ij} + \cot \theta_{ji}}{2}$$

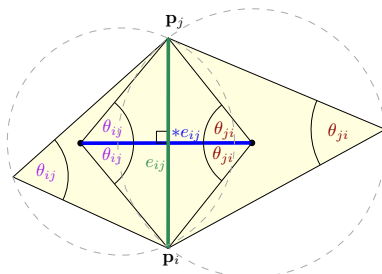


Súlyok megválasztása – Voronoi duális, kotangens formula

- Voronoi duális: duális csúcs = körülírható kör középpontja
- Rugóállandóra zárt képlet elemi geometriából
- **Kotangens formula**, "diszkrét harmonikus" rugóállandó
- Jobb, mint az uniform...
- ... de, ha a háló nem-Delaunay:

$$\theta_{ij} + \theta_{ji} \geq \pi$$

akkor $k_{ij} < 0$ és a háromszögek átfordulhatnak!



$$k_{ij} = \frac{|*e_{ij}|}{|e_{ij}|} = \frac{\cot \theta_{ij} + \cot \theta_{ji}}{2}$$

Újjgyakorlat

$$\cot \theta_{12} = 0.2425, \quad \cot \theta_{21} = -1.4142$$

$$\cot \theta_{13} = 2.8284, \quad \cot \theta_{31} = 0.4472$$

$$\cot \theta_{14} = 0.4472, \quad \cot \theta_{41} = 2.8284$$

$$\cot \theta_{15} = -1.4142, \quad \cot \theta_{51} = 0.2425$$

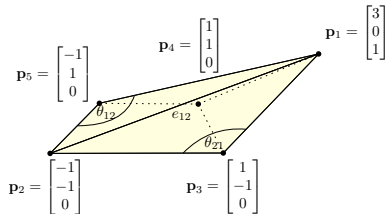
$$k_{12} = (\cot \theta_{12} + \cot \theta_{21})/2 = \dots$$

$$k_{13} = (\cot \theta_{13} + \cot \theta_{31})/2 = \dots$$

$$k_{14} = (\cot \theta_{14} + \cot \theta_{41})/2 = \dots$$

$$k_{15} = (\cot \theta_{15} + \cot \theta_{51})/2 = \dots$$

$$k_s = k_{12} + k_{13} + k_{14} + k_{15} = \dots$$

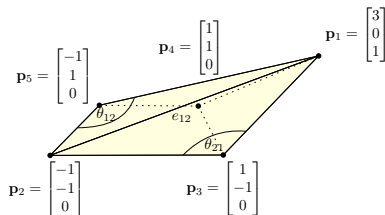


$$k_s \mathbf{p}'_1 - k_{12} \mathbf{p}'_2 - k_{13} \mathbf{p}'_3 - k_{14} \mathbf{p}'_4 - k_{15} \mathbf{p}'_5 = 0$$

$$\mathbf{p}'_1 = \dots$$

$$\cot \theta_{15} = -1.4142, \quad \cot \theta_{51} = 0.2425$$

$$k_s = k_{12} + k_{13} + k_{14} + k_{15} = 2.1$$



$$\mathbf{p}'_1 = (2.11 \ 0 \ 0)$$

Újjgyakorlat

$$\cot \theta_{12} = 0.2425, \quad \cot \theta_{21} = -1.4142$$

$$\cot \theta_{13} = 2.8284, \quad \cot \theta_{31} = 0.4472$$

$$\cot \theta_{14} = 0.4472, \quad \cot \theta_{41} = 2.8284$$

$$\cot \theta_{15} = -1.4142, \quad \cot \theta_{51} = 0.2425$$

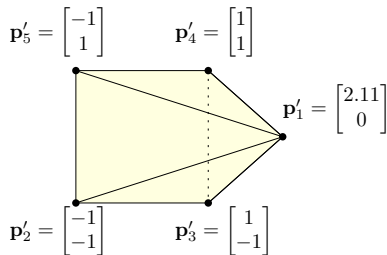
$$k_{12} = (\cot \theta_{12} + \cot \theta_{21})/2 = -0.59$$

$$k_{13} = (\cot \theta_{13} + \cot \theta_{31})/2 = 1.64$$

$$k_{14} = (\cot \theta_{14} + \cot \theta_{41})/2 = 1.64$$

$$k_{15} = (\cot \theta_{15} + \cot \theta_{51})/2 = -0.59$$

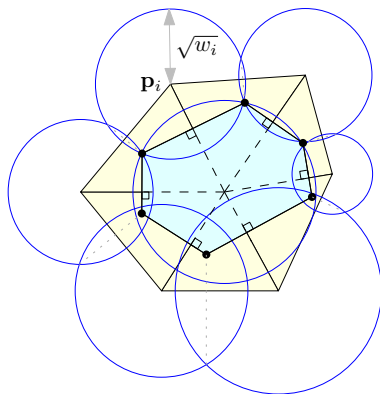
$$k_s = k_{12} + k_{13} + k_{14} + k_{15} = 2.1$$



$$\mathbf{p}'_1 = (2.11 \ 0 \ 0)$$

Súlyok megválasztása – Súlyozott Voronoi-Duálisok*

- Csúcsokhoz rendeljünk w_i súlyokat – $\sqrt{w_i}$ sugarú körök metszéspontjai között duális élek
- "Power diagram" – összes ortogonális duális hálót kiadja
- Lineárisan interpoláljuk a súlyokat – ∇w -vel eltoljuk a körülírható kör középpontját
- Súlypontokhoz legközelebbi duális csúcsok – LS-probléma [Mullen et al., 2011]
- A rugóállandóra kotangens formulához hasonló zárt képlet szögekkel + súlyokkal.
- Ez sem mindig pozitív...



1 Bevezetés

- Feladat
- Alkalmazások
- Követelmények

2 Tutte módszere

- Alapötlet
- Súlyok megválasztása – uniform es kotangens súlyok
- Súlyok megválasztása – ált. baricentrikus koordináták
- Súlyok megválasztása – Összehasonlítás

3 Tutte módszere – folytonos analógia

- Tutte-mátrix mint diszkrét Laplace-operátor
- Dirichlet-energia
- Dirichlet-energia háromszöghálókon – Végeelem-módszer (FEM)

Súlyok megválasztása – Baricentrikus koordináták

- Egyenlet $\mathbf{p}_i$ -re:

$$\left(\sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} k_{ij} \right) \mathbf{p}_i = \sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} k_{ij} \mathbf{p}_j$$

Súlyok megválasztása – Baricentrikus koordináták

- Egyenlet $\mathbf{p}_i$ -re:

$$\mathbf{p}_i = \sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} \left(\frac{k_{ij}}{\sum_{\mathbf{p}_l \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} k_{il}} \right) \mathbf{p}_j$$

Súlyok megválasztása – Baricentrikus koordináták

- Egyenlet $\mathbf{p}_i$ -re:

$$\mathbf{p}_i = \sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} \lambda_{ij} \mathbf{p}_j$$

$$\sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} \lambda_{ij} = 1, \quad \lambda_{ij} > 0$$

- A csúcs a szomszédai konvex kombinációja!

