

Felületrekonstrukció Implicit Felületekkel

Vaitkus Márton

3D Számítógépes Geometria 2 (2018)

Miről lesz szó

- 1 Bevezetés
 - Miért Implicit?
 - Milyen Implicit?
- 2 Illesztési Feladatok
 - Implicit Illesztési Feladat
 - Iteratív módszerek, Active Contours
 - Least-squares és PCA
 - Simítás, súlyozás
 - Büntetőfüggvények
- 3 Globális Illesztés
 - RBF
 - Poisson rekonstrukció
- 4 Lokális Illesztés
 - Lokális Érintősíkok
 - Partition-of-Unity Implicits

1 Bevezetés

- Miért Implicit?
- Milyen Implicit?

2 Illesztési Feladatok

- Implicit Illesztési Feladat
- Iteratív módszerek, Active Contours
- Least-squares és PCA
- Simítás, súlyozás
- Büntetőfüggvények

3 Globális Illesztés

- RBF
- Poisson rekonstrukció

4 Lokális Illesztés

- Lokális Érintősíkok
- Partition-of-Unity Implicits

1 Bevezetés

- Miért Implicit?
- Milyen Implicit?

2 Illesztési Feladatok

- Implicit Illesztési Feladat
- Iteratív módszerek, Active Contours
- Least-squares és PCA
- Simítás, súlyozás
- Büntetőfüggvények

3 Globális Illesztés

- RBF
- Poisson rekonstrukció

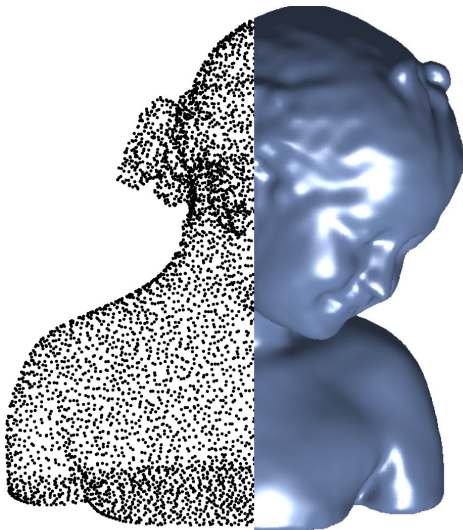
4 Lokális Illesztés

- Lokális Érintősíkok
- Partition-of-Unity Implicits

Miért Implicit?

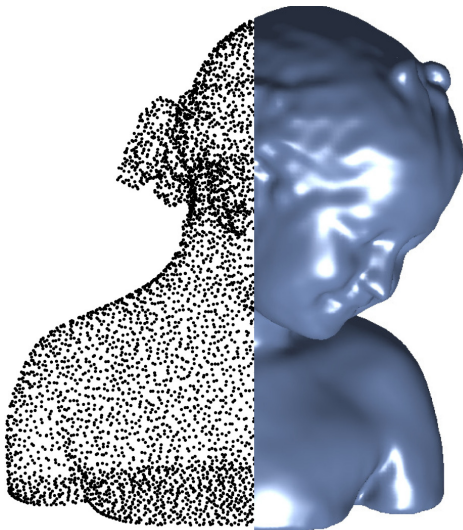
Feladat: Felület Rekonstrukciója Pontfelhőből

- Adott: 3D pontfelhő



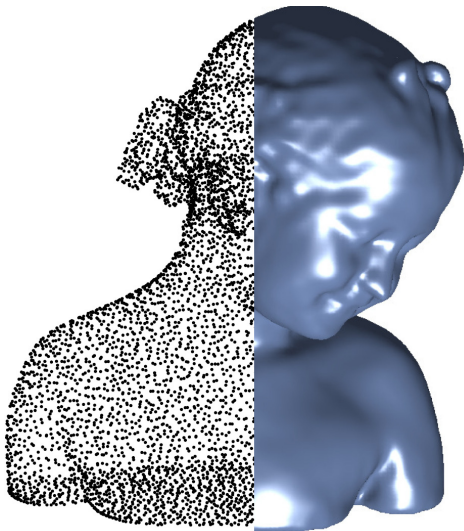
100

- Adott: 3D pontfelhő
- Cél: eredeti objektumot közelítő 3D felület rekonstrukciója



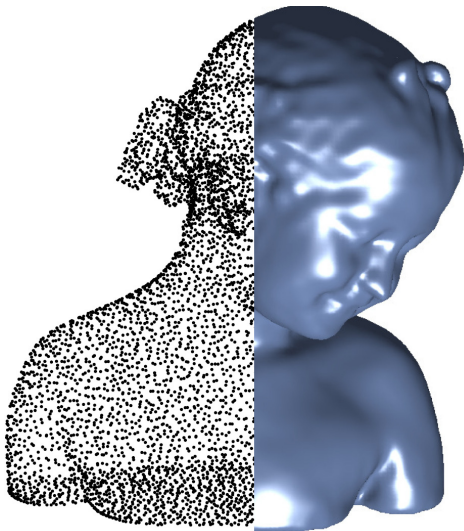
Feladat: Felület Rekonstrukciója Pontfelhőből

- Adott: 3D pontfelhő
- Cél: eredeti objektumot közelítő 3D felület rekonstrukciója
- Mérnöki visszafejtés: CAD/B-Rep struktúra rekonstrukciója – nagyon speciális eset!



Feladat: Felület Rekonstrukciója Pontfelhőből

- Adott: 3D pontfelhő
- Cél: eredeti objektumot közelítő 3D felület rekonstrukciója
- Mérnöki visszafejtés: CAD/B-Rep struktúra rekonstrukciója – nagyon speciális eset!
- Továbbiakban: általános geometria/topológia, pl. művészeti alkotások, épületek, élőlények, stb.



Miért Implicit?

Rekonstrukció Kihívásai

Inferred
shapePerfect
point set

Noise

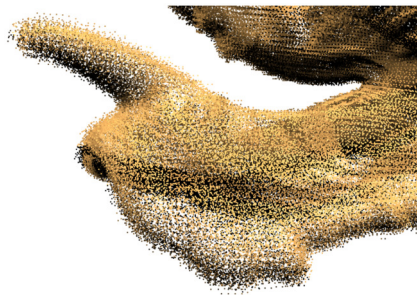


Outliers

Non-uniform
sampling densityMissing
dataVariable
noise

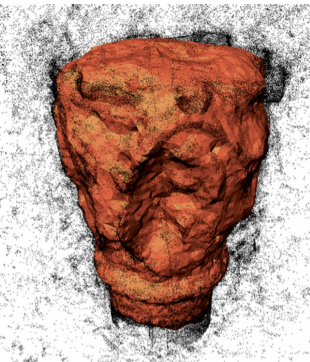
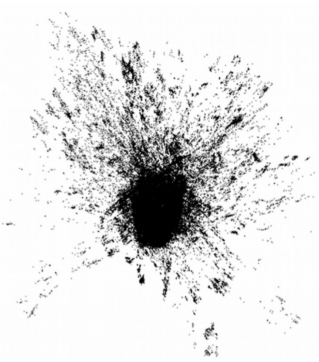
Miért Implicit?

Rekonstrukció Kihívásai: Zajos pontfelhők



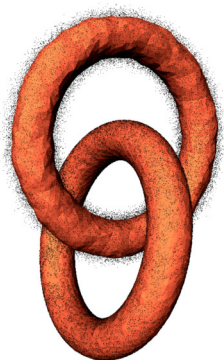
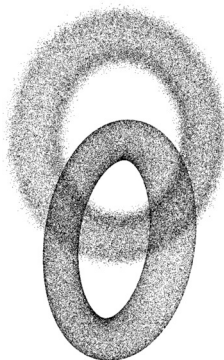
Miért Implicit?

Rekonstrukció Kihívásai: Nagyon zajos pontfelhők



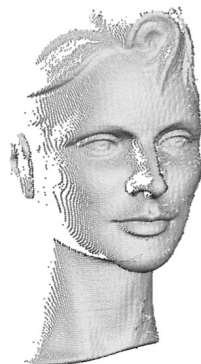
Miért Implicit?

Rekonstrukció Kihívásai: Általános Topológia



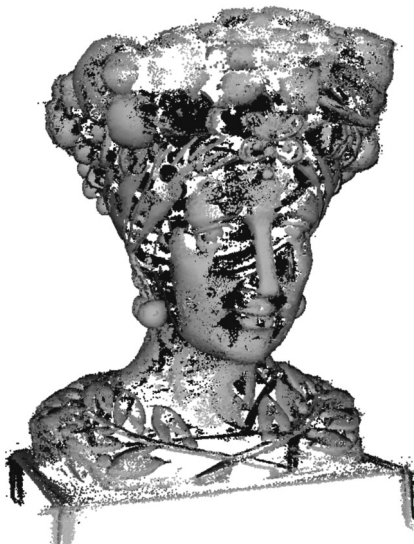
Miért Implicit?

Rekonstrukció Kihívásai: Hiányzó adat, kitöltés, kiterjesztés



Miért Implicit?

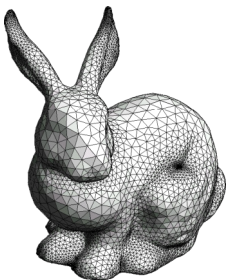
Rekonstrukció Kihívásai: Hiányzó adat, kitöltés, kiterjesztés



Milyen Reprezentáció?

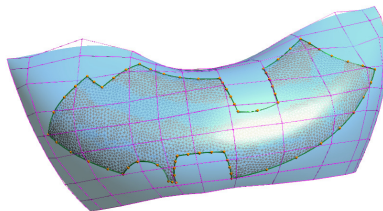
Háromszöghálók

- Zajos adat: Előfeldolgozni kell
- Topológia: Általános
- Kiterjesztés: Külön feladat



Paraméteres felületek

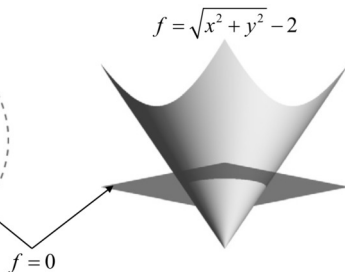
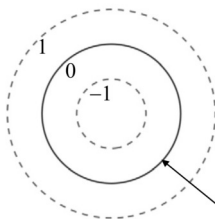
- Zajos adat: Direkt illeszthető
- Topológia: Erősen korlátozott
- Kiterjesztés: Instabil



Implicit Reprezentáció!

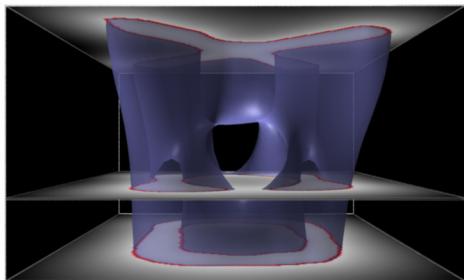
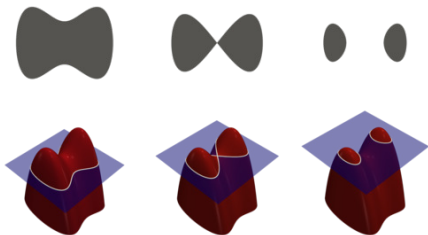
Implicit felületek

- Zajos adat: Direkt Illeszthető
- Topológia: Általános
- Kiterjesztés: Stabil



Miért Implicit?

Implicit Előnyei: Általános Topológia



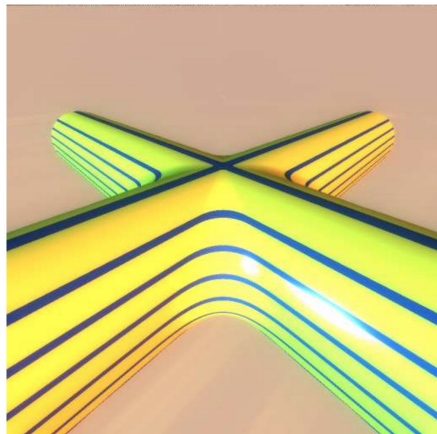
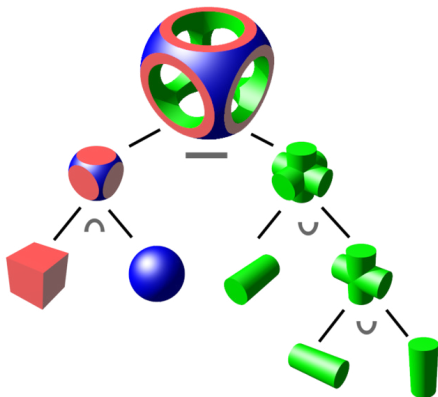
Miért Implicit?

Implicit Előnyei: Külső/Belső Szegmentálás



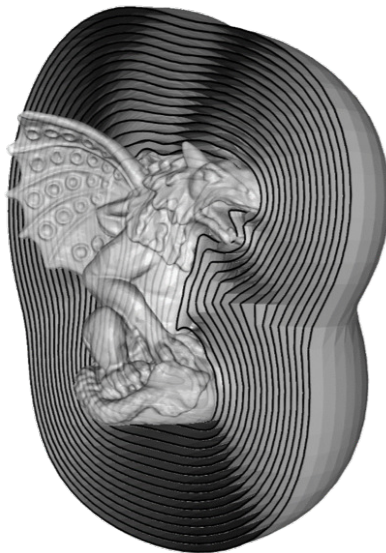
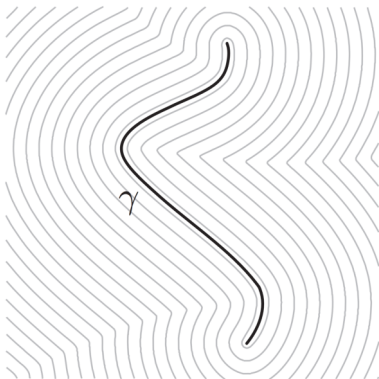
Miért Implicit?

Implicit Előnyei: Boolean műveletek, blending



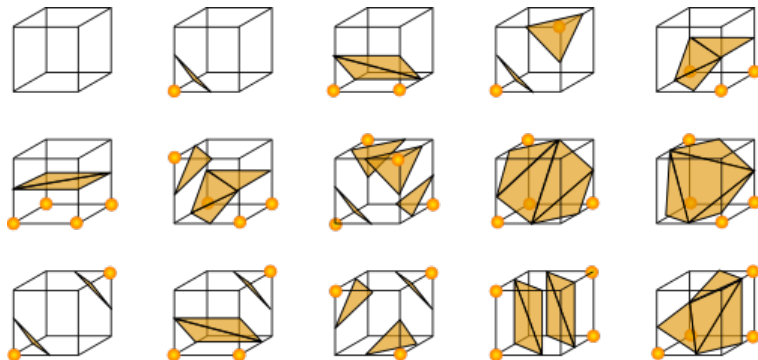
Miért Implicit?

Implicit Előnyei: Offsettelés



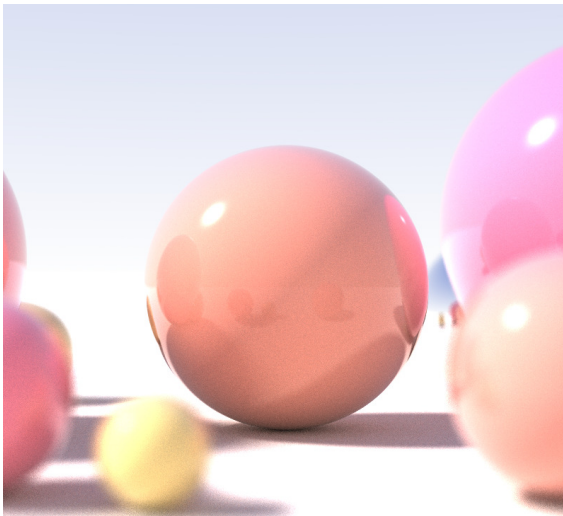
Miért Implicit?

Implicit Előnyei: Konverzió



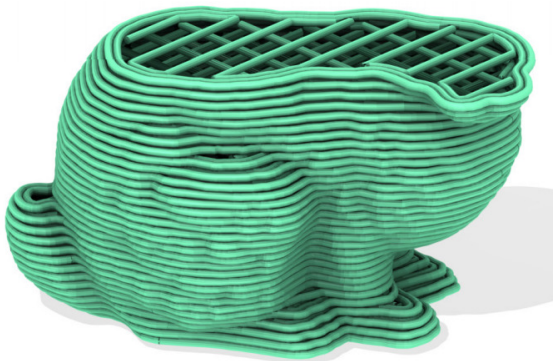
Miért Implicit?

