



Összefoglalva

Optimalizáció

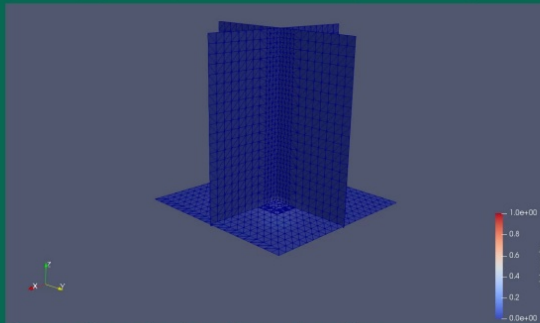
Optimal Delaunay Triangulation

Köszönöm a figyelmet!

Háromszög
hálók

Bevezetés

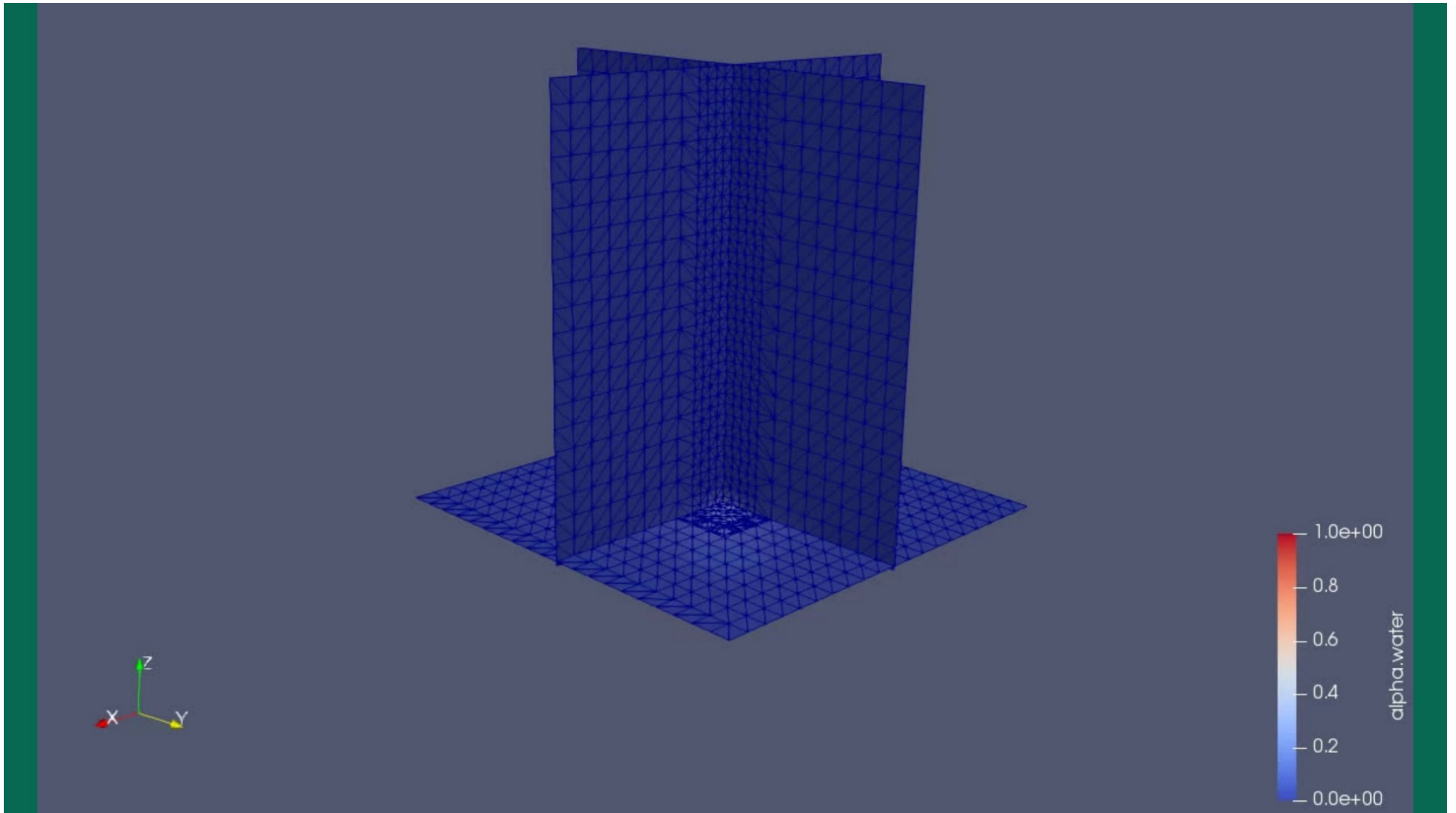
Numerikus módszerek



- Csökkenti mérések számát
- Ezért gyorsabb fejlesztés
- Költségek csökkennek

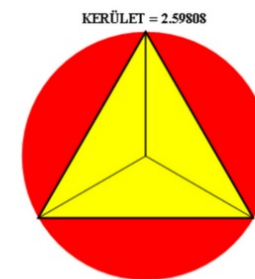
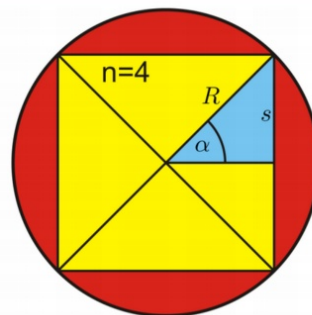
Diszkretizáció

Háló minőség



Példa: π értékének számítása

- Egység sugarú kör
- Ennek kerülete = π
- Minél több szögű a poligon, annál pontosabb értéket kapunk



$$\alpha = \frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n}$$

$$s = R \cdot \sin \alpha = R \cdot \sin \left[\frac{180^\circ}{n} \right]$$

$$K_{\text{poligon}} = n \cdot (2s) = 2R \cdot n \cdot \sin \left[\frac{180^\circ}{n} \right]$$

$$K_{\text{kör}} = 2R \cdot \pi$$

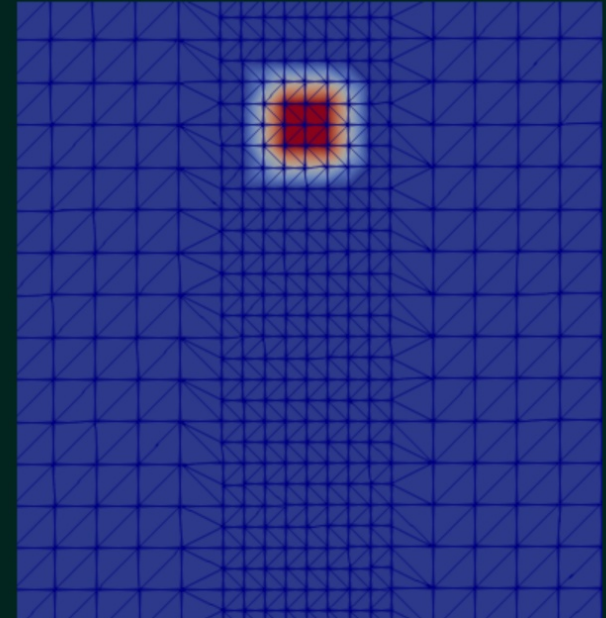