Súlyok megválasztása – Baricentrikus koordináták

- Egyenlet $\mathbf{p}_i$ -re:

$$\mathbf{p}_i = \sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} \lambda_{ij} \mathbf{p}_j$$

$$\sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} \lambda_{ij} = 1, \quad \lambda_{ij} > 0$$

- A csúcs a szomszédai konvex kombinációja!
- Rugóállandók helyett súlyok – vizsgált pont a rendszer súlypontja legyen

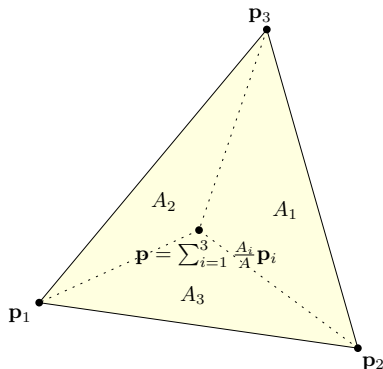
Súlyok megválasztása – Baricentrikus koordináták

- Egyenlet $\mathbf{p}_i$ -re:

$$\mathbf{p}_i = \sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} \lambda_{ij} \mathbf{p}_j$$

$$\sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} \lambda_{ij} = 1, \quad \lambda_{ij} > 0$$

- A csúcs a szomszédai konvex kombinációja!
- Rugóállandók helyett súlyok – vizsgált pont a rendszer súlypontja legyen
- Háromszög: **baricentrikus koordináták** – egyértelmű



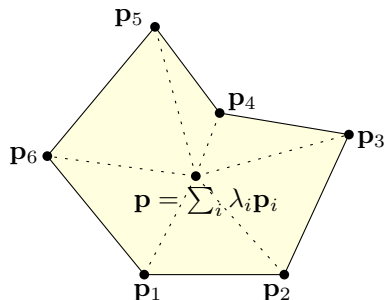
Súlyok megválasztása – Baricentrikus koordináták

- Egyenlet $\mathbf{p}_i$ -re:

$$\mathbf{p}_i = \sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} \lambda_{ij} \mathbf{p}_j$$

$$\sum_{\mathbf{p}_j \in \mathcal{E}_{\mathbf{p}_i}} \lambda_{ij} = 1, \quad \lambda_{ij} > 0$$

- A csúcs a szomszédai konvex kombinációja!
- Rugóállandók helyett súlyok – vizsgált pont a rendszer súlypontja legyen
- Háromszög: **baricentrikus koordináták** – egyértelmű
- Sokszög: **általánosított baricentrikus koordináták** – nem egyértelmű



Súlyok megválasztása – ált. baricentrikus koordináták

Súlyok megválasztása – Baricentrikus koordináták: Mean-Value Koordináták

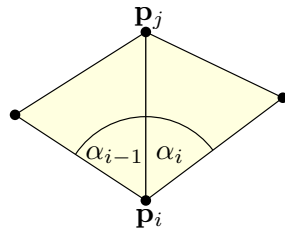
- Általánosított baricentrikus koordináták: aktívan kutatott téma, sok különböző konstrukció

Súlyok megválasztása – ált. baricentrikus koordináták

Súlyok megválasztása – Baricentrikus koordináták: Mean-Value Koordináták

- Általánosított baricentrikus koordináták: aktívan kutatott téma, sok különböző konstrukció
- Népszerű választás: **Mean-Value Koordináták** [Floater, 2003]:

$$k_{ij}^{\text{MV}} = \frac{\tan \frac{\alpha_{i-1}}{2} + \tan \frac{\alpha_i}{2}}{|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j|}$$



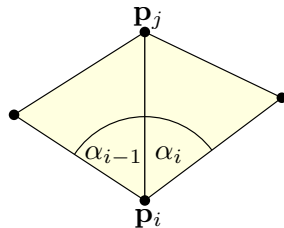
Súlyok megválasztása – ált. baricentrikus koordináták

Súlyok megválasztása – Baricentrikus koordináták: Mean-Value Koordináták

- Általánosított baricentrikus koordináták: aktívan kutatott téma, sok különböző konstrukció
- Népszerű választás: **Mean-Value Koordináták** [Floater, 2003]:

$$k_{ij}^{\text{MV}} = \frac{\tan \frac{\alpha_{i-1}}{2} + \tan \frac{\alpha_i}{2}}{|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j|}$$

- Minden hálóra pozitív! – Injektív leképezés



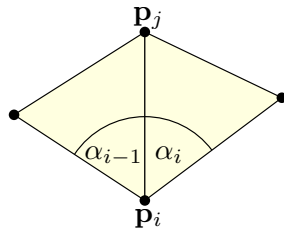
Súlyok megválasztása – ált. baricentrikus koordináták

Súlyok megválasztása – Baricentrikus koordináták: Mean-Value Koordináták

- Általánosított baricentrikus koordináták: aktívan kutatott téma, sok különböző konstrukció
- Népszerű választás: **Mean-Value Koordináták** [Floater, 2003]:

$$k_{ij}^{\text{MV}} = \frac{\tan \frac{\alpha_{i-1}}{2} + \tan \frac{\alpha_i}{2}}{|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j|}$$

- Minden hálóra pozitív! – Injektív leképezés
- Nem szimmetrikus! $k_{ij} \neq k_{ji}$



Újjgyakorlat*

$$\tan(\theta_{23}/2) = 0.14, \quad \tan(\theta_{34}/2) = 0.45$$

$$\tan(\theta_{45}/2) = 0.14, \quad \tan(\theta_{52}/2) = 0.24$$

$$|e_{12}| = 4.24 \quad |e_{23}| = 2.45$$

$$|e_{14}| = 2.45 \quad |e_{15}| = 4.24$$

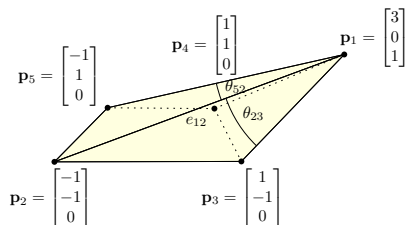
$$\lambda_2 = (\tan(\theta_{23}/2) + \tan(\theta_{52}/2)) / |e_{12}| = \dots$$

$$\lambda_3 = (\tan(\theta_{34}/2) + \tan(\theta_{23}/2)) / |e_{13}| = \dots$$

$$\lambda_4 = (\tan(\theta_{45}/2) + \tan(\theta_{34}/2)) / |e_{14}| = \dots$$

$$\lambda_5 = (\tan(\theta_{52}/2) + \tan(\theta_{45}/2)) / |e_{15}| = \dots$$

$$\mathbf{p}'_1 = \lambda_2 \mathbf{p}_2 + \lambda_3 \mathbf{p}_3 + \lambda_4 \mathbf{p}_4 + \lambda_5 \mathbf{p}_5 = \dots$$