Implicit Előnyei: Sugárkövetés



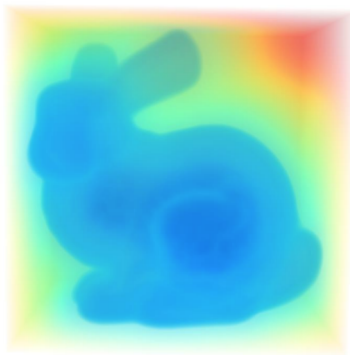
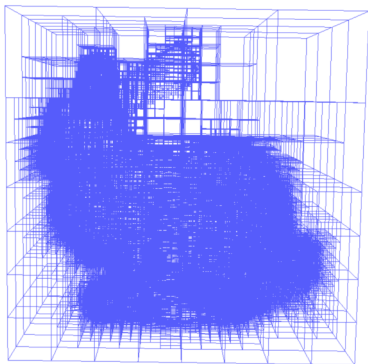
Miért Implicit?

Implicit Előnyei: Szeletelés



Miért Implicit?

Implicit Előnyei: Adaptív Reprezentáció



1 Bevezetés

- Miért Implicit?
- Milyen Implicit?

2 Illesztési Feladatok

- Implicit Illesztési Feladat
- Iteratív módszerek, Active Contours
- Least-squares és PCA
- Simítás, súlyozás
- Büntetőfüggvények

3 Globális Illesztés

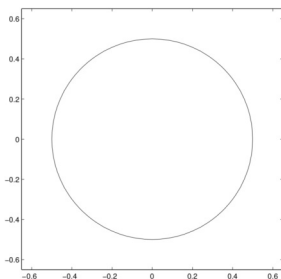
- RBF
- Poisson rekonstrukció

4 Lokális Illesztés

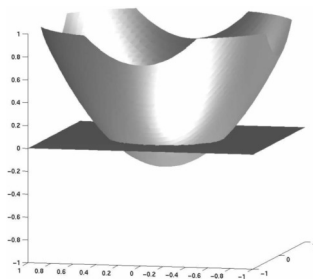
- Lokális Érintősíkok
- Partition-of-Unity Implicits

Milyen Implicit?

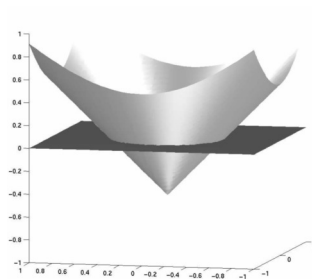
Milyen Implicit Függvény?



Kör



Algebrai Távolság



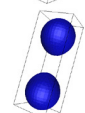
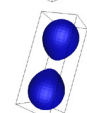
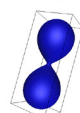
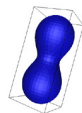
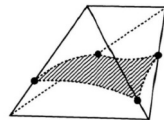
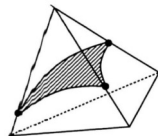
Előjeles Euklideszi Távolság

Milyen Implicit?

- Implicit függvény: $F(x, y, z) = 0$

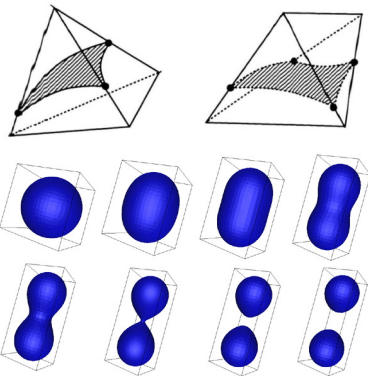
Milyen Implicit?

- Implicit függvény: $F(x, y, z) = 0$
- Klasszikus megközelítés: "implicit modelling" – geometriai primitívek v. fix függvénybázis



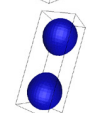
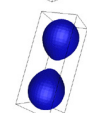
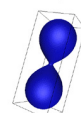
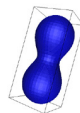
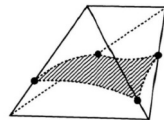
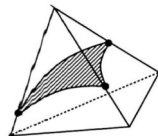
Milyen Implicit?

- Implicit függvény: $F(x, y, z) = 0$
- Klasszikus megközelítés: "implicit modelling" – geometriai primitívek v. fix függvénybázis
 - pl. polinom, spline, Gauss-fv. ("Blobby", "Metaballs", "Soft Objects")



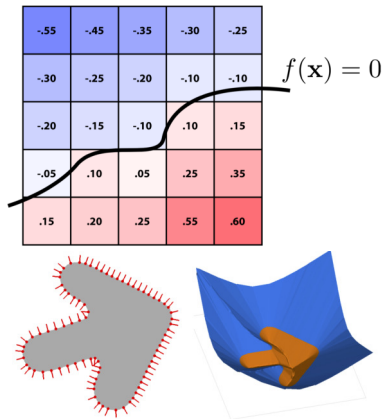
Milyen Implicit?

- Implicit függvény: $F(x, y, z) = 0$
- Klasszikus megközelítés: "implicit modelling" – geometriai primitívek v. fix függvénybázis
 - pl. polinom, spline, Gauss-fv. ("Blobby", "Metaballs", "Soft Objects")
 - Komplex geometria és általános topológia kihívást jelent



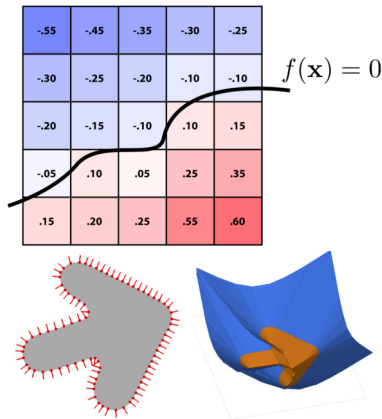
Milyen Implicit?

- Implicit függvény: $F(x, y, z) = 0$
- Klasszikus megközelítés: "implicit modelling" – geometriai primitívek v. fix függvénybázis
 - pl. polinom, spline, Gauss-fv. ("Blobby", "Metaballs", "Soft Objects")
 - Komplex geometria és általános topológia kihívást jelent
- Modern megközelítés: F (előjeles) távolsággfüggvény!



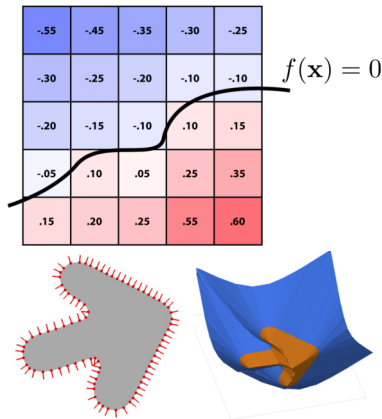
Milyen Implicit?

- Implicit függvény: $F(x, y, z) = 0$
- Klasszikus megközelítés: "implicit modelling" – geometriai primitívek v. fix függvénybázis
 - pl. polinom, spline, Gauss-fv. ("Blobby", "Metaballs", "Soft Objects")
 - Komplex geometria és általános topológia kihívást jelent
- Modern megközelítés: F (előjeles) távolságfüggvény!
 - Mintavételezzük (szabályos rács, octtree), vagy fix bázisban közelítjük



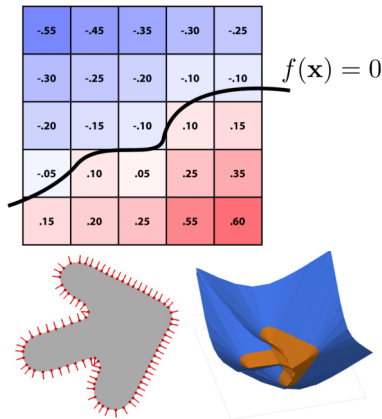
Milyen Implicit?

- Implicit függvény: $F(x, y, z) = 0$
- Klasszikus megközelítés: "implicit modelling" – geometriai primitívek v. fix függvénybázis
 - pl. polinom, spline, Gauss-fv. ("Blobby", "Metaballs", "Soft Objects")
 - Komplex geometria és általános topológia kihívást jelent
- Modern megközelítés: F (előjeles) távolságfüggvény!
 - Mintavételezzük (szabályos rács, octtree), vagy fix bázisban közelítjük
 - Tetszőleges geometriát reprezentálhat



Milyen Implicit?

- Implicit függvény: $F(x, y, z) = 0$
- Klasszikus megközelítés: "implicit modelling" – geometriai primitívek v. fix függvénybázis
 - pl. polinom, spline, Gauss-fv. ("Blobby", "Metaballs", "Soft Objects")
 - Komplex geometria és általános topológia kihívást jelent
- Modern megközelítés: F (előjeles) távolságfüggvény!
 - Mintavételezzük (szabályos rács, octtree), vagy fix bázisban közelítjük
 - Tetszőleges geometriát reprezentálhat
 - Geometria egyértelműen meghatározza



Implicit Felületek Tulajdonságai

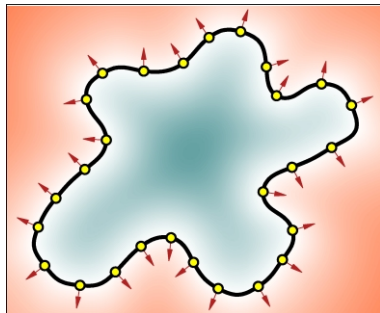
- Általános implicit függvény: $F(x, y, z)$

Implicit Felületek Tulajdonságai

- Általános implicit függvény: $F(x, y, z)$

- Gradiens merőleges a szintfelületre:

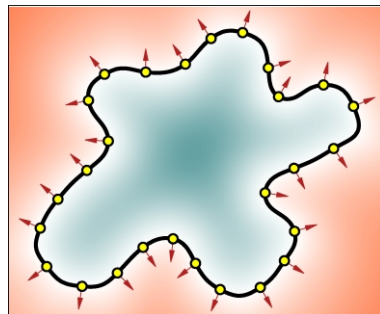
$$\vec{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$$



Implicit Felületek Tulajdonságai

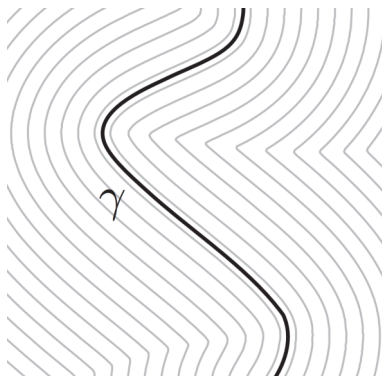
- Általános implicit függvény: $F(x, y, z)$
 - Gradiens merőleges a szintfelületre:

$$\vec{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$$
 - Átlaggörbület: $H = \operatorname{div} \vec{n}$



Implicit Felületek Tulajdonságai

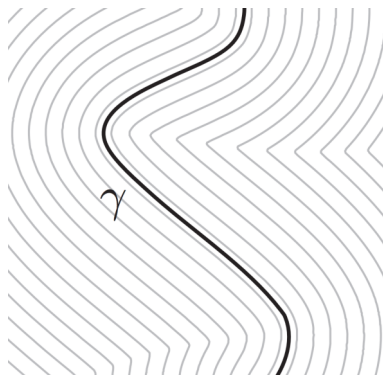
- Általános implicit függvény: $F(x, y, z)$
 - Gradiens merőleges a szintfelületre:
$$\vec{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$$
 - Átlaggörbület: $H = \operatorname{div} \vec{n}$
- Modern megközelítés: F (előjeles) távolságfüggvény



Implicit Felületek Tulajdonságai

- Általános implicit függvény: $F(x, y, z)$
 - Gradiens merőleges a szintfelületre:

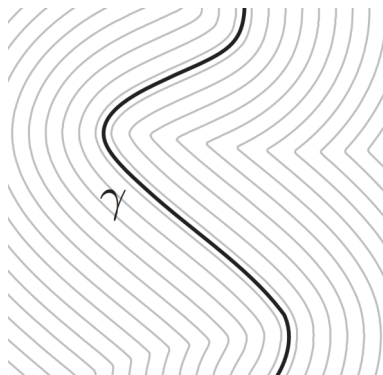
$$\vec{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$$
 - Átlaggörbület: $H = \operatorname{div} \vec{n}$
- Modern megközelítés: F (előjeles) távolságfüggvény
 - Definiáló tulajdonság: $|\nabla f| = 1$
(Eikonál egyenlet)



Implicit Felületek Tulajdonságai

- Általános implicit függvény: $F(x, y, z)$
 - Gradiens merőleges a szintfelületre:

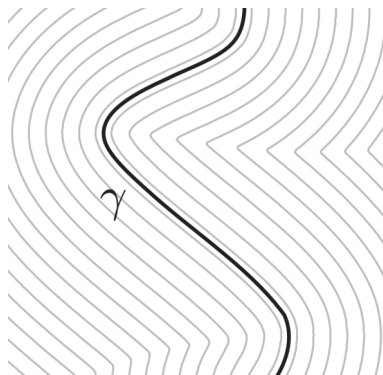
$$\vec{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$$
 - Átlaggörbület: $H = \operatorname{div} \vec{n}$
- Modern megközelítés: F (előjeles) távolságfüggvény
 - Definiáló tulajdonság: $|\nabla f| = 1$ (Eikonál egyenlet)
 - Gradiens = normálvektor: $\vec{n} = \nabla F$ – legközelebbi pont irányába mutat!



Implicit Felületek Tulajdonságai

- Általános implicit függvény: $F(x, y, z)$
 - Gradiens merőleges a szintfelületre:

$$\vec{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$$
 - Átlaggörbület: $H = \operatorname{div} \vec{n}$
- Modern megközelítés: F (előjeles) távolságfüggvény
 - Definiáló tulajdonság: $|\nabla f| = 1$ (Eikonál egyenlet)
 - Gradiens = normálvektor: $\vec{n} = \nabla F$ – legközelebbi pont irányába mutat!
 - Átlaggörbület: $H = \operatorname{div} (\nabla F) = \Delta F$



Implicit Felületek Tulajdonságai

- Általános implicit függvény: $F(x, y, z)$
 - Gradiens merőleges a szintfelületre:

$$\vec{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$$
 - Átlaggörbület: $H = \operatorname{div} \vec{n}$
- Modern megközelítés: F (előjeles) távolságfüggvény
 - Definiáló tulajdonság: $|\nabla f| = 1$ (Eikonál egyenlet)
 - Gradiens = normálvektor: $\vec{n} = \nabla F$ – legközelebbi pont irányába mutat!
 - Átlaggörbület: $H = \operatorname{div} (\nabla F) = \Delta F$
 - Nem mindenhol differenciálható! (medial axis, Voronoi)



1 Bevezetés

- Miért Implicit?
- Milyen Implicit?

2 Illesztési Feladatok

- Implicit Illesztési Feladat
- Iteratív módszerek, Active Contours
- Least-squares és PCA
- Simítás, súlyozás
- Büntetőfüggvények

3 Globális Illesztés

- RBF
- Poisson rekonstrukció

4 Lokális Illesztés

- Lokális Érintősíkok
- Partition-of-Unity Implicits

1 Bevezetés

- Miért Implicit?
- Milyen Implicit?