$$K_{\text{kör}} \approx K_{\text{poligon}}$$

$$\pi \approx n \cdot \sin \left[\frac{180^\circ}{n} \right]$$

Miknek kell megfelelnie?

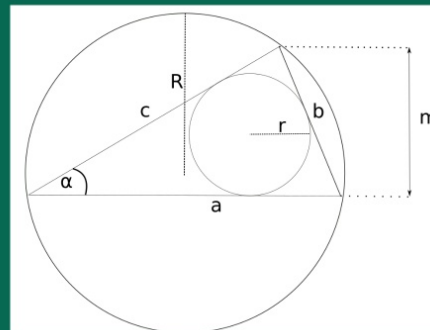
- A domén minél egyenletesebb elemekre legyen felosztva
- Határok pontos leírása
- Általában a megoldandó PDE gradiensét kövesse, ahol nagy változás történik, sűrűbb legyen

Nincsen általános "jó mesh", az adott szimulációtól függ



Jellemzői

- Legkisebb szög
- Körülírt és belső érintő sugarak aránya
- Legrövidebb oldal és körülírt kör sugarának aránya
- Leghosszabb oldal és magasság aránya

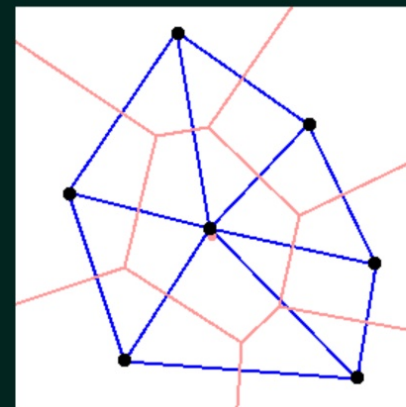


Delaunay

Delaunay

Fix ponthalmaz esetén egyértelmű

- A háromszög köré írható kör középpontja a háromszögön belül van
- Duális háló:
 - a háromszögek csúcsai a Voronoi cellák pontjai
 - Voronoi cellák csúcsai a háromszög köré írható kör közepe.