Újjgyakorlat*

$$\tan(\theta_{23}/2) = 0.14, \quad \tan(\theta_{34}/2) = 0.45$$

$$\tan(\theta_{45}/2) = 0.14, \quad \tan(\theta_{52}/2) = 0.24$$

$$|e_{12}| = 4.24 \quad |e_{23}| = 2.45$$

$$|e_{14}| = 2.45 \quad |e_{15}| = 4.24$$

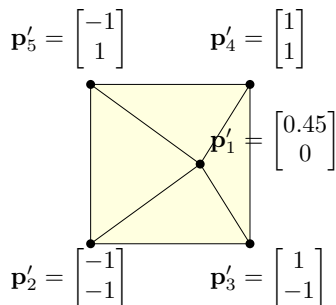
$$\lambda_2 = (\tan(\theta_{23}/2) + \tan(\theta_{52}/2)) / |e_{12}| = 0.09$$

$$\lambda_3 = (\tan(\theta_{34}/2) + \tan(\theta_{23}/2)) / |e_{13}| = 1.64$$

$$\lambda_4 = (\tan(\theta_{45}/2) + \tan(\theta_{34}/2)) / |e_{14}| = 0.24$$

$$\lambda_5 = (\tan(\theta_{52}/2) + \tan(\theta_{45}/2)) / |e_{15}| = 0.09$$

$$\mathbf{p}'_1 = \lambda_2 \mathbf{p}_2 + \lambda_3 \mathbf{p}_3 + \lambda_4 \mathbf{p}_4 + \lambda_5 \mathbf{p}_5 = (0.45 \ 0 \ 0)$$



1 Bevezetés

- Feladat
- Alkalmazások
- Követelmények

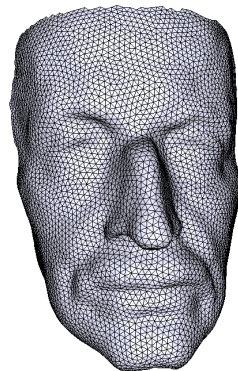
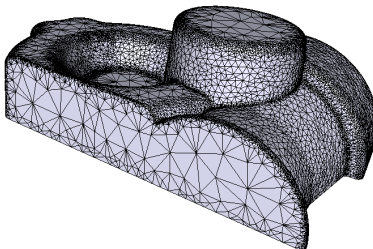
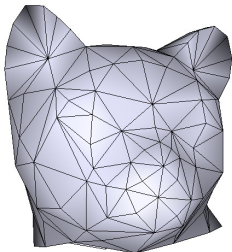
2 Tutte módszere

- Alapötlet
- Súlyok megválasztása – uniform es kotangens súlyok
- Súlyok megválasztása – ált. baricentrikus koordináták
- Súlyok megválasztása – Összehasonlítás

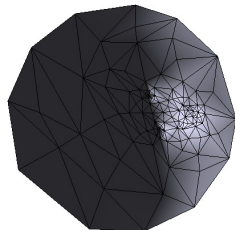
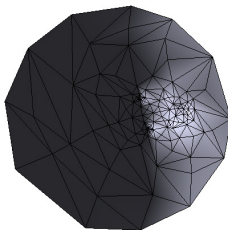
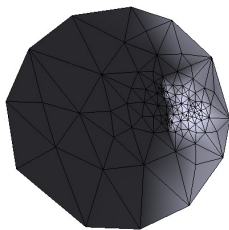
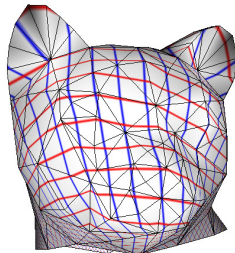
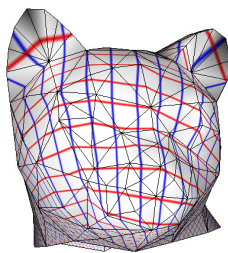
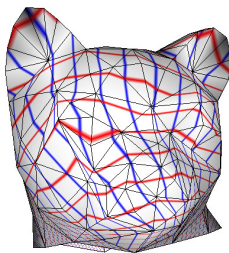
3 Tutte módszere – folytonos analógia

- Tutte-mátrix mint diszkrét Laplace-operátor
- Dirichlet-energia
- Dirichlet-energia háromszöghálókön – Végeselem-módszer (FEM)

Súlyok megválasztása – Összehasonlítás



Súlyok megválasztása – Összehasonlítás

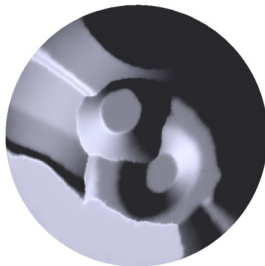
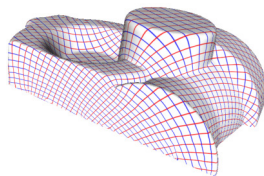
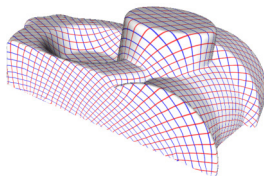
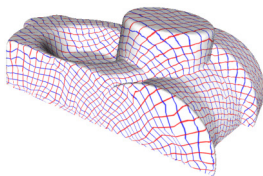


Uniform

Cotangent

Mean-Value

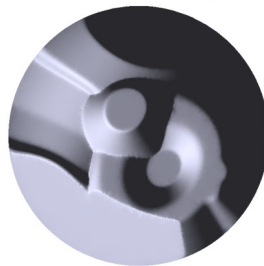
Súlyok megválasztása – Összehasonlítás



Uniform

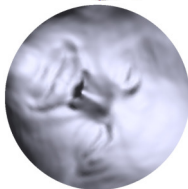
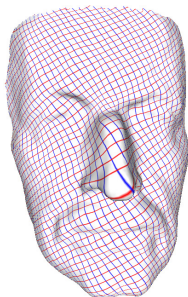