2 Illesztési Feladatok

- Implicit Illesztési Feladat
- Iteratív módszerek, Active Contours
- Least-squares és PCA
- Simítás, súlyozás
- Büntetőfüggvények

3 Globális Illesztés

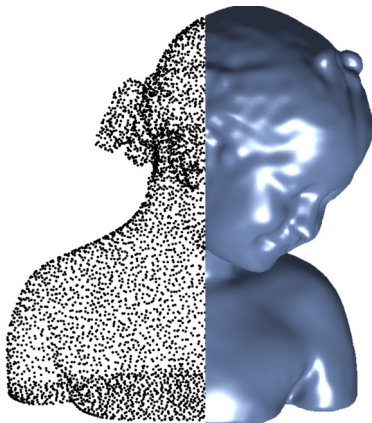
- RBF
- Poisson rekonstrukció

4 Lokális Illesztés

- Lokális Érintősíkok
- Partition-of-Unity Implicits

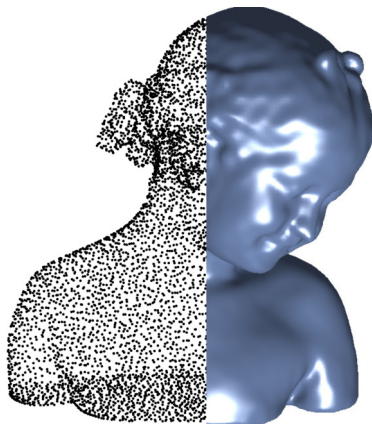
Illesztési Feladat

- Adott: zajos 3D pontfelhő –
 $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, z_i)$ + normálvektorok $\vec{n}_i$
(opcionális)



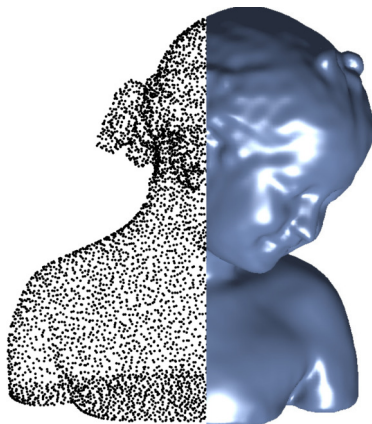
Illesztési Feladat

- Adott: zajos 3D pontfelhő –
 $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, z_i) + \text{normálvektorok } \vec{n}_i$
(opcionális)
- Cél: Approximáció előjeles
távolságfüggvénnyel –
 $F(\mathbf{p}_i) \approx 0, \nabla F(\mathbf{p}_i) \approx \vec{n}_i$



Illesztési Feladat

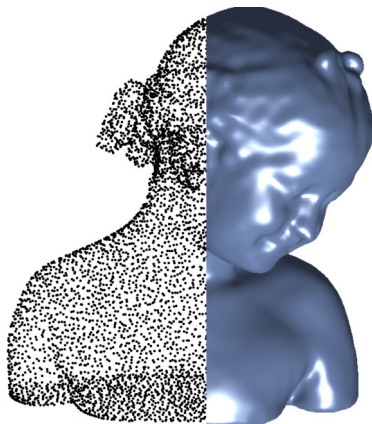
- Adott: zajos 3D pontfelhő –
 $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, z_i) + \text{normálvektorok } \vec{n}_i$
(opcionális)
- Cél: Approximáció előjeles
távolságfüggvénnyel –
 $F(\mathbf{p}_i) \approx 0, \nabla F(\mathbf{p}_i) \approx \vec{n}_i$



Illesztési Feladat

- Adott: zajos 3D pontfelhő –
 $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, z_i) + \text{normálvektorok } \vec{n}_i$
(opcionális)
- Cél: Approximáció előjeles
távolságfüggvénnyel –
 $F(\mathbf{p}_i) \approx 0, \nabla F(\mathbf{p}_i) \approx \vec{n}_i$
- Optimalizált energia alakja:

$$E = \sum_i \text{Fit}(\mathbf{p}_i, \vec{n}_i) + \text{Fair}(F)$$

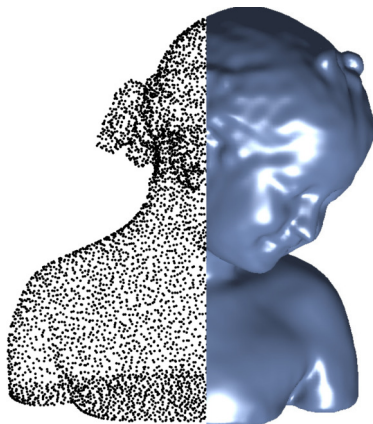


Illesztési Feladat

- Adott: zajos 3D pontfelhő –
 $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, z_i) + \text{normálvektorok } \vec{n}_i$
 (opcionális)
- Cél: Approximáció előjeles
 távolságfüggvénnyel –
 $F(\mathbf{p}_i) \approx 0, \nabla F(\mathbf{p}_i) \approx \vec{n}_i$
- Optimalizált energia alakja:

$$E = \sum_i \text{Fit}(\mathbf{p}_i, \vec{n}_i) + \text{Fair}(F)$$

- Fit: Illesztés pontossága – pl. $F(\mathbf{p})^2$

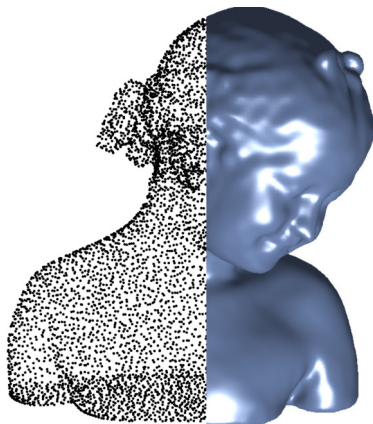


Illesztési Feladat

- Adott: zajos 3D pontfelhő –
 $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, z_i)$ + normálvektorok $\vec{n}_i$
 (opcionális)
- Cél: Approximáció előjeles
 távolságfüggvénnyel –
 $F(\mathbf{p}_i) \approx 0, \nabla F(\mathbf{p}_i) \approx \vec{n}_i$
- Optimalizált energia alakja:

$$E = \sum_i \text{Fit}(\mathbf{p}_i, \vec{n}_i) + \text{Fair}(F)$$

- Fit: Illesztés pontossága – pl. $F(\mathbf{p})^2$
- Fair: Illesztett felület minősége – pl.
 görbület $\int \Delta F$



Távolságfüggvény Reprezentációja

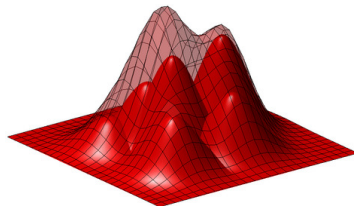
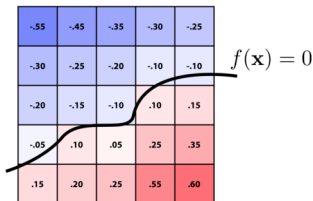
Hogyan reprezentáljuk F -et?

Mintavételezés

- Pl. szabályos rács, octtree, háló
- Rácspontok között interpoláció
- Közelítő jellegű
- Hatékony (véges differenciák, Fourier, stb.)

Függvénybázis

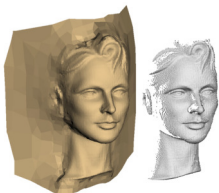
- Pl. RBF, B-Spline
- Bázisfüggvények együtthatóit kell meghatározni
- Egzakt, folytonos reprezentáció
- Számításigényes lehet



Lokális vs. Globális

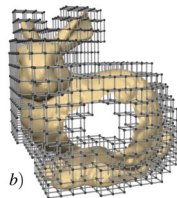
Globális Illesztés

- Egyszerre illesztünk egy globális fv.-t
- Sokváltozós optimalizálási probléma
- Üres régiók kitöltése
- Naívan rosszul skálázódik



Lokális illesztés

- Lokális felületdarabokat illesztünk és varrunk össze
- Sok, kisebb, párhuzamosítható optimalizálási probléma
- Kitöltés nem biztosított
- Naívan jól skálázódik



1 Bevezetés

- Miért Implicit?
- Milyen Implicit?

2 Illesztési Feladatok

- Implicit Illesztési Feladat
- Iteratív módszerek, Active Contours
- Least-squares és PCA
- Simítás, súlyozás
- Büntetőfüggvények

3 Globális Illesztés

- RBF
- Poisson rekonstrukció

4 Lokális Illesztés

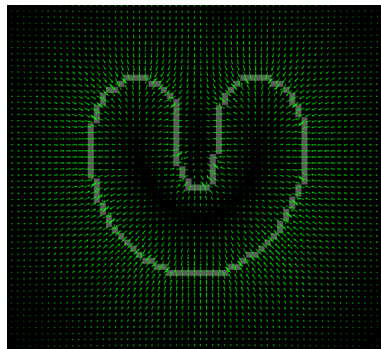
- Lokális Érintősíkok
- Partition-of-Unity Implicits

Active Contours

- Active Contours: Görbe iteratív mozgatása az alakzat felé

$$\frac{\partial C(s, t)}{\partial t} = V(s, t) \vec{n}(s, t)$$

V : sebességfüggvény

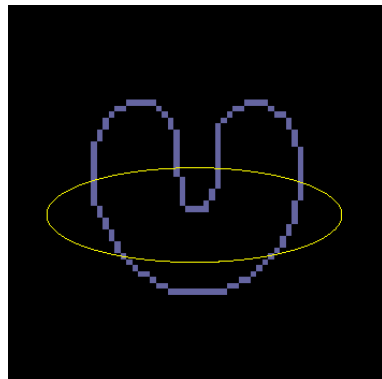


Active Contours

- Active Contours: Görbe iteratív mozgatása az alakzat felé

$$\frac{\partial C(s, t)}{\partial t} = V(s, t) \vec{n}(s, t)$$

V : sebességfüggvény



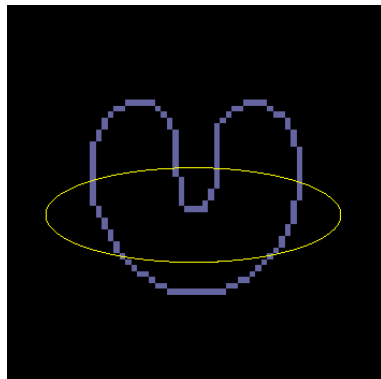
Active Contours

- Active Contours: Görbe iteratív mozgatása az alakzat felé

$$\frac{\partial C(s, t)}{\partial t} = V(s, t) \vec{n}(s, t)$$

V : sebességfüggvény

- Gradient descent az illesztési energiára



Active Contours

- Active Contours: Görbe iteratív mozgatása az alakzat felé

$$\frac{\partial C(s, t)}{\partial t} = V(s, t) \vec{n}(s, t)$$

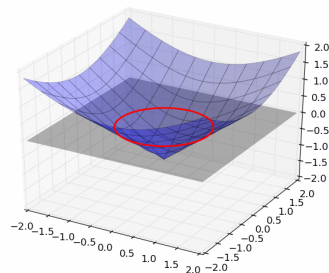
V : sebességfüggvény

- Gradient descent az illesztési energiára
- Paraméteres görbe, mintavételezés – topológiai változásokat nehéz kezelni...



Level Set Method

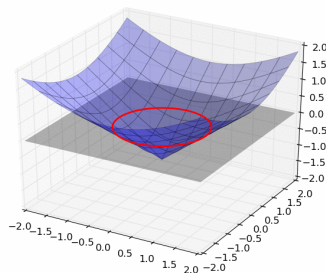
- "Level Set Method": Görbe reprezentálása $F(\mathbf{p}, t) = 0$ dinamikus implicittel!



Level Set Method

- "Level Set Method": Görbe reprezentálása $F(\mathbf{p}, t) = 0$ dinamikus implicittel!
- Implicit függvény evolúciója:

$$\frac{\partial F(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = V(\mathbf{p}, t) |\nabla F(x, y, t)|$$

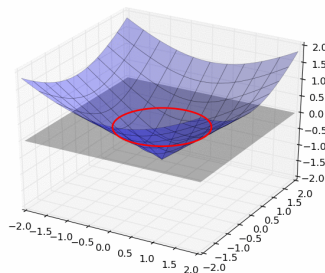


Level Set Method

- "Level Set Method": Görbe reprezentálása $F(\mathbf{p}, t) = 0$ dinamikus implicittel!
- Implicit függvény evolúciója:

$$\frac{\partial F(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = V(\mathbf{p}, t) |\nabla F(x, y, t)|$$

- Szabályos rácson nagyon egyszerű implementáció (véges diff.)!

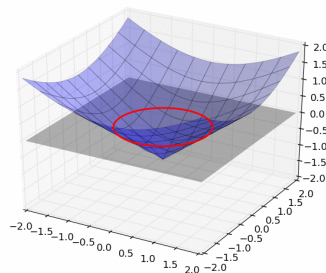


Level Set Method

- "Level Set Method": Görbe reprezentálása $F(\mathbf{p}, t) = 0$ dinamikus implicittel!
- Implicit függvény evolúciója:

$$\frac{\partial F(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = V(\mathbf{p}, t) |\nabla F(x, y, t)|$$

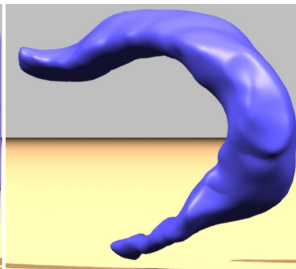
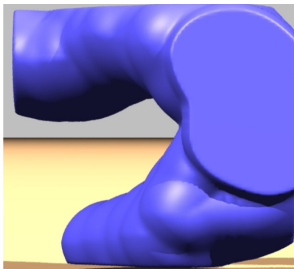
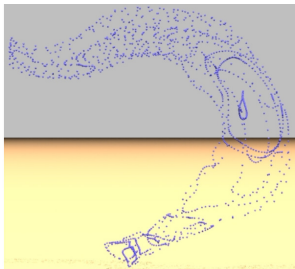
- Szabályos rácson nagyon egyszerű implementáció (véges diff.)!
- Általában nem marad távolságfüggvény – re-inicializálni kell!



Level Set Method – Példák



Level Set Method – Példák



1 Bevezetés

- Miért Implicit?
- Milyen Implicit?

2 Illesztési Feladatok

- Implicit Illesztési Feladat
- Iteratív módszerek, Active Contours
- Least-squares és PCA
- Simítás, súlyozás
- Büntetőfüggvények

3 Globális Illesztés

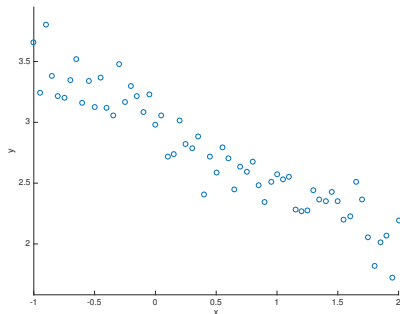
- RBF
- Poisson rekonstrukció

4 Lokális Illesztés

- Lokális Érintősíkok
- Partition-of-Unity Implicits

Least-squares egyenes illesztése

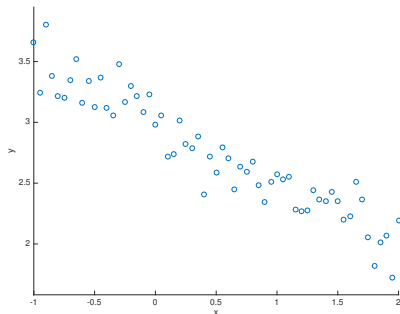
- m adatpont $\mathbb{R}^n$ -ben:
 $\mathbf{p}_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$, hozzájuk y_i
függvényértékek



Least-squares egyenes illesztése

- m adatpont $\mathbb{R}^n$ -ben:
 $\mathbf{p}_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$, hozzájuk y_i
 függvényértékek
- Lineáris függvényt illesztünk
 (lineáris regresszió):

$$f(\mathbf{x}) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = \mathbf{x}^T \mathbf{c}$$



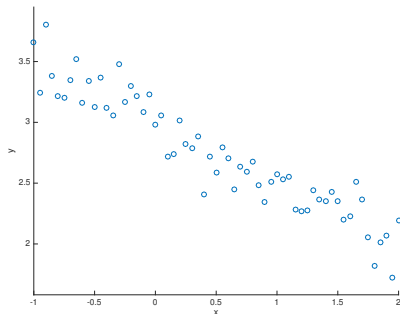
Least-squares egyenes illesztése

- m adatpont $\mathbb{R}^n$ -ben:
 $\mathbf{p}_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$, hozzájuk y_i
 függvényértékek
- Lineáris függvényt illesztünk
 (lineáris regresszió):

$$f(\mathbf{x}) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = \mathbf{x}^T \mathbf{c}$$

- Illeszkedés az adatpontokra:

$$c_1 x_{i1} + \dots + c_n x_{in} = \mathbf{p}_i^T \mathbf{c} = y_i$$



Least-squares egyenes illesztése

- m adatpont $\mathbb{R}^n$ -ben:
 $\mathbf{p}_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$, hozzájuk y_i
függvényértékek
- Lineáris függvényt illesztünk
(lineáris regresszió):