Energia

- Gyakran energia minimum elvén működnek
 - Definiálnak egy energia jellegű mennyiséget
 - Ennek keresik a minimumát

CVT

ODT

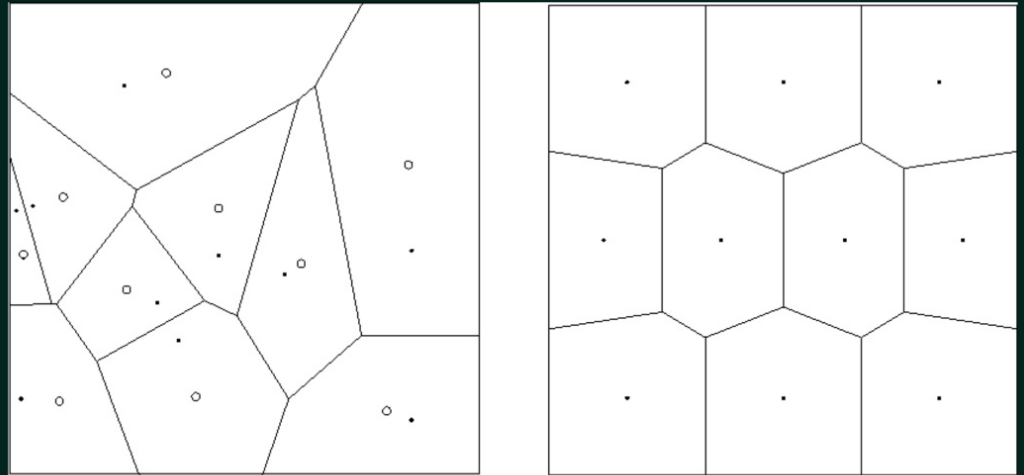
Sizing field

Határ kezelés

Háló optimalizálás 1

Egy lehetőség a Centroidal Voronoi Tessellation (CVT)

- Ponthalmaz Voronoi diagramja
- Voronoi cellák pontjait a cella súlypontjába tesszük

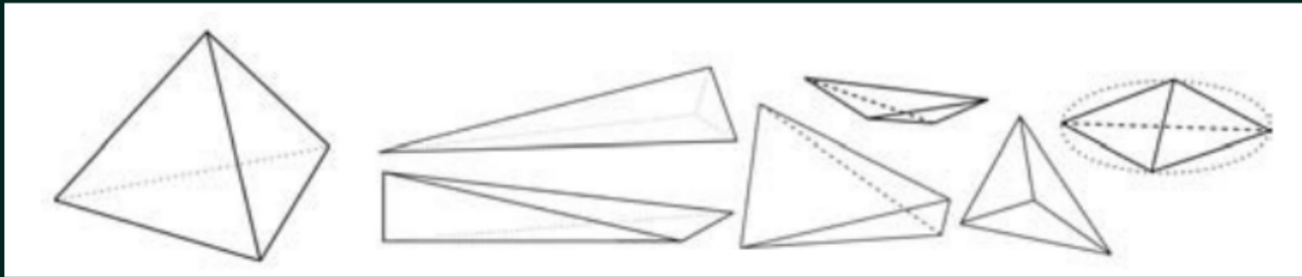


Eredmény: izotróp Voronoi cellák, ami maximálisan egyenletes eloszlású pontokat produkál.

Háló optimalizálás 2

Mivel az algoritmus csak a cellák optimalizálását figyeli, ezért a megfelelő Delaunay háló csak 2D-ben ideális.

- Sík lefedhető szabályos háromszögekkel
- Egy térfogatra az ideális háló már nem lehetséges szabályos tetraéderekkel
- Nem ideális alakzatok (mivel főleg a Voronoi cellák mérete a fókusz)
 - Szilánk: Tetraéder, egyenletes eloszlású csúcsok, de lapos (2D)