Cotangent

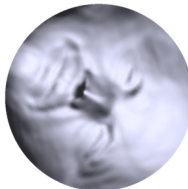
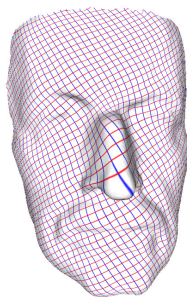


Mean-Value

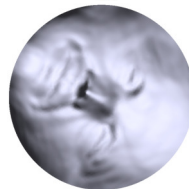
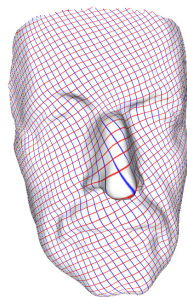
Súlyok megválasztása – Összehasonlítás



Uniform



Cotangent



Mean-Value

1

Bevezetés

- Feladat
- Alkalmazások
- Követelmények

2

Tutte módszere

- Alapötlet
- Súlyok megválasztása – uniform es kotangens súlyok
- Súlyok megválasztása – ált. baricentrikus koordináták
- Súlyok megválasztása – Összehasonlítás

3

Tutte módszere – folytonos analógia

- Tutte-mátrix mint diszkrét Laplace-operátor
- Dirichlet-energia
- Dirichlet-energia háromszöghálókön – Végeselem-módszer (FEM)

1

Bevezetés

- Feladat
- Alkalmazások
- Követelmények

2

Tutte módszere

- Alapötlet
- Súlyok megválasztása – uniform es kotangens súlyok
- Súlyok megválasztása – ált. baricentrikus koordináták
- Súlyok megválasztása – Összehasonlítás

3

Tutte módszere – folytonos analógia

- Tutte-mátrix mint diszkrét Laplace-operátor
- Dirichlet-energia
- Dirichlet-energia háromszöghálókon – Végeselem-módszer (FEM)

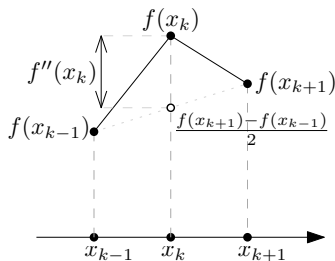
Laplace-operátor és harmonikus függvények

- Második derivált közelítése:

Laplace-operátor és harmonikus függvények

- Második derivált közelítése:

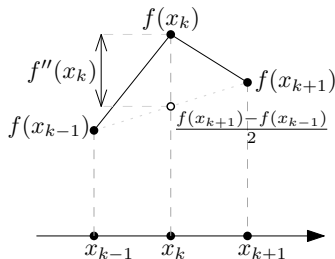
$$f''(x_i) \approx \frac{\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h}}{h}$$



Laplace-operátor és harmonikus függvények

- Második derivált közelítése:

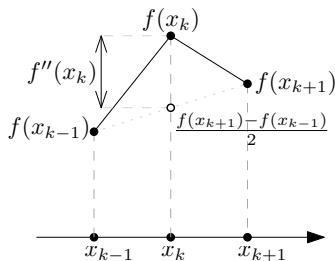
$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$$



Laplace-operátor és harmonikus függvények

- Második derivált közelítése:

$$f''(x_i) \approx 2 \frac{\frac{f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}))}{2} - f(x_i)}{h^2}$$

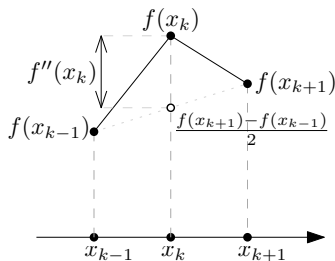


Laplace-operátor és harmonikus függvények

- Második derivált közelítése:

$$f''(x_i) \approx 2 \frac{\frac{f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}))}{2} - f(x_i)}{h^2}$$

- Intuíció: eltérés a pont körüli átlagtól



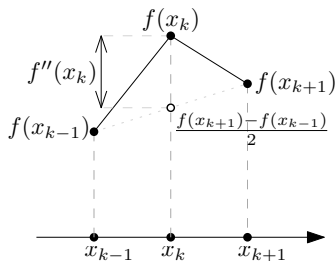
Laplace-operátor és harmonikus függvények

- Második derivált közelítése:

$$f''(x_i) \approx 2 \frac{\frac{f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}))}{2} - f(x_i)}{h^2}$$

- Intuíció: eltérés a pont körüli átlagtól
- Általánosítás – **Laplace-operátor**:

$$\Delta f(x_1, \dots, x_d) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$



Laplace-operátor és harmonikus függvények

- Második derivált közelítése:

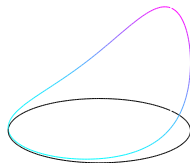
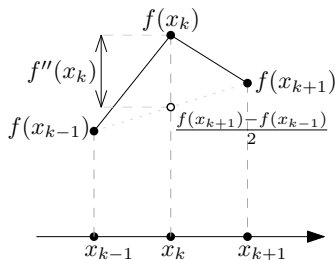
$$f''(x_i) \approx 2 \frac{\frac{f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}))}{2} - f(x_i)}{h^2}$$

- Intuíció: eltérés a pont körüli átlagtól
- Általánosítás – **Laplace-operátor**:

$$\Delta f(x_1, \dots, x_d) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

- Laplace-egyenlet** – *harmonikus függvények*:

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= 0, & x &\in \operatorname{int}\Omega \\ f(x) &= f_0(x) & x &\in \partial\Omega \end{aligned}$$



Laplace-operátor és harmonikus függvények

- Második derivált közelítése:

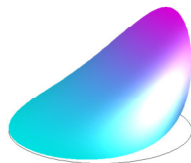
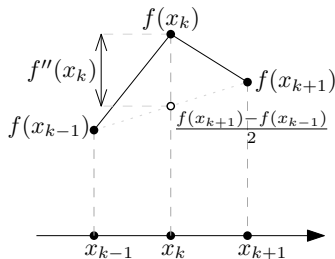
$$f''(x_i) \approx 2 \frac{\frac{f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}))}{2} - f(x_i)}{h^2}$$

- Intuíció: eltérés a pont körüli átlagtól
- Általánosítás – **Laplace-operátor**:

$$\Delta f(x_1, \dots, x_d) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

- Laplace-egyenlet** – *harmonikus függvények*:

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= 0, & x &\in \operatorname{int}\Omega \\ f(x) &= f_0(x) & x &\in \partial\Omega \end{aligned}$$



"Harmonikus" függvények?*

- Laplace-egyenlet $\mathbb{R}^2$ -n:

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

"Harmonikus" függvények?*

- Laplace-egyenlet $\mathbb{R}^2$ -n:

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

- Megoldásai: harmonikus polinomok:

$$x, y, x^2 - y^2, xy, x^3 - 3xy^2, \dots$$

"Harmonikus" függvények?*

- Laplace-egyenlet $\mathbb{R}^2$ -n:

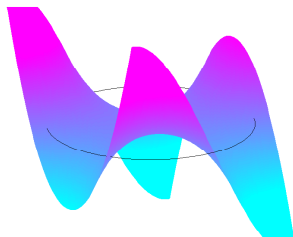
$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

- Megoldásai: harmonikus polinomok:

$$x, y, x^2 - y^2, xy, x^3 - 3xy^2, \dots$$

- Megszorítva az egységkörre:

$$\sin(\varphi), \cos(\varphi), \sin(2\varphi), \cos(2\varphi), \sin(3\varphi), \dots$$



"Harmonikus" függvények?*

- Laplace-egyenlet $\mathbb{R}^2$ -n:

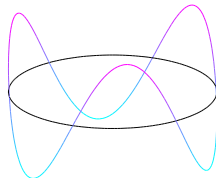
$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

- Megoldásai: harmonikus polinomok:

$$x, y, x^2 - y^2, xy, x^3 - 3xy^2, \dots$$

- Megszorítva az egységkörre:

$$\sin(\varphi), \cos(\varphi), \sin(2\varphi), \cos(2\varphi), \sin(3\varphi), \dots$$



"Harmonikus" függvények?*

- Laplace-egyenlet $\mathbb{R}^2$ -n:

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

- Megoldásai: harmonikus polinomok:

$$x, y, x^2 - y^2, xy, x^3 - 3xy^2, \dots$$

- Megszorítva az egységkörre:

$$\sin(\varphi), \cos(\varphi), \sin(2\varphi), \cos(2\varphi), \sin(3\varphi), \dots$$



"Harmonikus" függvények?*

- Laplace-egyenlet $\mathbb{R}^2$ -n:

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

- Megoldásai: harmonikus polinomok:

$$x, y, x^2 - y^2, xy, x^3 - 3xy^2, \dots$$

- Megszorítva az egységkörre:

$$\sin(\varphi), \cos(\varphi), \sin(2\varphi), \cos(2\varphi), \sin(3\varphi), \dots$$

- A Laplace *sajátfüggvényei*:

$$\Delta_{\mathbb{S}^1} f = \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = -k^2 f$$



Tutte = Diszkrét Harmonikus?

- Tutte – egyenlet pl. u_i -ra:

$$u_i - \sum_j \left(\frac{k_{ij}}{\sum_l k_{il}} \right) u_j = 0$$

Tutte = Diszkrét Harmonikus?

- Tutte – egyenlet pl. u_i -ra:

$$u_i - \sum_j \left(\frac{k_{ij}}{\sum_l k_{il}} \right) u_j = 0$$

- "Átlagtól való eltérés = 0"

Tutte = Diszkrét Harmonikus?

- Tutte – egyenlet pl. u_i -ra:

$$u_i - \sum_j \left(\frac{k_{ij}}{\sum_l k_{il}} \right) u_j = 0$$

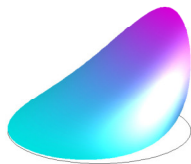
- "Átlagtól való eltérés = 0"
- $\mathbf{Lu} = \mathbf{0}$ " $\approx$ " $\Delta u = 0$?

Tutte = Diszkrét Harmonikus?

- Tutte – egyenlet pl. u_i -ra:

$$u_i - \sum_j \left(\frac{k_{ij}}{\sum_l k_{il}} \right) u_j = 0$$

- "Átlagtól való eltérés = 0"
- $\mathbf{L}u = \mathbf{0}$ " $\approx$ " $\Delta u = 0$?
- u, v – diszkrét harmonikus függvények?

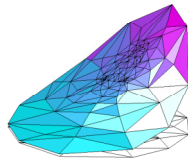


Tutte = Diszkrét Harmonikus?

- Tutte – egyenlet pl. u_i -ra:

$$u_i - \sum_j \left(\frac{k_{ij}}{\sum_l k_{il}} \right) u_j = 0$$

- "Átlagtól való eltérés = 0"
- $\mathbf{Lu} = \mathbf{0}$ " $\approx$ " $\Delta u = 0$?
- $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ – diszkrét harmonikus függvények?

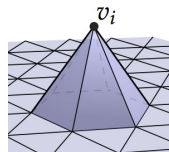
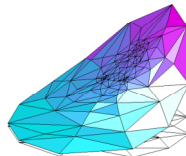


Tutte = Diszkrét Harmonikus?

- Tutte – egyenlet pl. u_i -ra:

$$u_i - \sum_j \left(\frac{k_{ij}}{\sum_l k_{il}} \right) u_j = 0$$

- "Átlagtól való eltérés = 0"
- $\mathbf{L} \mathbf{u} = \mathbf{0}$ " $\approx$ " $\Delta u = 0$?
- $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ – diszkrét harmonikus függvények?
- Háromszögenként lineáris fv. –
sátorfüggvények lin. kombinációja:



$$u(x) \approx \sum u_i \varphi_i(x)$$

Tutte = Diszkrét Harmonikus?

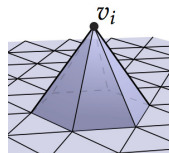
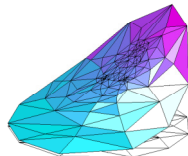
- Tutte – egyenlet pl. u_i -ra:

$$u_i - \sum_j \left(\frac{k_{ij}}{\sum_l k_{il}} \right) u_j = 0$$

- "Átlagtól való eltérés = 0"
- $\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ " $\approx$ " $\Delta u = 0$?
- $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ – diszkrét harmonikus függvények?
- Háromszögenként lineáris fv. –
sátorfüggvények lin. kombinációja:

$$u(x) \approx \sum u_i \varphi_i(x)$$

- De lineáris függvényre triviálisan $\Delta u \equiv 0$... ☠



- 1 Bevezetés
 - Feladat
 - Alkalmazások
 - Követelmények
- 2 Tutte módszere
 - Alapötlet
 - Súlyok megválasztása – uniform es kotangens súlyok
 - Súlyok megválasztása – ált. baricentrikus koordináták
 - Súlyok megválasztása – Összehasonlítás
- 3 Tutte módszere – folytonos analógia
 - Tutte-mátrix mint diszkrét Laplace-operátor
 - Dirichlet-energia
 - Dirichlet-energia háromszöghálókön – Végeselem-módszer (FEM)

A Dirichlet-energia

- Laplace-egyenlet:

$$\Delta f = 0$$

A Dirichlet-energia

- Laplace-egyenlet:

$$\Delta f = 0$$

- "Függvény ne változzon sokat"