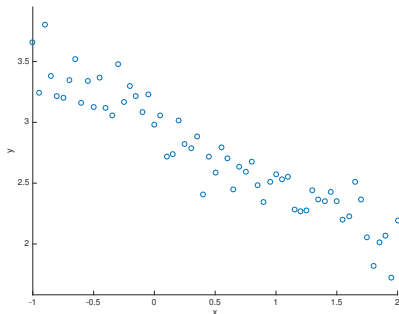
$$f(\mathbf{x}) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = \mathbf{x}^T \mathbf{c}$$

- Illeszkedés az adatpontokra:

$$c_1 x_{i1} + \dots + c_n x_{in} = \mathbf{p}_i^T \mathbf{c} = y_i$$

- Együtthatókra túlhatározott
lineáris egyenletrendszer:

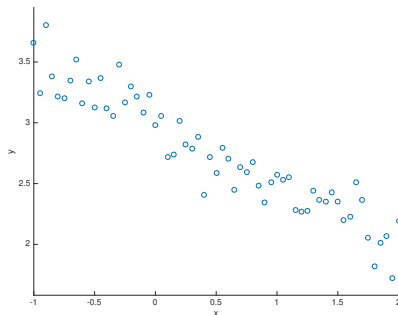
$$\mathbf{P}\mathbf{c} = \mathbf{y}$$



Least-squares egyenes illesztése

- Együtthatókra túlhatározott lineáris egyenletrendszer:

$$Pc = y$$



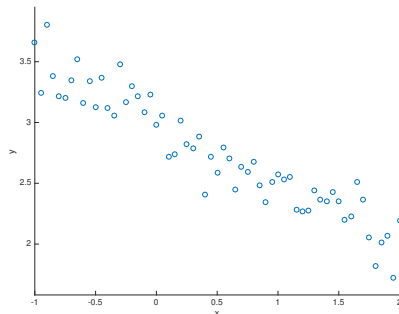
Least-squares egyenes illesztése

- Együtthatókra túlhatározott lineáris egyenletrendszer:

$$Pc = y$$

- Legkisebb négyzetes "megoldás":

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (p_i^T c - y_i)^2 \rightarrow \min.$$



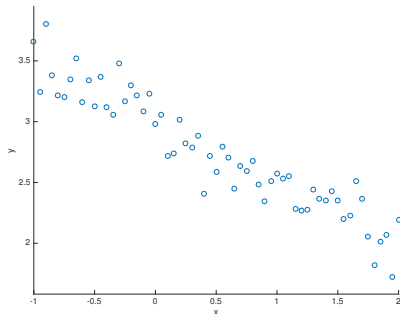
Least-squares egyenes illesztése

- Együtthatókra túlhatározott lineáris egyenletrendszer:

$$\mathbf{Pc} = \mathbf{y}$$

- Legkisebb négyzetes "megoldás":

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{Pc} - \mathbf{y}\|_2^2 \rightarrow \min.$$



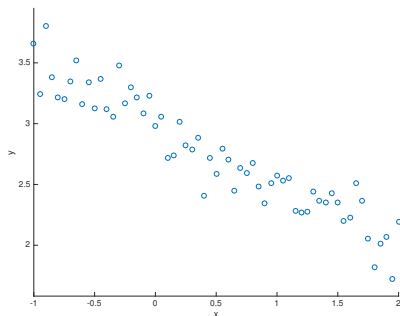
Least-squares egyenes illesztése

- Együtthatókra túlhatározott lineáris egyenletrendszer:

$$\mathbf{P}\mathbf{c} = \mathbf{y}$$

- Legkisebb négyzetes "megoldás":

$$\frac{1}{2}\mathbf{c}^T\mathbf{P}^T\mathbf{P}\mathbf{c} - (\mathbf{P}^T\mathbf{y})^T\mathbf{c} \rightarrow \min.$$



Least-squares egyenes illesztése

- Együtthatókra túlhatározott lineáris egyenletrendszer:

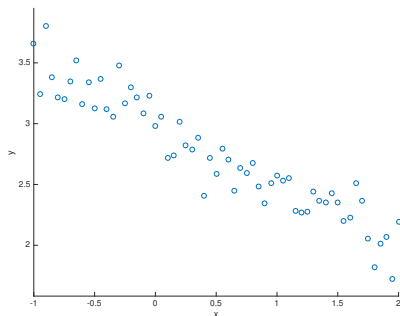
$$\mathbf{P}\mathbf{c} = \mathbf{y}$$

- Legkisebb négyzetes "megoldás":

$$\frac{1}{2}\mathbf{c}^T\mathbf{P}^T\mathbf{P}\mathbf{c} - (\mathbf{P}^T\mathbf{y})^T\mathbf{c} \rightarrow \min.$$

- Deriválás után – normálegyenletek:

$$(\mathbf{P}^T\mathbf{P})\mathbf{c} = \mathbf{P}^T\mathbf{y}$$



Least-squares egyenes illesztése

- Együtthatókra túlhatározott lineáris egyenletrendszer:

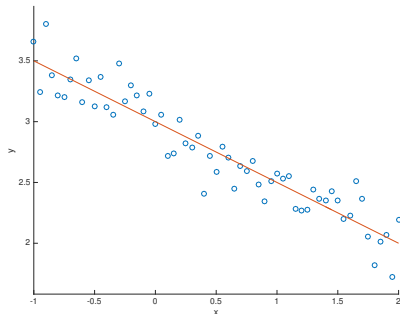
$$\mathbf{P}\mathbf{c} = \mathbf{y}$$

- Legkisebb négyzetes "megoldás":

$$\frac{1}{2}\mathbf{c}^T\mathbf{P}^T\mathbf{P}\mathbf{c} - (\mathbf{P}^T\mathbf{y})^T\mathbf{c} \rightarrow \min.$$

- Deriválás után – normálegyenletek:

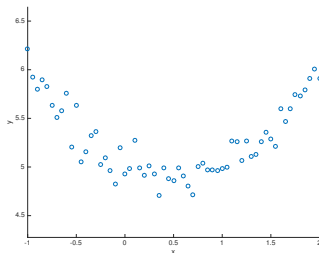
$$(\mathbf{P}^T\mathbf{P})\mathbf{c} = \mathbf{P}^T\mathbf{y}$$



Least-squares általánosabban

- Lineáris fv. helyett egy $(\beta_1(\mathbf{x}), \dots, \beta_k(\mathbf{x}))$ függvénybázis együttthatóit keressük:

$$c_1\beta_1(\mathbf{x}) + \dots + c_k\beta_k(\mathbf{x}) = y_i$$



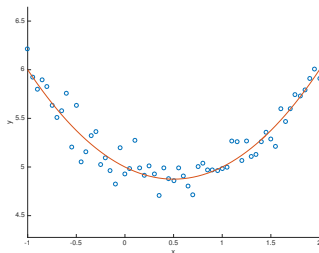
Least-squares általánosabban

- Lineáris fv. helyett egy $(\beta_1(\mathbf{x}), \dots, \beta_k(\mathbf{x}))$ függvénybázis együtthatóit keressük:

$$c_1\beta_1(\mathbf{x}) + \dots + c_k\beta_k(\mathbf{x}) = y_i$$

- A függvénybázis tetszőleges lehet – *lineáris* egyenletrendszer az együtthatókra:

$$\mathbf{B}\mathbf{c} = \mathbf{y}$$



Least-squares általánosabban

- Lineáris fv. helyett egy $(\beta_1(\mathbf{x}), \dots, \beta_k(\mathbf{x}))$ függvénybázis együtthatóit keressük:

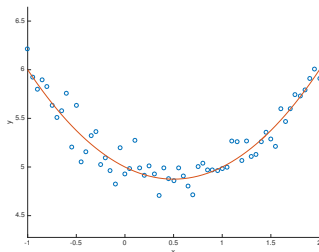
$$c_1\beta_1(\mathbf{x}) + \dots + c_k\beta_k(\mathbf{x}) = y_i$$

- A függvénybázis tetszőleges lehet – *lineáris* egyenletrendszer az együtthatókra:

$$\mathbf{B}\mathbf{c} = \mathbf{y}$$

- Legkisebb négyzetes megoldás:

$$\|\mathbf{B}\mathbf{c} - \mathbf{y}\|_2^2 \rightarrow \min.$$



Least-squares általánosabban

- Lineáris fv. helyett egy $(\beta_1(\mathbf{x}), \dots, \beta_k(\mathbf{x}))$ függvénybázis együtthatóit keressük:

$$c_1\beta_1(\mathbf{x}) + \dots + c_k\beta_k(\mathbf{x}) = y_i$$

- A függvénybázis tetszőleges lehet – *lineáris* egyenletrendszer az együtthatókra:

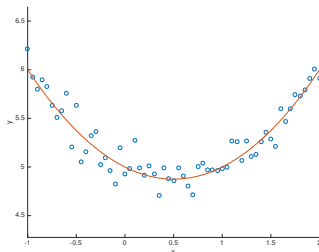
$$\mathbf{B}\mathbf{c} = \mathbf{y}$$

- Legkisebb négyzetes megoldás:

$$\|\mathbf{B}\mathbf{c} - \mathbf{y}\|_2^2 \rightarrow \min.$$

- Normálegyenletek:

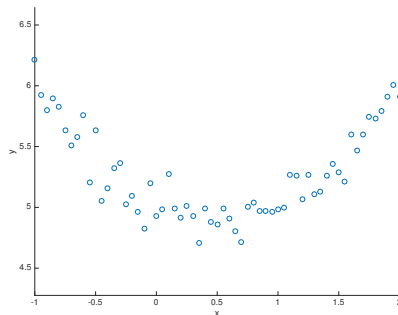
$$\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{c} = \mathbf{B}^T\mathbf{y}$$



Least-squares általánosabban – szemlélet

- A függvénybázissal áttanszformáljuk a pontokat $\mathbb{R}^k$ -ba:

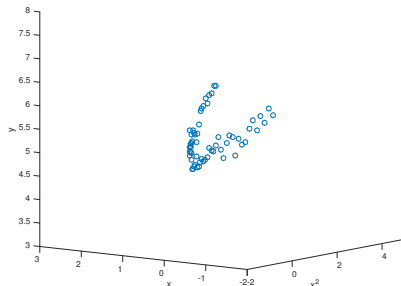
$$\mathbf{p}_i \mapsto (\beta_1(\mathbf{p}_i), \dots, \beta_k(\mathbf{p}_i))$$



Least-squares általánosabban – szemlélet

- A függvénybázissal áttanszformáljuk a pontokat $\mathbb{R}^k$ -ba:

$$\mathbf{p}_i \mapsto (\beta_1(\mathbf{p}_i), \dots, \beta_k(\mathbf{p}_i))$$

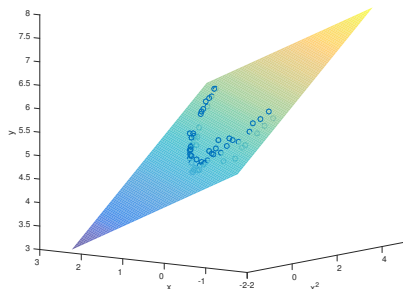


Least-squares általánosabban – szemlélet

- A függvénybázissal átttranszformáljuk a pontokat $\mathbb{R}^k$ -ba:

$$\mathbf{p}_i \mapsto (\beta_1(\mathbf{p}_i), \dots, \beta_k(\mathbf{p}_i))$$

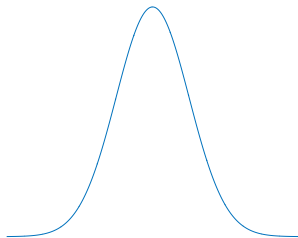
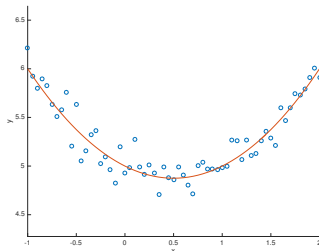
- A transzformált pontokra legkisebb négyzetes hipersíkot illesztünk $\mathbb{R}^k$ -ban



Least-squares – statisztikai értelmezés

- Feltevés: adatpontokat az illesztett függvényből mintavételeztük, véletlen zajjal terhelve

$$y = f(\mathbf{x}) + v$$



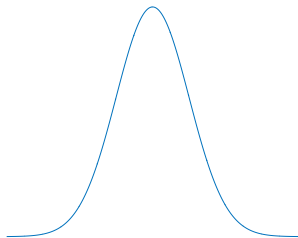
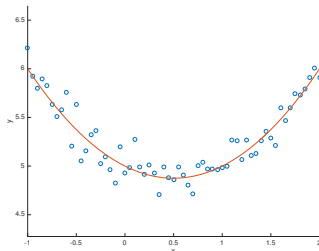
Least-squares – statisztikai értelmezés

- Feltevés: adatpontokat az illesztett függvényből mintavételeztük, véletlen zajjal terhelve

$$y = f(\mathbf{x}) + v$$

- Least-squares: normális eloszlású zaj:

$$p(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}$$



Least-squares – statisztikai értelmezés

- Feltevés: adatpontokat az illesztett függvényből mintavételeztük, véletlen zajjal terhelve

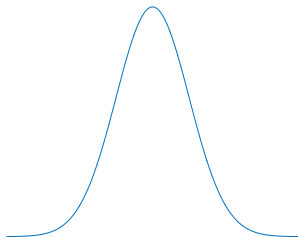
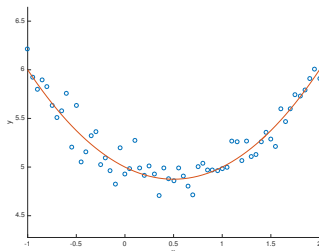
$$y = f(\mathbf{x}) + v$$

- Least-squares: normális eloszlású zaj:

$$p(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}$$

- Ekvivalens a maximum likelihood becsléssel – a $\mathbf{c}$ együtthatók maximalizálják annak valószínűségét, hogy az adott adatpontokat mértük:

$$\log p(f_{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) - y) \rightarrow \max.$$



Implicit illesztés, Euklideszi távolság – PCA

- Implicit függvénynél az alakzattól mért euklideszi távolságot minimalizáljuk

Implicit illesztés, Euklideszi távolság – PCA

- Implicit függvénynél az alakzattól mért euklideszi távolságot minimalizáljuk
- Kiegészítjük az adatpontok koordinátáit: $\mathbf{z}_i = (\mathbf{p}_i, y_i)$
- Pl. lineáris függvény $f(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T \mathbf{c}$ esetén legyen $\|\mathbf{c}\|_2^2 = 1$

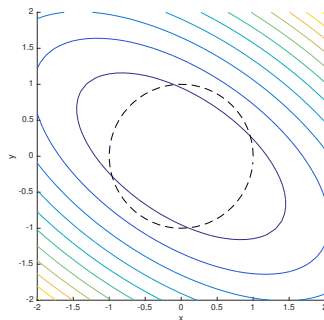
Implicit illesztés, Euklideszi távolság – PCA

- Implicit függvénynél az alakzattól mért euklideszi távolságot minimalizáljuk
- Kiegészítjük az adatpontok koordinátáit: $\mathbf{z}_i = (\mathbf{p}_i, y_i)$
- Pl. lineáris függvény $f(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T \mathbf{c}$ esetén legyen $\|\mathbf{c}\|_2^2 = 1$

Implicit illesztés, Euklideszi távolság – PCA

- Implicit függvénynél az alakzattól mért euklideszi távolságot minimalizáljuk
- Kiegészítjük az adatpontok koordinátáit: $\mathbf{z}_i = (\mathbf{p}_i, y_i)$
- Pl. lineáris függvény $f(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T \mathbf{c}$ esetén legyen $\|\mathbf{c}\|_2^2 = 1$
- Másodfokú fv. minimalizálása, normakényszerrel:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{c} \rightarrow \min.$$

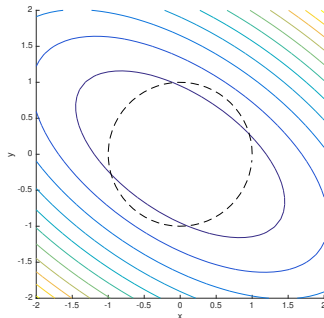


Implicit illesztés, Euklideszi távolság – PCA

- Implicit függvénynél az alakzattól mért euklideszi távolságot minimalizáljuk
- Kiegészítjük az adatpontok koordinátáit: $\mathbf{z}_i = (\mathbf{p}_i, y_i)$
- Pl. lineáris függvény $f(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T \mathbf{c}$ esetén legyen $\|\mathbf{c}\|_2^2 = 1$
- Másodfokú fv. minimalizálása, normakényszerrel:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{c} \rightarrow \min.$$