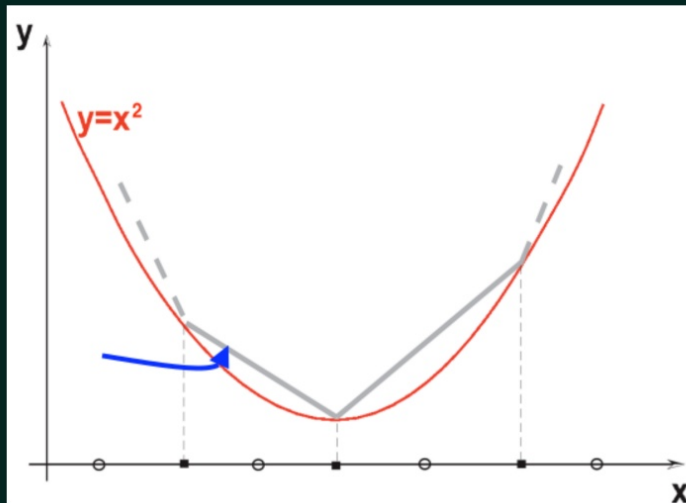


ODT

- Cél: Egyenletes háromszög szögek, nem pedig Voronoi cellák
- Energia, amit minimalizálni szeretnénk:

$$E_{ODT} = \left\| f - f_{PWL}^{overlaid} \right\|_{L_1}$$

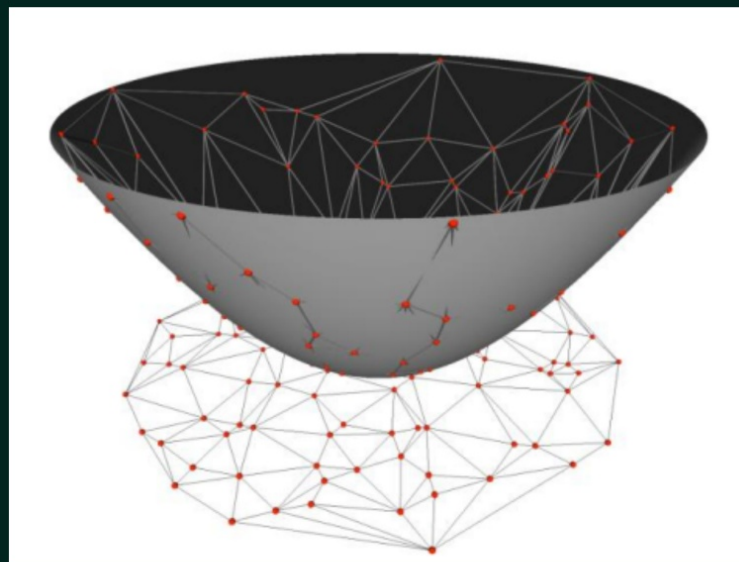
- $f := x^2$, alakú, ezt szeretnénk valamilyen diszkrét értékekkel közelíteni.



- Az f görbe és a PWL görbe közti területet minimalizáljuk

ODT fix pontok halmazán

- A pontokat felvetítjük a pontokat a paraboloid palástjára
- Majd vesszük az alsó konvex burkát
- Ha ezt visszavetítjük a síkra megkapjuk az optimális Delaunay hálót az adott ponthalmazra



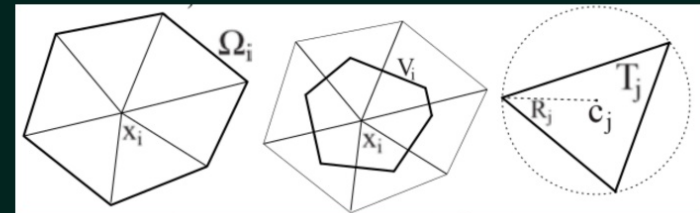
Fix topológia

- Csúcsok mozgatásával szeretnénk elérni, hogy közelítsük a paraboloid fv-t.
- Lokális minimum feltétele (közelítési hiba integrálból):

$$E_{\text{ODT}} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1..N} \int_{\Omega_i} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2 d\mathbf{x}.$$