A Dirichlet-energia

- Laplace-egyenlet:

$$\Delta f = 0$$

- "Függvény ne változzon sokat"
- Változás egy pont körül = Gradiens

$$\nabla f$$

A Dirichlet-energia

- Laplace-egyenlet:

$$\Delta f = 0$$

- "Függvény ne változzon sokat"
- Változás egy pont körül = Gradiens hossza

$$|\nabla f|$$

A Dirichlet-energia

- Laplace-egyenlet:

$$\Delta f = 0$$

- "Függvény ne változzon sokat"
- Változás egy pont körül = Gradiens hossz négyzete

$$|\nabla f|^2$$

A Dirichlet-energia

- Laplace-egyenlet:

$$\Delta f = 0$$

- "Függvény ne változzon sokat"
- Változás az egész felületen = Gradiens hossz négyzete integrálva

$$\int_{\Omega} |\nabla f|^2 d\Omega$$

A Dirichlet-energia

- Laplace-egyenlet:

$$\Delta f = 0$$

- "Függvény ne változzon sokat"
- Változás az egész felületen = Gradiens hossz négyzete integrálva

$$\int_{\Omega} |\nabla f|^2 d\Omega \rightarrow \min.$$

A Dirichlet-energia

- Laplace-egyenlet:

$$\Delta f = 0$$

- "Függvény ne változzon sokat"
- Változás az egész felületen = Gradiens hossz négyzete integrálva

$$\int_{\Omega} |\nabla f|^2 d\Omega \rightarrow \min.$$

- **Dirichlet-energia** – Laplace-egyenlet megoldása minimalizálja:

$$E_D[f] = \int_{\Omega} |\nabla f|^2 d\Omega \rightarrow \min. \Leftrightarrow \Delta f = 0$$

Dirichlet-energia – geodetikusok, minimálfelületek

- 1D Dirichlet-energia (görbe):

$$\int_a^b |f'(x)| dx = \text{ívhossz!}$$

Dirichlet-energia – geodetikusok, minimálfelületek

- 1D Dirichlet-energia (görbe):

$$\int_a^b |f'(x)| dx = \text{ív hossz!}$$

- Egyenes, geodetikus görbe

Dirichlet-energia – geodetikusok, minimálfelületek

- 1D Dirichlet-energia (görbe):

$$\int_a^b |f'(x)| dx = \text{ív hossz!}$$

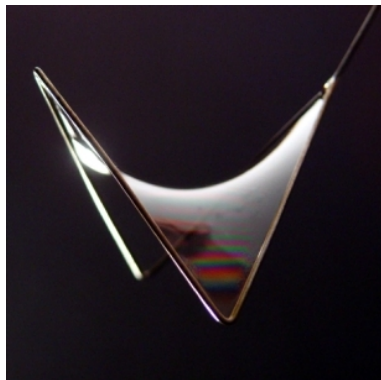
- Egyenes, geodetikus görbe
- 2D Dirichlet-energia (felület) – felszín!

Dirichlet-energia – geodetikusok, minimálfelületek

- 1D Dirichlet-energia (görbe):

$$\int_a^b |f'(x)| dx = \text{ívhossz!}$$

- Egyenes, geodetikus görbe
- 2D Dirichlet-energia (felület) – felszín!
- **Minimálfelületek** – membrán, szappanhártya

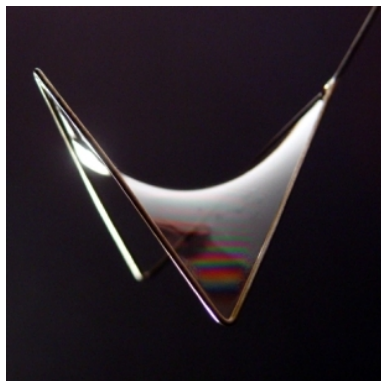


Dirichlet-energia – geodetikusok, minimálfelületek

- 1D Dirichlet-energia (görbe):

$$\int_a^b |f'(x)| dx = \text{ív hossz!}$$

- Egyenes, geodetikus görbe
- 2D Dirichlet-energia (felület) – felszín!
- **Minimálfelületek** – membrán, szappanhártya
- Tutte-módszer – felület, mint szappanhártya



Poliharmonikus egyenletek és energiák*



$$\Delta f = 0$$

(Harmonic)

$$\int |\nabla f|^2 \rightarrow \min.$$

(Dirichlet)

C^0



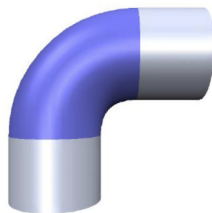
$$\Delta^2 f = 0$$

(Biharmonic)

$$\int |\Delta f|^2 \rightarrow \min.$$

(Thin-Plate)

C^1



$$\Delta^3 f = 0$$

(Triharmonic)

$$\int |\nabla \Delta f|^2 \rightarrow \min.$$

(Curvature-Var.)

C^2

1

Bevezetés

- Feladat
- Alkalmazások
- Követelmények

2

Tutte módszere

- Alapötlet
- Súlyok megválasztása – uniform es kotangens súlyok
- Súlyok megválasztása – ált. baricentrikus koordináták
- Súlyok megválasztása – Összehasonlítás

3

Tutte módszere – folytonos analógia

- Tutte-mátrix mint diszkrét Laplace-operátor
- Dirichlet-energia
- Dirichlet-energia háromszöghálók – Végeselem-módszer (FEM)

Dirichlet-energia háromszöghálóra

- Dirichlet-energia:

$$E_D[f] = \int_{\Omega} |\nabla f|^2 d\Omega \rightarrow \min.$$

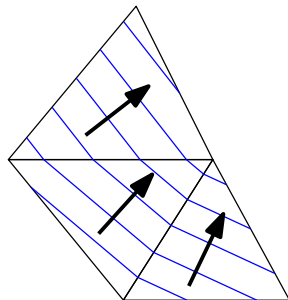
Dirichlet-energia háromszöghálóra

- Dirichlet-energia:

$$E_D[f] = \int_{\Omega} |\nabla f|^2 d\Omega \rightarrow \min.$$

- Háromszögenként lineáris függvény
 $f(x) \approx \sum_i f_i \varphi_i(x)$ – gradiense konstans:

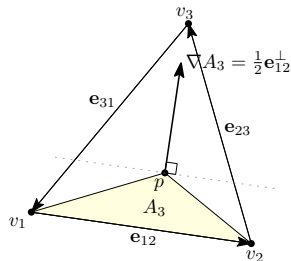
$$E_D[f] \approx \sum_{T \in \mathcal{T}} A_T |\nabla f|^2$$