- Megoldása: $\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}$ legkisebb sajátértékének sajátvektora ($\mathbf{Z}$ szinguláris vektora)

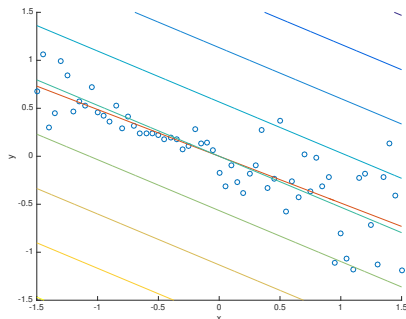


Implicit illesztés, Euklideszi távolság – PCA

- Implicit függvénynél az alakzattól mért euklideszi távolságot minimalizáljuk
- Kiegészítjük az adatpontok koordinátáit: $\mathbf{z}_i = (\mathbf{p}_i, y_i)$
- Pl. lineáris függvény $f(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T \mathbf{c}$ esetén legyen $\|\mathbf{c}\|_2^2 = 1$
- Másodfokú fv. minimalizálása, normakényszerrel:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \mathbf{c} \rightarrow \min.$$

- Megoldása: $\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}$ legkisebb sajátértékének sajátvektora ($\mathbf{Z}$ szinguláris vektora)



Implicit illesztés, Euklideszi távolság – PCA

- Feltevés: adatpontok közelítőleg egy hipersíkon fekszenek, a merőleges eltérés normál eloszlású

Implicit illesztés, Euklideszi távolság – PCA

- Feltevés: adatpontok közelítőleg egy hipersíkon fekszenek, a merőleges eltérés normál eloszlású
- Melyik irányban legkisebb a ponthalmaz szórása? – Principal Component Analysis (PCA)

Implicit illesztés, Euklideszi távolság – PCA

- Feltevés: adatpontok közelítőleg egy hipersíkon fekszenek, a merőleges eltérés normál eloszlású
- Melyik irányban legkisebb a ponthalmaz szórása? – Principal Component Analysis (PCA)
- $\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}$ – ponthalmaz kovarianciamátrixa

Implicit illesztés, Euklideszi távolság – PCA

- Feltevés: adatpontok közelítőleg egy hipersíkon fekszenek, a merőleges eltérés normál eloszlású
- Melyik irányban legkisebb a ponthalmaz szórása? – Principal Component Analysis (PCA)
- $\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}$ – ponthalmaz kovarianciamátrixa
- Nem-lineáris függvény (pl. kör) illesztése: transzformáció után hipersík illesztése

Implicit illesztés, Euklideszi távolság – PCA

- Feltevés: adatpontok közelítőleg egy hipersíkon fekszenek, a merőleges eltérés normál eloszlású
- Melyik irányban legkisebb a ponthalmaz szórása? – Principal Component Analysis (PCA)
- $\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}$ – ponthalmaz kovarianciamátrixa
- Nem-lineáris függvény (pl. kör) illesztése: transzformáció után hipersík illesztése
- Euklideszi távolság a transzformált térben – általában nem Euklideszi az eredeti térben!

1 Bevezetés

- Miért Implicit?
- Milyen Implicit?

2 Illesztési Feladatok

- Implicit Illesztési Feladat
- Iteratív módszerek, Active Contours
- Least-squares és PCA
- **Simítás, súlyozás**
- Büntetőfüggvények

3 Globális Illesztés

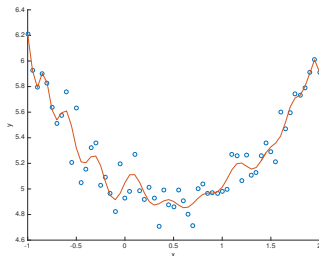
- RBF
- Poisson rekonstrukció

4 Lokális Illesztés

- Lokális Érintősíkok
- Partition-of-Unity Implicits

Simítás, Regularizáció

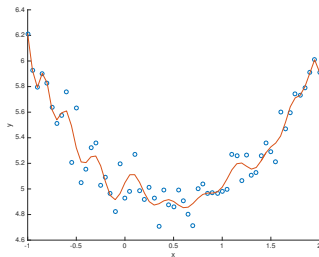
- Az illesztés hibája mellett a függvény simaságát is optimalizáljuk



Simítás, Regularizáció

- Az illesztés hibája mellett a függvény simaságát is optimalizáljuk
- Heurisztika: együtthatóvektor normája (Tikhonov regularizáció)

$$\|\mathbf{B}\mathbf{c} - \mathbf{y}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{c}\|_2^2 \rightarrow \min.$$



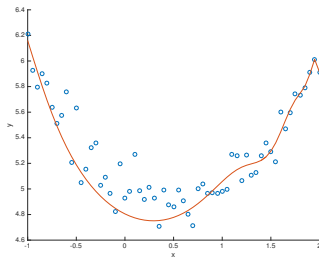
Simítás, Regularizáció

- Az illesztés hibája mellett a függvény simaságát is optimalizáljuk
- Heurisztika: együtthatóvektor normája (Tikhonov regularizáció)

$$\|Bc - y\|_2^2 + \lambda \|c\|_2^2 \rightarrow \min.$$

- Módosított normálegyenletek:

$$(B^T B + \lambda I)c = B^T y$$



Simítás, Regularizáció

- Az illesztés hibája mellett a függvény simaságát is optimalizáljuk
- Heurisztika: együtthatóvektor normája (Tikhonov regularizáció)

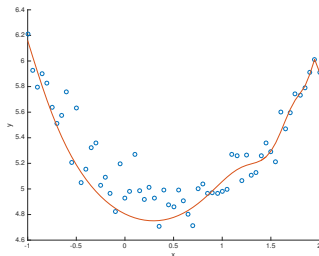
$$\|\mathbf{B}\mathbf{c} - \mathbf{y}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{c}\|_2^2 \rightarrow \min.$$

- Módosított normálegyenletek:

$$(\mathbf{B}^T \mathbf{B} + \lambda \mathbf{I})\mathbf{c} = \mathbf{B}^T \mathbf{y}$$

- Általánosabban: függvény deriváltjainak nagyságát is optimalizáljuk:

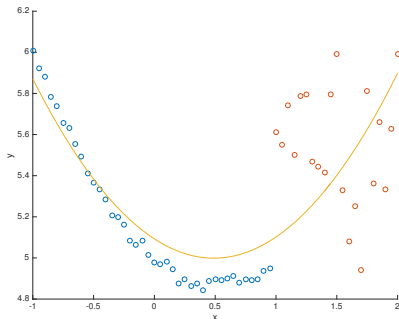
$$\|\mathbf{B}\mathbf{c} - \mathbf{y}\|_2^2 + \sum_{i=0}^n \lambda_i \left\| f^{(i)} \right\|_2^2 \rightarrow \min.$$



Súlyozás

- Súlyozzuk az egyes pontok hozzájárulását az energiához:

$$\sum_{i=1}^m w_i \left| \mathbf{p}_i^T \mathbf{c} - y_i \right|^2 \rightarrow \min.$$



Súlyozás

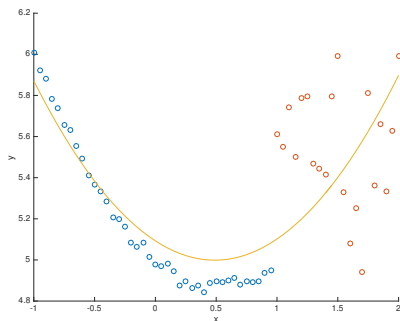
- Súlyozzuk az egyes pontok hozzájárulását az energiához:

$$\sum_{i=1}^m w_i \left| \mathbf{p}_i^T \mathbf{c} - y_i \right|^2 \rightarrow \min.$$

- Normálegyenletek:

$$\mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P} \mathbf{c} = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{W} = \text{diag}(w_1, \dots, w_m)$$



Súlyozás

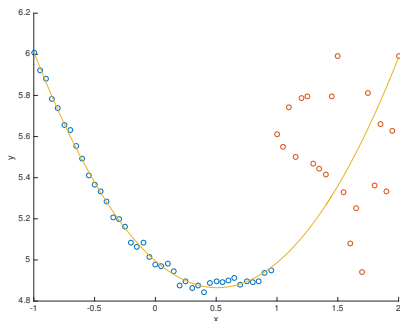
- Súlyozzuk az egyes pontok hozzájárulását az energiához:

$$\sum_{i=1}^m w_i \left| \mathbf{p}_i^T \mathbf{c} - y_i \right|^2 \rightarrow \min.$$

- Normálegyenletek:

$$\mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P} \mathbf{c} = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{W} = \text{diag}(w_1, \dots, w_m)$$



1 Bevezetés

- Miért Implicit?
- Milyen Implicit?

2 Illesztési Feladatok

- Implicit Illesztési Feladat
- Iteratív módszerek, Active Contours
- Least-squares és PCA
- Simítás, súlyozás
- **Büntetőfüggvények**

3 Globális Illesztés

- RBF
- Poisson rekonstrukció

4 Lokális Illesztés

- Lokális Érintősíkok
- Partition-of-Unity Implicits

Általános büntetőfüggvények

- Négyzetes norma helyett általános büntetőfüggvények az illesztés hibájára/simaságra:

$$\varphi_{\text{fit}}(\mathbf{P}\mathbf{c} - \mathbf{y}) + \sum_{i=0}^n \lambda_i \varphi_{\text{smooth},i}(f^{(i)}) \rightarrow \min.$$

Általános büntetőfüggvények

- Négyzetes norma helyett általános büntetőfüggvények az illesztés hibájára/simaságra:

$$\varphi_{\text{fit}}(\mathbf{P}\mathbf{c} - \mathbf{y}) + \sum_{i=0}^n \lambda_i \varphi_{\text{smooth},i}(f^{(i)}) \rightarrow \min.$$

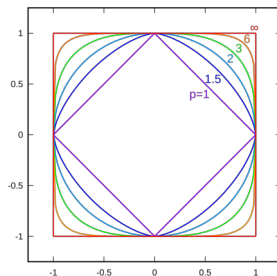
- Nem négyzetes vektornormák $\|\mathbf{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$

Általános büntetőfüggvények

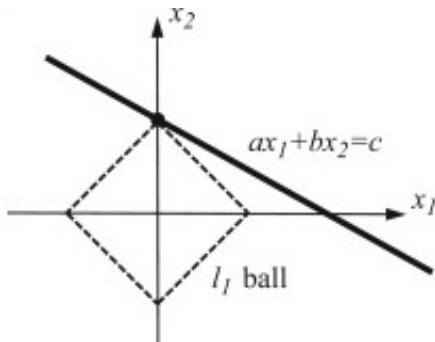
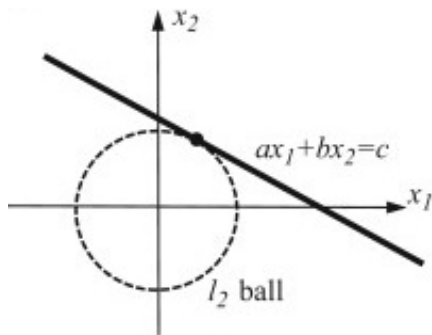
- Négyzetes norma helyett általános büntetőfüggvények az illesztés hibájára/simaságra:

$$\varphi_{\text{fit}}(\mathbf{P}\mathbf{c} - \mathbf{y}) + \sum_{i=0}^n \lambda_i \varphi_{\text{smooth},i}(f^{(i)}) \rightarrow \min.$$

- Nem négyzetes vektornormák $\|\mathbf{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$

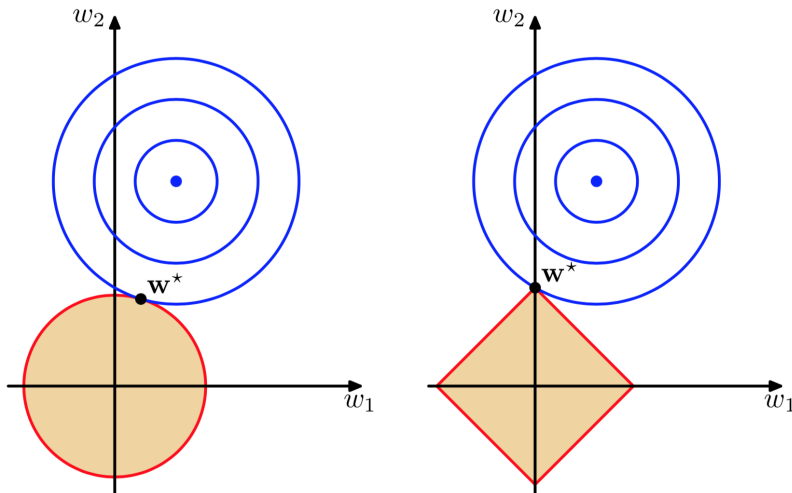


1-norma $\Rightarrow$ "sparsity"



Alulhatározott rendszer

1-norma $\Rightarrow$ "sparsity"

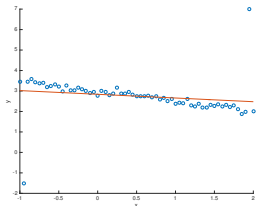
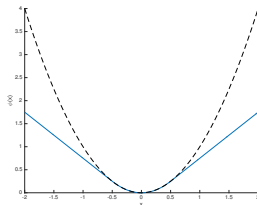


Túlhatározott rendszer

Általános büntetőfüggvények – Huber-függvény

- Huber-függvény:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & |x| < 1 \\ 2|x| - 1 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

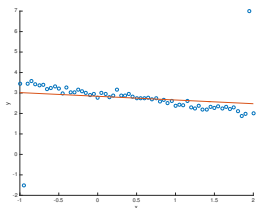
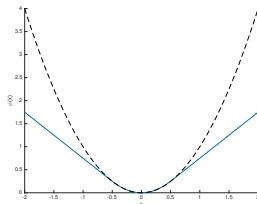


Általános büntetőfüggvények – Huber-függvény

- Huber-függvény:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & |x| < 1 \\ 2|x| - 1 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

- Kis hibákra négyzetes, nagy hibákra lineáris – érzéketlen az outlierekre

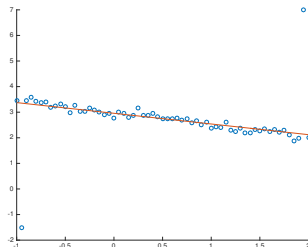
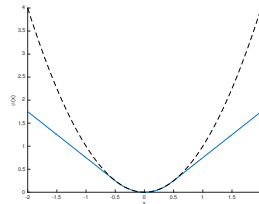


Általános büntetőfüggvények – Huber-függvény

- Huber-függvény:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & |x| < 1 \\ 2|x| - 1 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

- Kis hibákra négyzetes, nagy hibákra lineáris – érzéketlen az outlierekre
- Tapasztalat: konvex büntetőfüggvény minimalizálása $\sim O((\text{Least-squares}))$ számításigény



1 Bevezetés

- Miért Implicit?
- Milyen Implicit?

2 Illesztési Feladatok

- Implicit Illesztési Feladat
- Iteratív módszerek, Active Contours
- Least-squares és PCA
- Simítás, súlyozás
- Büntetőfüggvények

3 Globális Illesztés

- RBF
- Poisson rekonstrukció

4 Lokális Illesztés

- Lokális Érintősíkok
- Partition-of-Unity Implicits

1 Bevezetés

- Miért Implicit?
- Milyen Implicit?

2 Illesztési Feladatok

- Implicit Illesztési Feladat
- Iteratív módszerek, Active Contours
- Least-squares és PCA
- Simítás, súlyozás
- Büntetőfüggvények

3 Globális Illesztés

- RBF
- Poisson rekonstrukció

4 Lokális Illesztés

- Lokális Érintősíkok
- Partition-of-Unity Implicits

Radial Basis Functions (RBF)

- $\mathbf{p}_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$ adatpontokra egy implicit függvény szintvonalát akarjuk illeszteni: $F(\mathbf{p}_i) = 0$

Radial Basis Functions (RBF)

- $\mathbf{p}_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$ adatpontokra egy implicit függvény szintvonalát akarjuk illeszteni: $F(\mathbf{p}_i) = 0$
- $F(\mathbf{x}) = c_1\beta_1(\mathbf{x}) + \dots + c_k\beta_k(\mathbf{x})$ – de milyen bázisban reprezentáljuk F -et?

Radial Basis Functions (RBF)

- $\mathbf{p}_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$ adatpontokra egy implicit függvény szintvonalát akarjuk illeszteni: $F(\mathbf{p}_i) = 0$
- $F(\mathbf{x}) = c_1\beta_1(\mathbf{x}) + \dots + c_k\beta_k(\mathbf{x})$ – de milyen bázisban reprezentáljuk F -et?
- Rendeljük radiális bázisfüggvényeket (RBF) az adatpontokhoz:

$$\beta_{\mathbf{p}_i}(|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i|)$$

Radial Basis Functions (RBF)

- $\mathbf{p}_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$ adatpontokra egy implicit függvény szintvonalát akarjuk illeszteni: $F(\mathbf{p}_i) = 0$
- $F(\mathbf{x}) = c_1\beta_1(\mathbf{x}) + \dots + c_k\beta_k(\mathbf{x})$ – de milyen bázisban reprezentáljuk F -et?
- Rendeljük radiális bázisfüggvényeket (RBF) az adatpontokhoz:

$$\beta_{\mathbf{p}_i}(|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i|)$$

- Példák:

Radial Basis Functions (RBF)

- $\mathbf{p}_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$ adatpontokra egy implicit függvény szintvonalát akarjuk illeszteni: $F(\mathbf{p}_i) = 0$
- $F(\mathbf{x}) = c_1\beta_1(\mathbf{x}) + \dots + c_k\beta_k(\mathbf{x})$ – de milyen bázisban reprezentáljuk F -et?
- Rendeljük radiális bázisfüggvényeket (RBF) az adatpontokhoz:

$$\beta_{\mathbf{p}_i}(|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i|)$$

- Példák:
 - $\beta(r) = r$

Radial Basis Functions (RBF)

- $\mathbf{p}_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$ adatpontokra egy implicit függvény szintvonalát akarjuk illeszteni: $F(\mathbf{p}_i) = 0$
- $F(\mathbf{x}) = c_1\beta_1(\mathbf{x}) + \dots + c_k\beta_k(\mathbf{x})$ – de milyen bázisban reprezentáljuk F -et?
- Rendeljük radiális bázisfüggvényeket (RBF) az adatpontokhoz:

$$\beta_{\mathbf{p}_i}(|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i|)$$

- Példák:
 - $\beta(r) = r$
 - $\beta(r) = r^2 \log(r)$

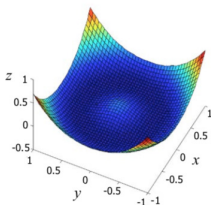
Radial Basis Functions (RBF)

- $\mathbf{p}_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$ adatpontokra egy implicit függvény szintvonalát akarjuk illeszteni: $F(\mathbf{p}_i) = 0$
- $F(\mathbf{x}) = c_1\beta_1(\mathbf{x}) + \dots + c_k\beta_k(\mathbf{x})$ – de milyen bázisban reprezentáljuk F -et?
- Rendeljük radiális bázisfüggvényeket (RBF) az adatpontokhoz:

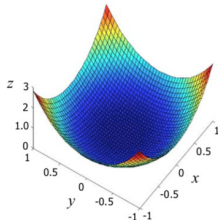
$$\beta_{\mathbf{p}_i}(|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i|)$$

- Példák:
 - $\beta(r) = r$
 - $\beta(r) = r^2 \log(r)$
 - $\beta(r) = e^{-r^2}$

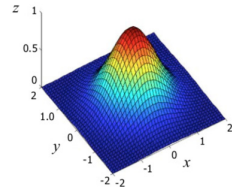
RBF Bázisfüggvények – Példák



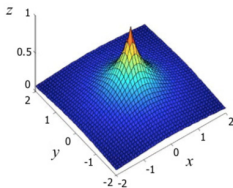
(a) Quadratic thin-plate $w(d) = d^2 \ln(d)$



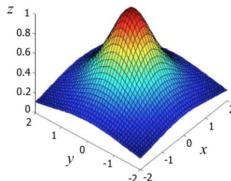
(b) Cubic thin-plate $w(d) = d^3$



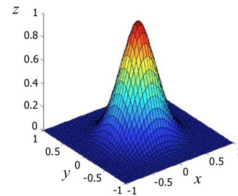
(c) Gaussian $w(d) = e^{-(\frac{d}{h})^2}$



(d) McLain $w(d) = \frac{1}{(d+h)^2}$



(e) Inverse quadratic $w(d) = \frac{1}{d^2+h^2}$



(f) Wendland $w(d) = (1 - \frac{d}{h})_+^4 (4\frac{d}{h} + 1)$

RBFBF – Egyenletrendszer es megoldása

- Illesztett függvény értéke az adatpontokban 0 – homogén négyzetes egyenletrendszer, $F \equiv 0$ triviális megoldás!

RBF – Egyenletrendszer es megoldása

- Illesztett függvény értéke az adatpontokban 0 – homogén négyzetes egyenletrendszer, $F \equiv 0$ triviális megoldás!
- Megoldás: PCA, vagy ha van normálvektor, pontok felvétele ± 1 távolságra

RBF – Egyenletrendszer es megoldása

- Illesztett függvény értéke az adatpontokban 0 – homogén négyzetes egyenletrendszer, $F \equiv 0$ triviális megoldás!
- Megoldás: PCA, vagy ha van normálvektor, pontok felvétele ± 1 távolságra
- Alapértelmezésben: minden illesztett ponthoz van egy bázisfüggvény – nagyon nagy, négyzetes, sűrű egyenletrendszer!

RBF – Egyenletrendszer es megoldása

- Illesztett függvény értéke az adatpontokban 0 – homogén négyzetes egyenletrendszer, $F \equiv 0$ triviális megoldás!
- Megoldás: PCA, vagy ha van normálvektor, pontok felvétele ± 1 távolságra
- Alapértelmezésben: minden illesztett ponthoz van egy bázisfüggvény – nagyon nagy, négyzetes, sűrű egyenletrendszer!
- Probléma méretének csökkentése: pontok decimálása vagy un. "fast multipole method"

RBF – Egyenletrendszer es megoldása

- Illesztett függvény értéke az adatpontokban 0 – homogén négyzetes egyenletrendszer, $F \equiv 0$ triviális megoldás!
- Megoldás: PCA, vagy ha van normálvektor, pontok felvétele ± 1 távolságra
- Alapértelmezésben: minden illesztett ponthoz van egy bázisfüggvény – nagyon nagy, négyzetes, sűrű egyenletrendszer!
- Probléma méretének csökkentése: pontok decimálása vagy un. "fast multipole method"
- Egyes RBF-ek simító energiákhoz köthetők:

RBF – Egyenletrendszer es megoldása

- Illesztett függvény értéke az adatpontokban 0 – homogén négyzetes egyenletrendszer, $F \equiv 0$ triviális megoldás!
- Megoldás: PCA, vagy ha van normálvektor, pontok felvétele ± 1 távolságra
- Alapértelmezésben: minden illesztett ponthoz van egy bázisfüggvény – nagyon nagy, négyzetes, sűrű egyenletrendszer!
- Probléma méretének csökkentése: pontok decimálása vagy un. "fast multipole method"
- Egyes RBF-ek simító energiákhoz köthetők:
 - $\beta(r) = r$ – harmonikus, ívhossz/felület simítása!

RBF – Egyenletrendszer es megoldása

- Illesztett függvény értéke az adatpontokban 0 – homogén négyzetes egyenletrendszer, $F \equiv 0$ triviális megoldás!
- Megoldás: PCA, vagy ha van normálvektor, pontok felvétele ± 1 távolságra
- Alapértelmezésben: minden illesztett ponthoz van egy bázisfüggvény – nagyon nagy, négyzetes, sűrű egyenletrendszer!
- Probléma méretének csökkentése: pontok decimálása vagy un. "fast multipole method"
- Egyes RBF-ek simító energiákhoz köthetők:
 - $\beta(r) = r$ – harmonikus, ívhossz/felület simítása!
 - $\beta(r) = r^2 \log(r)$ – Thin-plate spline (bi-harmonikus), görbület simítása!

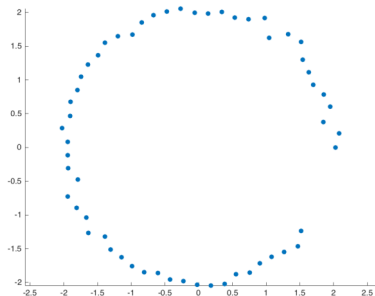
RBF – Egyenletrendszer es megoldása

- Illesztett függvény értéke az adatpontokban 0 – homogén négyzetes egyenletrendszer, $F \equiv 0$ triviális megoldás!
- Megoldás: PCA, vagy ha van normálvektor, pontok felvétele ± 1 távolságra
- Alapértelmezésben: minden illesztett ponthoz van egy bázisfüggvény – nagyon nagy, négyzetes, sűrű egyenletrendszer!
- Probléma méretének csökkentése: pontok decimálása vagy un. "fast multipole method"
- Egyes RBF-ek simító energiákhoz köthetők:
 - $\beta(r) = r$ – harmonikus, ívhossz/felület simítása!
 - $\beta(r) = r^2 \log(r)$ – Thin-plate spline (bi-harmonikus), görbület simítása!
 - $\beta(r) = e^{-r^2}$ – Összes derivált simítása!

RBF – Egyenletrendszer es megoldása

- Illesztett függvény értéke az adatpontokban 0 – homogén négyzetes egyenletrendszer, $F \equiv 0$ triviális megoldás!
- Megoldás: PCA, vagy ha van normálvektor, pontok felvétele ± 1 távolságra
- Alapértelmezésben: minden illesztett ponthoz van egy bázisfüggvény – nagyon nagy, négyzetes, sűrű egyenletrendszer!
- Probléma méretének csökkentése: pontok decimálása vagy un. "fast multipole method"
- Egyes RBF-ek simító energiákhoz köthetők:
 - $\beta(r) = r$ – harmonikus, ívhossz/felület simítása!
 - $\beta(r) = r^2 \log(r)$ – Thin-plate spline (bi-harmonikus), görbület simítása!
 - $\beta(r) = e^{-r^2}$ – Összes derivált simítása!
- Nem-kompakt tartójú RBF (pl. bi-harmonikus) – kitöltés/extrapoláció lehetséges! De: nem-ritka egyenletrendszer!

RBF Implicit Illesztés – Példák

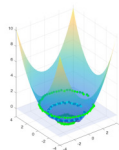
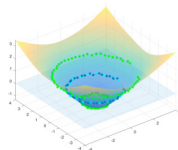
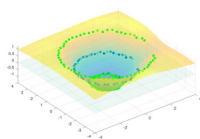
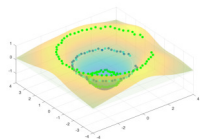
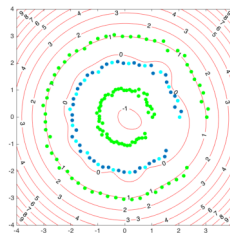
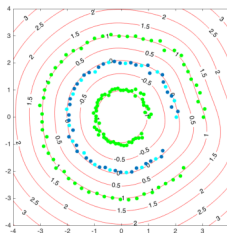
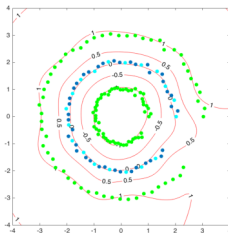
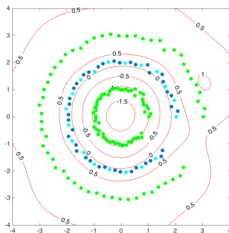


Kör (zajos, hiányos)



Nyuszi (hiányos)

RBF Implicit Illesztés – Példák



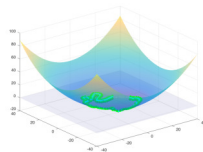
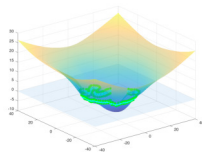
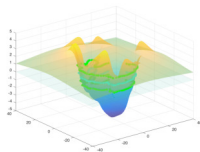
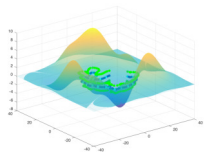
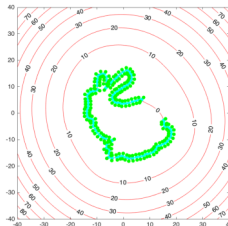
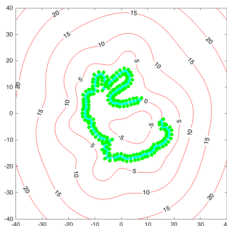
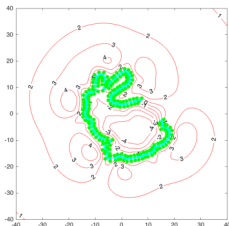
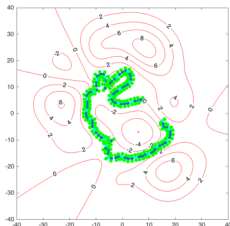
$$e^{-\frac{r^2}{d}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+d}}$$

$$\sqrt{r^2+d}$$

$$r^2 \log r$$

RBF Implicit Illesztés – Példák



$$e^{-\frac{r^2}{d}}$$

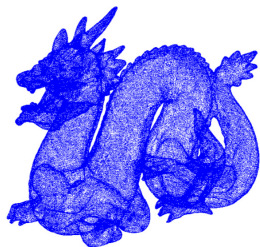
$$\frac{1}{\sqrt{r^2+d}}$$

$$\sqrt{r^2+d}$$

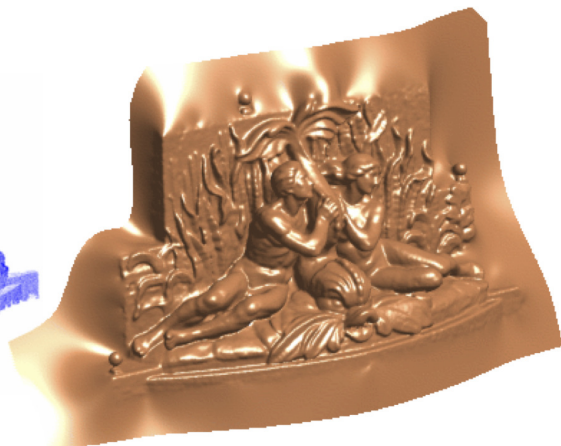
$$r^2 \log r$$

RBF

RBF Implicit Illesztés – Példák [Carr et al. '01-'03]



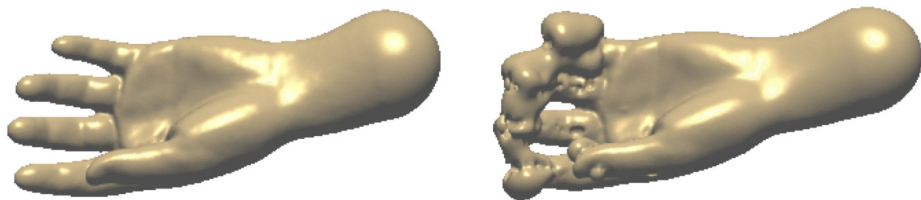
RBF Implicit Illesztés – Példák [Carr et al. '01-'03]



RBF Implicit Illesztés – Példák [Carr et al. '01-'03]



RBF Implicit Illesztés – Példák [Carr et al. '01-'03]



Gaussi RBF – Szorás megvalasztása

1 Bevezetés

- Miért Implicit?
- Milyen Implicit?

2 Illesztési Feladatok

- Implicit Illesztési Feladat
- Iteratív módszerek, Active Contours
- Least-squares és PCA
- Simítás, súlyozás
- Büntetőfüggvények

3 Globális Illesztés

- RBF
- Poisson rekonstrukció

4 Lokális Illesztés

- Lokális Érintősíkok
- Partition-of-Unity Implicits

Normálvektorok figyelembevétele: Poisson rekonstrukció

- Egy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ alakzat indikátor-függvénye:

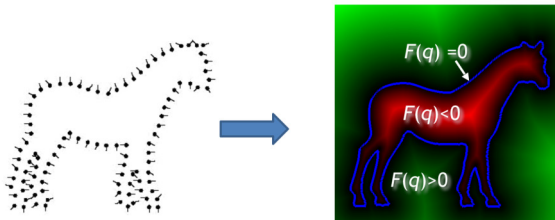
$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} -1 & \mathbf{x} \in \Omega \\ +1 & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \Omega \end{cases}$$

Normálvektorok figyelembevétele: Poisson rekonstrukció

- Egy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ alakzat indikátor-függvénye:

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} -1 & \mathbf{x} \in \Omega \\ +1 & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \Omega \end{cases}$$

- Észrevétel: indikátorfüggvény gradiense pontosan a felület normálmezője.