Gradiens a háromszögben

- Lineáris interpoláció – baricentrikus koordináták:

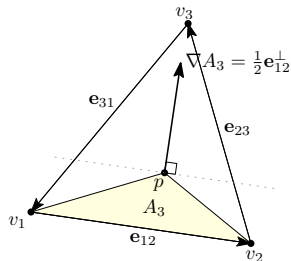
$$f(p) = \frac{A_1}{A} f(\mathbf{v}_1) + \frac{A_2}{A} f(\mathbf{v}_2) + \frac{A_3}{A} f(\mathbf{v}_3)$$



Gradiens a háromszögben

- Lineáris interpoláció – baricentrikus koordináták:

$$\nabla f(p) = \frac{1}{A} (\nabla A_1 f(\mathbf{v}_1) + \nabla A_2 f(\mathbf{v}_2) + \nabla A_3 f(\mathbf{v}_3))$$



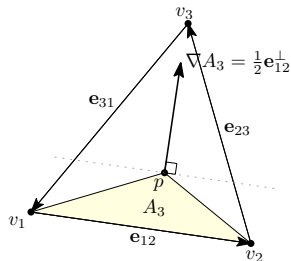
Gradiens a háromszögben

- Lineáris interpoláció – baricentrikus koordináták:

$$\nabla f(p) = \frac{1}{A} (\nabla A_1 f(\mathbf{v}_1) + \nabla A_2 f(\mathbf{v}_2) + \nabla A_3 f(\mathbf{v}_3))$$

- Terület gradiense:

$$\nabla A_3 = \frac{1}{2} \mathbf{e}_{12}^\perp$$



Gradiens a háromszögben

- Lineáris interpoláció – baricentrikus koordináták:

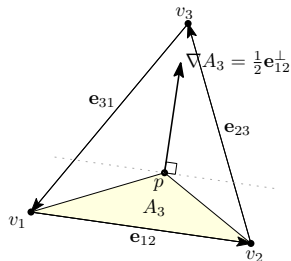
$$\nabla f(p) = \frac{1}{A} (\nabla A_1 f(\mathbf{v}_1) + \nabla A_2 f(\mathbf{v}_2) + \nabla A_3 f(\mathbf{v}_3))$$

- Terület gradiense:

$$\nabla A_3 = \frac{1}{2} \mathbf{e}_{12}^\perp$$

- Így a gradiens:

$$\nabla f(T) = \underbrace{\frac{1}{2A_T} [\mathbf{e}_{23}^\perp \quad \mathbf{e}_{31}^\perp \quad \mathbf{e}_{12}^\perp]}_{\mathbf{G}_T} \begin{bmatrix} f(\mathbf{v}_1) \\ f(\mathbf{v}_2) \\ f(\mathbf{v}_3) \end{bmatrix}.$$



Mit kaptunk?

- Behelyettesítve a gradienst a Dirichlet-energiába:

$$E_D(T) = A_T |\nabla f(T)|^2 = A_T (\nabla f(T))^T \nabla f(T)$$

Mit kaptunk?

- Behelyettesítve a gradienst a Dirichlet-energiába:

$$\begin{aligned}
 E_D(T) &= A_T |\nabla f(T)|^2 = A_T (\nabla f(T))^T \nabla f(T) \\
 &= A_T \begin{bmatrix} f(\mathbf{v}_1) \\ f(\mathbf{v}_2) \\ f(\mathbf{v}_3) \end{bmatrix}^T \mathbf{G}^T \mathbf{G} \begin{bmatrix} f(\mathbf{v}_1) \\ f(\mathbf{v}_2) \\ f(\mathbf{v}_3) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Mit kaptunk?

- Behelyettesítve a gradienst a Dirichlet-energiába:

$$\begin{aligned}
 E_D(T) &= A_T |\nabla f(T)|^2 = A_T (\nabla f(T))^T \nabla f(T) \\
 &= \frac{1}{4A_T} \begin{bmatrix} f(\mathbf{v}_1) \\ f(\mathbf{v}_2) \\ f(\mathbf{v}_3) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{23}^T \mathbf{e}_{23} & \mathbf{e}_{23}^T \mathbf{e}_{31} & \mathbf{e}_{23}^T \mathbf{e}_{12} \\ \mathbf{e}_{31}^T \mathbf{e}_{23} & \mathbf{e}_{31}^T \mathbf{e}_{31} & \mathbf{e}_{31}^T \mathbf{e}_{12} \\ \mathbf{e}_{12}^T \mathbf{e}_{23} & \mathbf{e}_{12}^T \mathbf{e}_{31} & \mathbf{e}_{12}^T \mathbf{e}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\mathbf{v}_1) \\ f(\mathbf{v}_2) \\ f(\mathbf{v}_3) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Mit kaptunk?

- Behelyettesítve a gradienst a Dirichlet-energiába:

$$\begin{aligned}
 E_D(T) &= A_T |\nabla f(T)|^2 = A_T (\nabla f(T))^T \nabla f(T) \\
 &= \frac{1}{4A_T} \begin{bmatrix} f(\mathbf{v}_1) \\ f(\mathbf{v}_2) \\ f(\mathbf{v}_3) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{23}^T \mathbf{e}_{23} & \mathbf{e}_{23}^T \mathbf{e}_{31} & \mathbf{e}_{23}^T \mathbf{e}_{12} \\ \mathbf{e}_{31}^T \mathbf{e}_{23} & \mathbf{e}_{31}^T \mathbf{e}_{31} & \mathbf{e}_{31}^T \mathbf{e}_{12} \\ \mathbf{e}_{12}^T \mathbf{e}_{23} & \mathbf{e}_{12}^T \mathbf{e}_{31} & \mathbf{e}_{12}^T \mathbf{e}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\mathbf{v}_1) \\ f(\mathbf{v}_2) \\ f(\mathbf{v}_3) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

- Észrevesszük: $\mathbf{e}_{23}^T \mathbf{e}_{31} = |\mathbf{e}_{23}| |\mathbf{e}_{31}| \cos \theta_{12}$, $A_T = |\mathbf{e}_{23}| |\mathbf{e}_{31}| \sin \theta_{12}$, $\mathbf{e}_{23} = -(\mathbf{e}_{31} + \mathbf{e}_{12})$

Mit kaptunk?