Poisson rekonstrukció

- Feladat – gradiens-illesztés:

$$\sum_{(\mathbf{p}_i)} \|\nabla F(\mathbf{p}_i) - n_{\mathbf{p}_i}\|_2^2 \rightarrow \min.$$

Poisson rekonstrukció

- Feladat – gradiens-illesztés:

$$\sum_{(\mathbf{p}_i)} \|\nabla F(\mathbf{p}_i) - n_{\mathbf{p}_i}\|_2^2 \rightarrow \min.$$

- $F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k c_i \beta_i(\mathbf{x})$ – végeselemes Poisson-egyenlet:

$$\Delta F = \nabla \cdot \mathbf{n}$$

Poisson rekonstrukció

- Feladat – gradiens-illesztés:

$$\sum_{(\mathbf{p}_i)} \|\nabla F(\mathbf{p}_i) - n_{\mathbf{p}_i}\|_2^2 \rightarrow \min.$$

- $F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k c_i \beta_i(\mathbf{x})$ – végesesemes Poisson-egyenlet:

$$\Delta F = \nabla \cdot \mathbf{n}$$

- Illesztési pontosság javítása a pozíciók illesztésével:

$$\sum_{(\mathbf{p}_i)} \|\nabla F(\mathbf{p}_i) - n_{\mathbf{p}_i}\|_2^2 + \lambda(F(\mathbf{p}_i))^2 \rightarrow \min.$$

Poisson rekonstrukció

- Feladat – gradiens-illesztés:

$$\sum_{(\mathbf{p}_i)} \|\nabla F(\mathbf{p}_i) - \mathbf{n}_{\mathbf{p}_i}\|_2^2 \rightarrow \min.$$

- $F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k c_i \beta_i(\mathbf{x})$ – végesesemes Poisson-egyenlet:

$$\Delta F = \nabla \cdot \mathbf{n}$$

- Illesztési pontosság javítása a pozíciók illesztésével:

$$\sum_{(\mathbf{p}_i)} \|\nabla F(\mathbf{p}_i) - \mathbf{n}_{\mathbf{p}_i}\|_2^2 + \lambda (F(\mathbf{p}_i))^2 \rightarrow \min.$$

- Árnyékolt Poisson-egyenlet (Screened Poisson):

$$(\Delta + \lambda \cdot \text{id})F = \nabla \cdot \mathbf{n}$$

Poisson rekonstrukció

- Feladat – gradiens-illesztés:

$$\sum_{(\mathbf{p}_i)} \|\nabla F(\mathbf{p}_i) - n_{\mathbf{p}_i}\|_2^2 \rightarrow \min.$$

- $F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k c_i \beta_i(\mathbf{x})$ – végesesemes Poisson-egyenlet:

$$\Delta F = \nabla \cdot \mathbf{n}$$

- Illesztési pontosság javítása a pozíciók illesztésével:

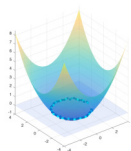
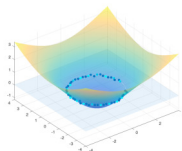
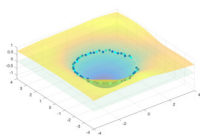
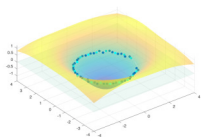
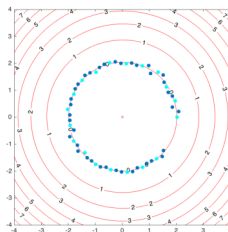
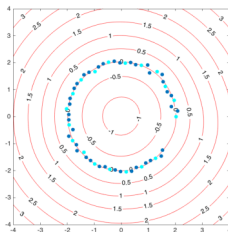
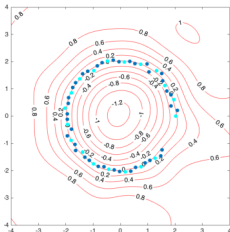
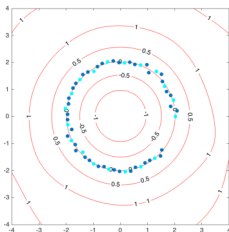
$$\sum_{(\mathbf{p}_i)} \|\nabla F(\mathbf{p}_i) - n_{\mathbf{p}_i}\|_2^2 + \lambda(F(\mathbf{p}_i))^2 \rightarrow \min.$$

- Árnyékolt Poisson-egyenlet (Screened Poisson):

$$(\Delta + \lambda \cdot \text{id})F = \nabla \cdot \mathbf{n}$$

- Fizikai analógia – normálvektorok = erővonalak, F = potenciálfüggvény

Gradiens illesztés – Példák (RBF bázis)



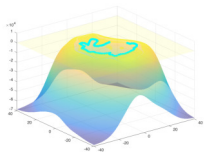
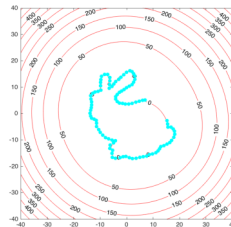
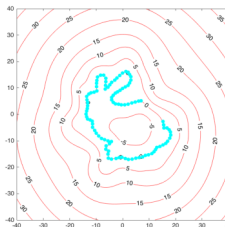
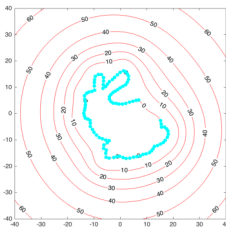
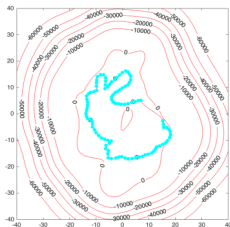
$$e^{-\frac{r^2}{d}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+d}}$$

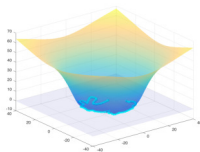
$$\sqrt{r^2+d}$$

$$r^2 \log r$$

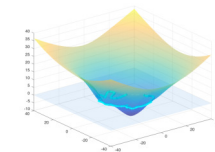
Gradiens illesztés – Példák (RBF bázis)



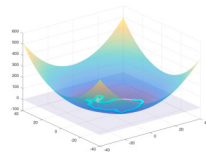
$$e^{-\frac{r^2}{d}}$$



$$\frac{1}{\sqrt{r^2+d}}$$



$$\sqrt{r^2+d}$$



$$r^2 \log r$$

Poisson rekonstrukció

- Függvénybázis: pl. Fourier-sor (szabályos rács felett), tenzor-szorzat B-Spline (Octtree felett), RBF, Wavelet

Poisson rekonstrukció

- Függvénybázis: pl. Fourier-sor (szabályos rács felett), tenzor-szorzat B-Spline (Octtree felett), RBF, Wavelet
- Zárt felületek illesztésére alkalmas – peremes felületek esetén Neumann peremfeltétel

Poisson rekonstrukció

- Függvénybázis: pl. Fourier-sor (szabályos rács felett), tenzor-szorzat B-Spline (Octtree felett), RBF, Wavelet
- Zárt felületek illesztésére alkalmas – peremes felületek esetén Neumann peremfeltétel
- Nyílt forráskódú implementáció:
<http://www.cs.jhu.edu/~misha/Code/PoissonRecon>

Poisson rekonstrukció – Regularizáció, SSD

- Indikátorfüggvényt közelíteni akarjuk az előjeles távolsághoz

Poisson rekonstrukció – Regularizáció, SSD

- Indikátorfüggvényt közelíteni akarjuk az előjeles távolsághoz
- Simítsuk a gradiensmezőt:

$$\sum_{(\mathbf{p}_i)} \|\nabla F(\mathbf{p}_i) - n_{\mathbf{p}_i}\|_2^2 + \lambda_1 (F(\mathbf{p}_i))^2 + \lambda_2 H(F(\mathbf{x})) \rightarrow \min.$$

H az F Hesse-mátrixa

Poisson rekonstrukció – Regularizáció, SSD

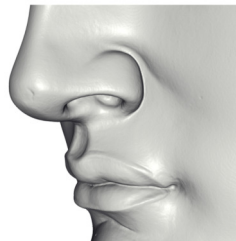
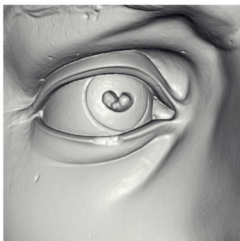
- Indikátorfüggvényt közelíteni akarjuk az előjeles távolsághoz
- Simítsuk a gradiensmezőt:

$$\sum_{(\mathbf{p}_i)} \|\nabla F(\mathbf{p}_i) - n_{\mathbf{p}_i}\|_2^2 + \lambda_1 (F(\mathbf{p}_i))^2 + \lambda_2 H(F(\mathbf{x})) \rightarrow \min.$$

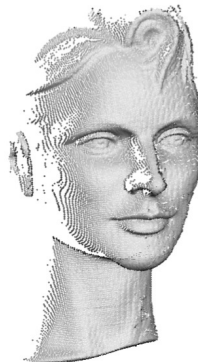
H az F Hesse-mátrixa

- F egy simított előjeles távolság (Smoothed Signed Distance, SSD) – De: nagyobb, sűrűbb egyenletrendszer $\Rightarrow$ Speciális, pl. multigrid megoldó kell!

Poisson rekonstrukció

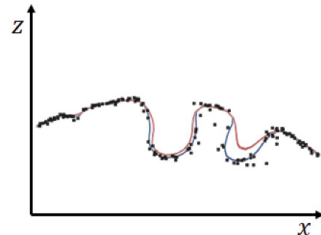
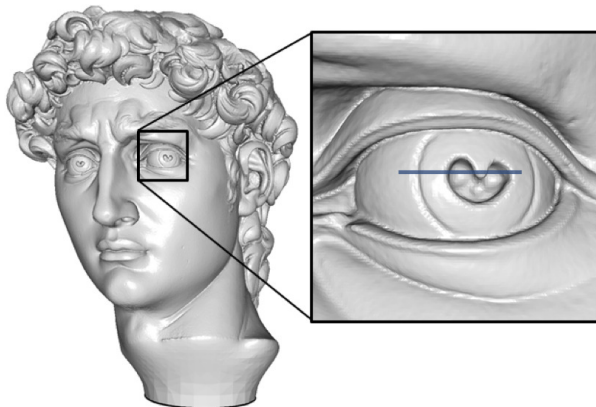
Poisson rekonstrukció – Példák [Kazhdan et al. '06-'13,
Calakli-Taubin '11]

Poisson rekonstrukció

Poisson rekonstrukció – Példák [Kazhdan et al. '06-'13,
Calakli-Taubin '11]

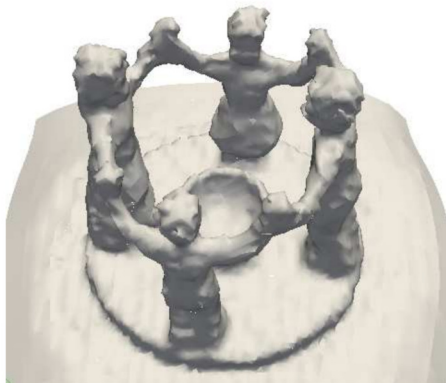
Poisson rekonstrukció

Poisson rekonstrukció – Példák [Kazhdan et al. '06-'13, Calakli-Taubin '11]



Piros: Csak normálvektor, Kek: Normálvektor + pozíció

Robusztus Poisson – Huber-függvénnyel [Estellers et al., '15]



1 Bevezetés

- Miért Implicit?
- Milyen Implicit?

2 Illesztési Feladatok

- Implicit Illesztési Feladat
- Iteratív módszerek, Active Contours
- Least-squares és PCA
- Simítás, súlyozás
- Büntetőfüggvények

3 Globális Illesztés

- RBF
- Poisson rekonstrukció

4 Lokális Illesztés

- Lokális Érintősíkok
- Partition-of-Unity Implicits

1 Bevezetés

- Miért Implicit?
- Milyen Implicit?

2 Illesztési Feladatok

- Implicit Illesztési Feladat
- Iteratív módszerek, Active Contours
- Least-squares és PCA
- Simítás, súlyozás
- Büntetőfüggvények

3 Globális Illesztés

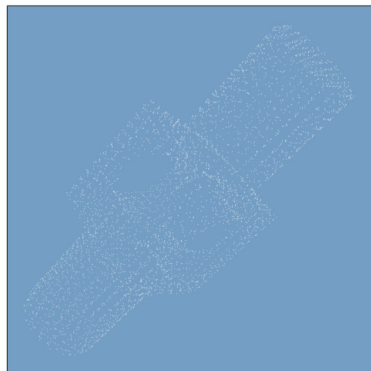
- RBF
- Poisson rekonstrukció

4 Lokális Illesztés

- Lokális Érintősíkok
- Partition-of-Unity Implicits

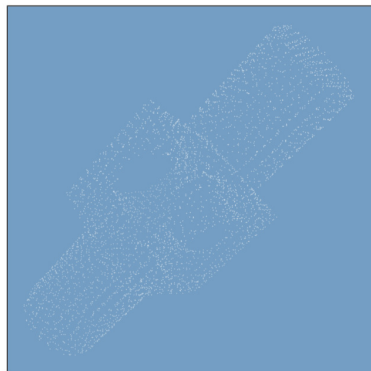
Lokális Érintősíkok [Hoppe et al., '92]

- Minden adatponthoz számítható lokális közelítő érintősík:



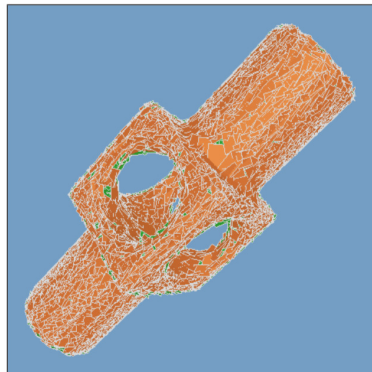
Lokális Érintősíkok [Hoppe et al., '92]

- Minden adatponthoz számítható lokális közelítő érintősík:
 - Közep pont: k legközelebbi szomszéd átlaga
 - Normálvektor: PCA a k legközelebbi szomszédra



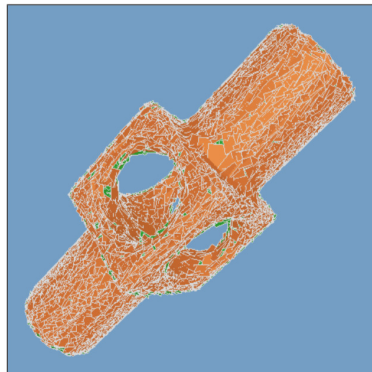
Lokális Érintősíkok [Hoppe et al., '92]

- Minden adatponthoz számítható lokális közelítő érintősík:
 - Közeppon: k legközelebbi szomszéd átlaga
 - Normálvektor: PCA a k legközelebbi szomszédra



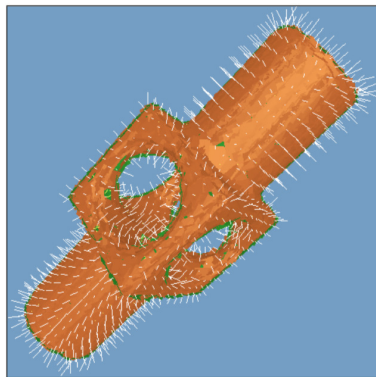
Lokális Érintősíkok [Hoppe et al., '92]

- Minden adatponthoz számítható lokális közelítő érintősík:
 - Közep pont: k legközelebbi szomszéd átlaga
 - Normálvektor: PCA a k legközelebbi szomszédra
- Érintősíkok konzisztens orientációja feszítőfával



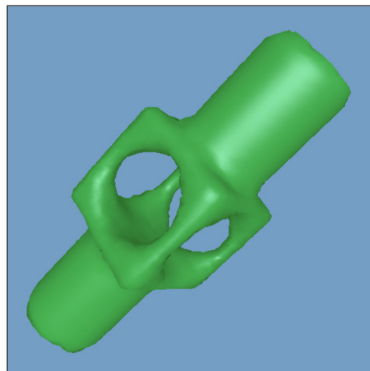
Lokális Érintősíkok [Hoppe et al., '92]

- Minden adatponthoz számítható lokális közelítő érintősík:
 - Közep pont: k legközelebbi szomszéd átlaga
 - Normálvektor: PCA a k legközelebbi szomszédra
- Érintősíkok konzisztens orientációja feszítőfával
- Előjeles távolság tetszőleges x pontban: a legközelebbi adatpont lokális síkjától



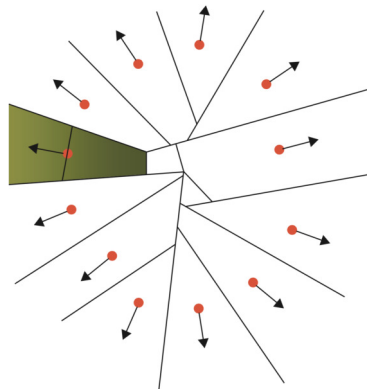
Lokális Érintősíkok [Hoppe et al., '92]

- Minden adatponthoz számítható lokális közelítő érintősík:
 - Közep pont: k legközelebbi szomszéd átlaga
 - Normálvektor: PCA a k legközelebbi szomszédra
- Érintősíkok konzisztens orientációja feszítőfával
- Előjeles távolság tetszőleges x pontban: a legközelebbi adatpont lokális síkjától



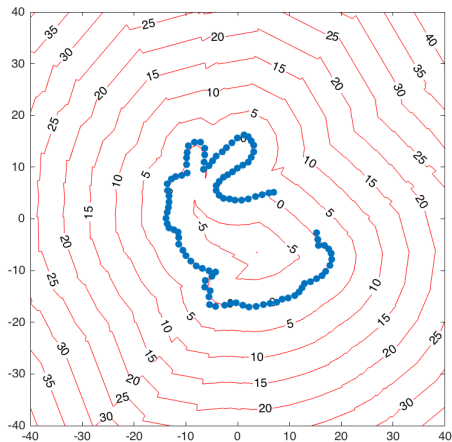
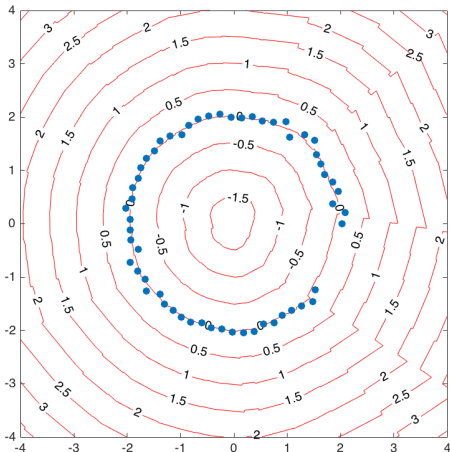
Lokális Érintősíkok [Hoppe et al., '92]

- Minden adatponthoz számítható lokális közelítő érintősík:
 - Közepont: k legközelebbi szomszéd átlaga
 - Normálvektor: PCA a k legközelebbi szomszédra
- Érintősíkok konzisztens orientációja feszítőfával
- Előjeles távolság tetszőleges x pontban: a legközelebbi adatpont lokális síkjától
- Voronoi-diagram – nem folytonos függvény!



Lokális Érintősíkok

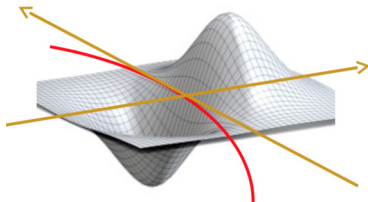
Lokális Érintősíkok – Példák



Simított Lokális Érintősíkok [Fuhrmann-Goesele, '14]; MLS

- Adatpont hozzájárulása az előjeles távolsághoz (normál-orientált koordinátarendszer):

$$F(x, y, z) = \underbrace{ze^{-\frac{z^2}{2\sigma_z}}}_{\text{normal}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma_{xy}}}}_{\text{tangential}}$$

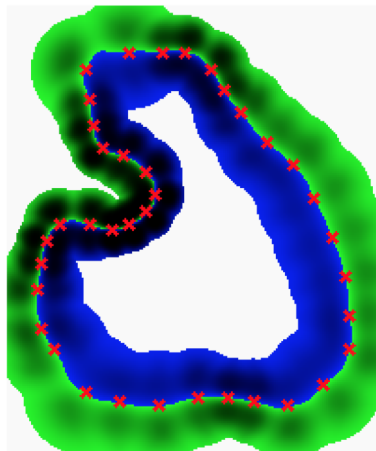


Simított Lokális Érintősíkok [Fuhrmann-Goesele, '14]; MLS

- Adatpont hozzájárulása az előjeles távolsághoz (normál-orientált koordinátarendszer):

$$F(x, y, z) = \underbrace{ze^{-\frac{z^2}{2\sigma_z}}}_{\text{normal}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma_{xy}}}}_{\text{tangential}}$$

- Szórások beállítása skála információból



Simított Lokális Érintősíkok [Fuhrmann-Goesele, '14]; MLS

- Adatpont hozzájárulása az előjeles távolsághoz (normál-orientált koordinátarendszer):

$$F(x, y, z) = \underbrace{ze^{-\frac{z^2}{2\sigma_z}}}_{\text{normal}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma_{xy}}}}_{\text{tangential}}$$

- Szórások beállítása skála információból



Simított Lokális Érintősíkok [Fuhrmann-Goesele, '14]; MLS

- Adatpont hozzájárulása az előjeles távolsághoz (normál-orientált koordinátarendszer):

$$F(x, y, z) = \underbrace{ze^{-\frac{z^2}{2\sigma_z}}}_{\text{normal}} \cdot \underbrace{e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2\sigma_{xy}}}}_{\text{tangential}}$$

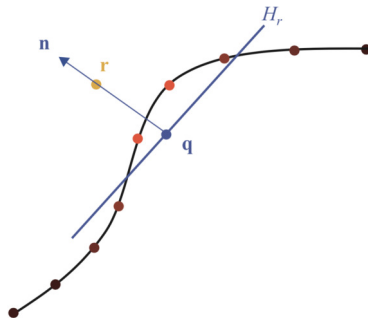
- Szórások beállítása skála információból
- Alternatíva: Moving Least-Squares [Levin, '98, Alexa '02, Pauly '02, Shen et al. '04, Amenta-Kil '04]

Simított Lokális Érintősíkok [Fuhrmann-Goesele, '14]; MLS

- Adatpont hozzájárulása az előjeles távolsághoz (normál-orientált koordinátarendszer):

$$F(x, y, z) = \underbrace{ze^{-\frac{z^2}{2\sigma_z}}}_{\text{normal}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{-(x^2+y^2)}{2\sigma_{xy}}}}_{\text{tangential}}$$

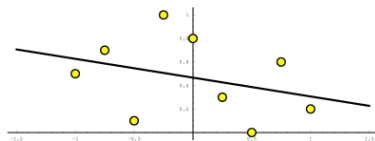
- Szórások beállítása skála információból
- Alternatíva: Moving Least-Squares [Levin, '98, Alexa '02, Pauly '02, Shen et al. '04, Amenta-Kil '04]
 - Sík illesztése pont körüli súlyozással



Simított Lokális Érintősíkok [Fuhrmann-Goesele, '14]; MLS

- Adatpont hozzájárulása az előjeles távolsághoz (normál-orientált koordinátarendszer):

$$F(x, y, z) = \underbrace{ze^{-\frac{z^2}{2\sigma_z}}}_{\text{normal}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma_{xy}}}}_{\text{tangential}}$$



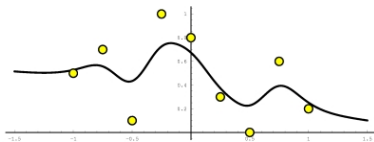
- Szórások beállítása skála információból
- Alternatíva: Moving Least-Squares [Levin, '98, Alexa '02, Pauly '02, Shen et al. '04, Amenta-Kil '04]
 - Sík illesztése pont körüli súlyozással
 - Vetítő operátor – C^∞ folytonos felületet definiál!

Simított Lokális Érintősíkok [Fuhrmann-Goesele, '14]; MLS

- Adatpont hozzájárulása az előjeles távolsághoz (normál-orientált koordinátarendszer):

$$F(x, y, z) = \underbrace{ze^{-\frac{z^2}{2\sigma_z}}}_{\text{normal}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma_{xy}}}}_{\text{tangential}}$$

- Szórások beállítása skála információból
- Alternatíva: Moving Least-Squares [Levin, '98, Alexa '02, Pauly '02, Shen et al. '04, Amenta-Kil '04]
 - Sík illesztése pont körüli súlyozással
 - Vetítő operátor – C^∞ folytonos felületet definiál!



1 Bevezetés

- Miért Implicit?
- Milyen Implicit?

2 Illesztési Feladatok

- Implicit Illesztési Feladat
- Iteratív módszerek, Active Contours
- Least-squares és PCA
- Simítás, súlyozás
- Büntetőfüggvények

3 Globális Illesztés

- RBF
- Poisson rekonstrukció

4 Lokális Illesztés

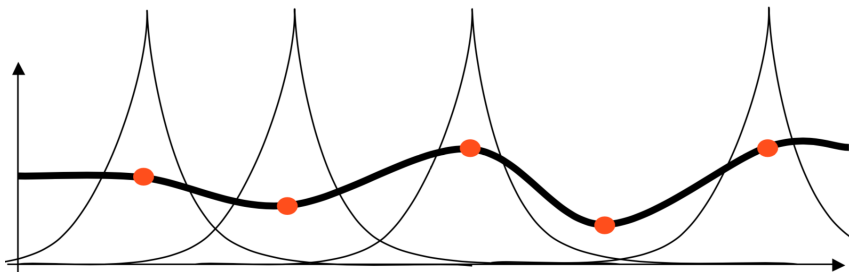
- Lokális Érintősíkok
- Partition-of-Unity Implicits

Shepard Interpoláció

- Adottak: pontok $\mathbf{p}_i$, függvényértékek f_i
- Shepard interpoláció:

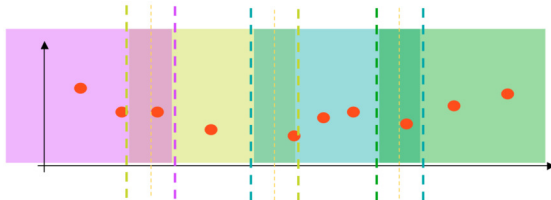
$$f(\mathbf{x}) = \sum_i \frac{f_i \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i|^p}}{\sum_j \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{p}_j|^p}}$$

- $\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i|^p} \rightarrow \infty$, ha $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}_i \Rightarrow$ interpoláció a pontokban
- C^{p-1} folytonos, de a pontokban lapos; ekvivalens lok. konstans MLS-el



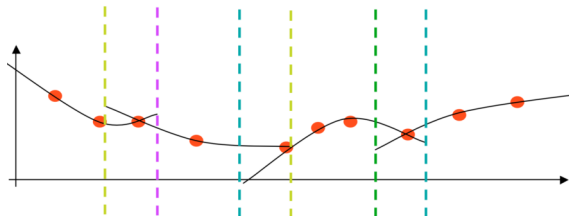
Partition-of-Unity Implicits [Ohtake et al., 2003]

- Adatpontok partícionálása
átlapolódó cellákra



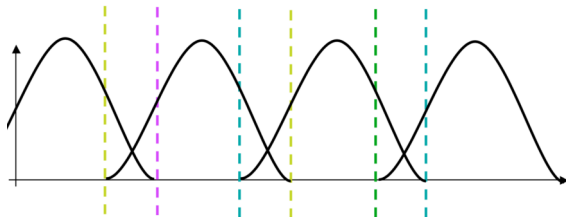
Partition-of-Unity Implicit [Ohtake et al., 2003]

- Adatpontok partícionálása átlapolódó cellákra
- Implicit cellafüggvények (pl. másodfokú) illesztése: $f_i(\mathbf{x})$



Partition-of-Unity Implicits [Ohtake et al., 2003]

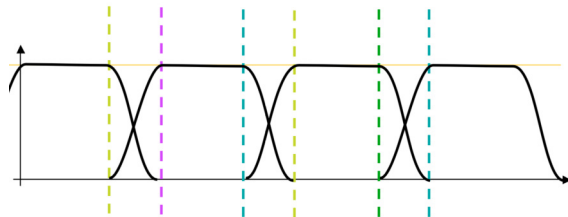
- Adatpontok partíciónálása
átlapolódó cellákra
- Implicit cellafüggvények
(pl. másodfokú) illesztése:
 $f_i(\mathbf{x})$
- Lokális fv.-ek
összeblendelése
Partition-of-Unity
súlyfüggvényekkel:



$$f(\mathbf{x}) = \sum_i \frac{f_i(\mathbf{x}) w_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{\sum_j w_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}$$

Partition-of-Unity Implicits [Ohtake et al., 2003]

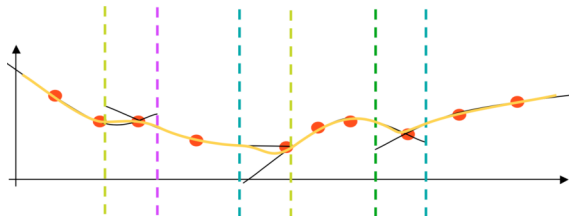
- Adatpontok partíciónálása
átlapolódó cellákra
- Implicit cellafüggvények
(pl. másodfokú) illesztése:
 $f_i(\mathbf{x})$
- Lokális fv.-ek
összeblendelése
Partition-of-Unity
súlyfüggvényekkel:



$$f(\mathbf{x}) = \sum_i \frac{f_i(\mathbf{x}) w_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{\sum_j w_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}$$

Partition-of-Unity Implicits [Ohtake et al., 2003]

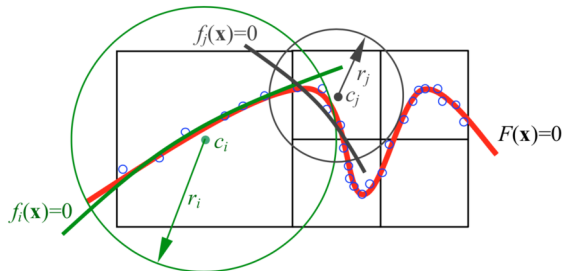
- Adatpontok partíciónálása
átlapolódó cellákra
- Implicit cellafüggvények
(pl. másodfokú) illesztése:
 $f_i(\mathbf{x})$
- Lokális fv.-ek
összeblendelése
Partition-of-Unity
súlyfüggvényekkel:



$$f(\mathbf{x}) = \sum_i \frac{f_i(\mathbf{x})w_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{\sum_j w_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}$$

Partition-of-Unity Implicits [Ohtake et al., 2003]

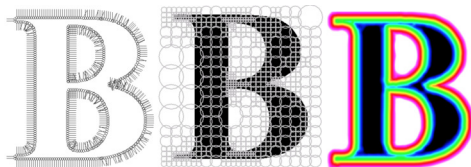
- Adatpontok partíciónálása átlapolódó cellákra
- Implicit cellafüggvények (pl. másodfokú) illesztése: $f_i(\mathbf{x})$
- Lokális fv.-ek összeblendelése
Partition-of-Unity súlyfüggvényekkel:



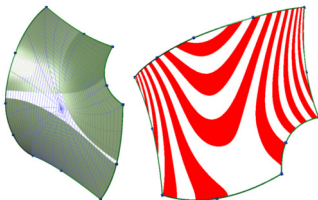
$$f(\mathbf{x}) = \sum_i \frac{f_i(\mathbf{x}) w_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{\sum_j w_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}$$

- Gömb alakú környezetek octtree cellákhoz

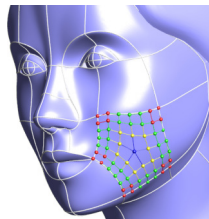
Partition-of-Unity Implicits – Példák [Ohtake et al., 2003]



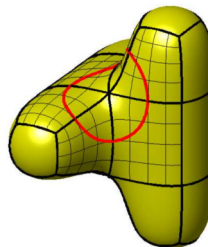
Partition-of-Unity – Hasonló Konstrukciók



Transzfinit



Generalized Bézier

 C^∞ paraméteres C^2 subdivision

Köszönöm a figyelmet!