- Behelyettesítve a gradienst a Dirichlet-energiába:

$$E_D(T) = A_T |\nabla f(T)|^2 = A_T (\nabla f(T))^T \nabla f(T)$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} f(\mathbf{v}_1) \\ f(\mathbf{v}_2) \\ f(\mathbf{v}_3) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -(\cot \theta_{12} + \cot \theta_{31}) & \cot \theta_{12} & \cot \theta_{31} \\ \cot \theta_{12} & -(\cot \theta_{12} + \cot \theta_{23}) & \cot \theta_{23} \\ \cot \theta_{23} & \cot \theta_{31} & -(\cot \theta_{23} + \cot \theta_{31}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\mathbf{v}_1) \\ f(\mathbf{v}_2) \\ f(\mathbf{v}_3) \end{bmatrix}$$

- Észrevesszük: $\mathbf{e}_{23}^T \mathbf{e}_{31} = |\mathbf{e}_{23}| |\mathbf{e}_{31}| \cos \theta_{12}$, $A_T = |\mathbf{e}_{23}| |\mathbf{e}_{31}| \sin \theta_{12}$, $\mathbf{e}_{23} = -(\mathbf{e}_{31} + \mathbf{e}_{12})$

Mit kaptunk?

- Behelyettesítve a gradienst a Dirichlet-energiába:

$$\begin{aligned}
 E_D(T) &= A_T |\nabla f(T)|^2 = A_T (\nabla f(T))^T \nabla f(T) \\
 &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} f(\mathbf{v}_1) \\ f(\mathbf{v}_2) \\ f(\mathbf{v}_3) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -(\cot \theta_{12} + \cot \theta_{31}) & \cot \theta_{12} & \cot \theta_{31} \\ \cot \theta_{12} & -(\cot \theta_{12} + \cot \theta_{23}) & \cot \theta_{23} \\ \cot \theta_{23} & \cot \theta_{31} & -(\cot \theta_{23} + \cot \theta_{31}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\mathbf{v}_1) \\ f(\mathbf{v}_2) \\ f(\mathbf{v}_3) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

- Összeadvá:

$$\frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{L} \mathbf{f} \rightarrow \min. \Leftrightarrow \mathbf{L} \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

Mit kaptunk?

- Behelyettesítve a gradienst a Dirichlet-energiába:

$$E_D(T) = A_T |\nabla f(T)|^2 = A_T (\nabla f(T))^T \nabla f(T)$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} f(\mathbf{v}_1) \\ f(\mathbf{v}_2) \\ f(\mathbf{v}_3) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -(\cot \theta_{12} + \cot \theta_{31}) & \cot \theta_{12} & \cot \theta_{31} \\ \cot \theta_{12} & -(\cot \theta_{12} + \cot \theta_{23}) & \cot \theta_{23} \\ \cot \theta_{23} & \cot \theta_{31} & -(\cot \theta_{23} + \cot \theta_{31}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\mathbf{v}_1) \\ f(\mathbf{v}_2) \\ f(\mathbf{v}_3) \end{bmatrix}$$

- Összeadva:

$$\frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{L} \mathbf{f} \rightarrow \min. \Leftrightarrow \mathbf{L} \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{L}$ a korábbi **Tutte-mátrix** kotangens súlyokkal

$$\mathbf{L}_{ij} = \begin{cases} \sum_{k \neq i} \frac{\cot \theta_{ik} + \cot \theta_{ki}}{2} & i = j \\ -\frac{\cot \theta_{ij} + \cot \theta_{ji}}{2} & i \neq j \end{cases}$$

Mit csináltunk?

- Kiindultunk egy differenciálegyenletből:

$$\Delta f = 0$$

Mit csináltunk?

- Kiindultunk egy differenciálegyenletből:

$$\Delta f = 0$$

- Ennek megfeleltettünk egy minimalizációs (variációs) feladatot:

$$\int_{\Omega} |\nabla f|^2 d\Omega \rightarrow \min.$$

Mit csináltunk?

- Kiindultunk egy differenciálegyenletből:

$$\Delta f = 0$$

- Ennek megfeleltettünk egy minimalizációs (variációs) feladatot:

$$\int_{\Omega} |\nabla f|^2 d\Omega \rightarrow \min.$$

- Ebbe behelyettesítettük a függvény egy véges közelítését:

$$f(x) \approx \sum f_i \varphi_i(x)$$

Mit csináltunk?

- Kiindultunk egy differenciálegyenletből:

$$\Delta f = 0$$

- Ennek megfeleltettünk egy minimalizációs (variációs) feladatot:

$$\int_{\Omega} |\nabla f|^2 d\Omega \rightarrow \min.$$

- Ebbe behelyettesítettük a függvény egy véges közelítését:

$$f(x) \approx \sum f_i \varphi_i(x)$$

- Deriválás után kaptunk egy lineáris rendszert az együtthatókra:

$$\mathbf{L}f = \mathbf{0}$$

Mit csináltunk?

- Kiindultunk egy differenciálegyenletről:

$$\Delta f = 0$$

- Ennek megfeleltettünk egy minimalizációs (variációs) feladatot:

$$\int_{\Omega} |\nabla f|^2 d\Omega \rightarrow \min.$$

- Ebbe behelyettesítettük a függvény egy véges közelítését:

$$f(x) \approx \sum f_i \varphi_i(x)$$

- Deriválás után kaptunk egy lineáris rendszert az együtthatókra:

$$\mathbf{L}f = 0$$

- Általánosan érvényes séma! – **Végeselem-módszer (Finite Element Method – FEM)**

Mit csináltunk?

- Kiindultunk egy differenciálegyenletből:

$$\Delta f = 0$$

- Ennek megfeleltettünk egy minimalizációs (variációs) feladatot:

$$\int_{\Omega} |\nabla f|^2 d\Omega \rightarrow \min.$$

- Ebbe behelyettesítettük a függvény egy véges közelítését:

$$f(x) \approx \sum f_i \varphi_i(x)$$

- Deriválás után kaptunk egy lineáris rendszert az együtthatókra:

$$\mathbf{L} \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

- Általánosan érvényes séma! – **Végeselem-módszer (Finite Element Method – FEM)**
- Mátrix elemei integrálok – numerikusan (kvadraturával) számoljuk

A következő előadás tartalmából...

- ❶ Differenciálgeometria alapok
 - Belső geometria, érintőtér, metrika
 - Görbület – Theorema Egregium
- ❷ Leképezések torzítása
 - Jacobi-mátrix
 - Szinguláris értékek
- ❸ Szögtartó paraméterezés
 - Konform energia
 - Határgörbe megkötése: Boundary-First Flattening (BFF)
- ❹ Izometrikus paraméterezés (ARAP)
 - ARAP-energia
 - Lokális-Globális módszer, forgatómező-inicializálás
- ❺ Injektivitás biztosítása
 - Heurisztikák: súlyozás, energiasimítás
 - Belsőpont-módszer

Köszönöm a figyelmet!