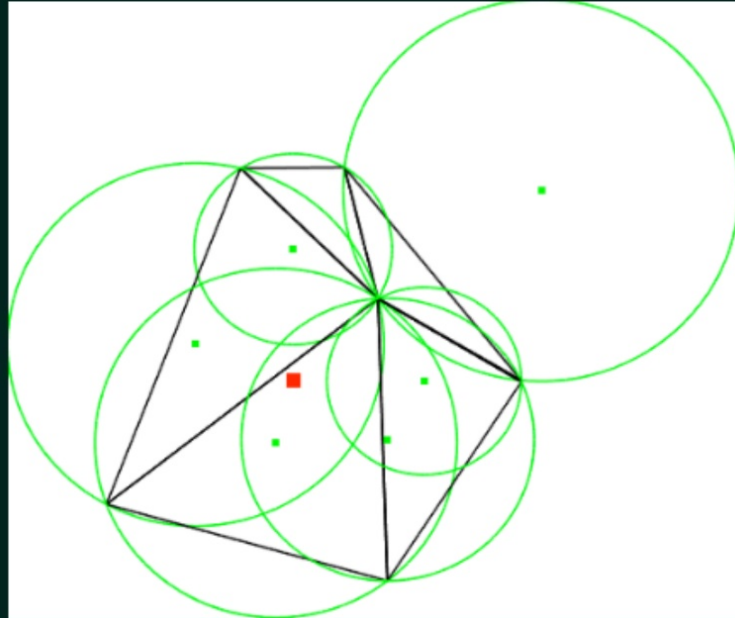
$$\mathbf{x}_i^* = \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{T_j \in \Omega_i} |T_j| \mathbf{c}_j.$$



Algoritmus működése

$$\mathbf{x}_i^* = \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{T_j \in \Omega_i} |T_j| \mathbf{c}_j.$$

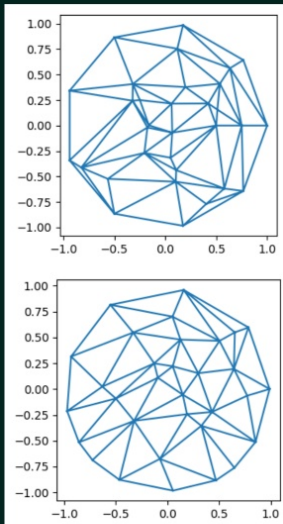
1. Megkeressük vertexhez kapcsolódó háromszögeket
2. Ezen háromszögeknek kiszámoljuk területét (T_i) és köré írható körének közepét ($\mathbf{c}_i$)
3. Ezen értékek átlagát vesszük
4. Vertexet átpozícionáljuk



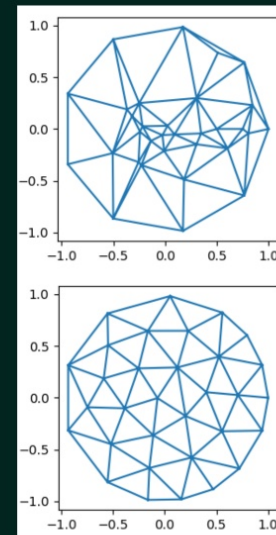
Eredmény

A kapott háromszögelés a tapasztalatok szerint nagyon egyenletes elemekből áll, mentes a „sliver” tetraéderektől és bizonyíthatóan minimalizálja a szakaszosan lineáris közelítés hibáját.

Egy iteráció:



20 db iteráció:



Sizing field

- Eddig csak azt néztük, hogy a háló uniformális legyen.
- Még szeretnénk, hogy:
 - Az elemek számát csökkenteni
 - A határokat jobban megtartani/leírni
- Miközben a háló minőségén nem szeretnénk rontani
- Megoldás: sizing field

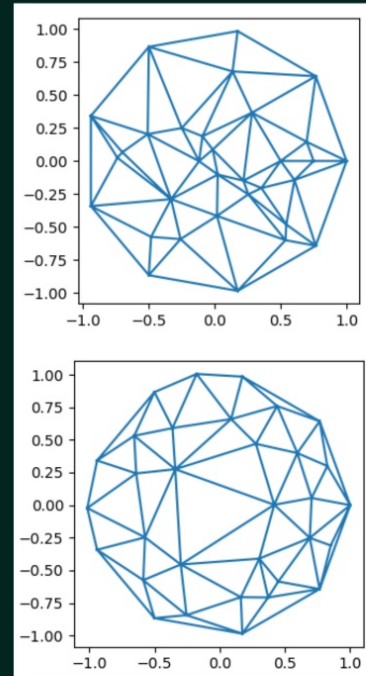
$$\mathbf{x}_i^* = \frac{1}{\sum_{T_k \in \Omega_i} \frac{|T_k|}{\mu^3(\mathbf{g}_k)}} \sum_{T_j \in \Omega_i} \frac{|T_j|}{\mu^3(\mathbf{g}_j)} \mathbf{c}_j.$$

- Ehhez elég a már ismertetett képletet egy $\mu(g)$ értékkel módosítani, ahol g az adott háromszög/tetraéderbe írható kör középpontja.
- Ennek a μ értékének levezettek egy geometriai közelítés szempontjából optimális mező függvényt, de elvileg bármilyen más függvény is lehet.

Sizing field 2

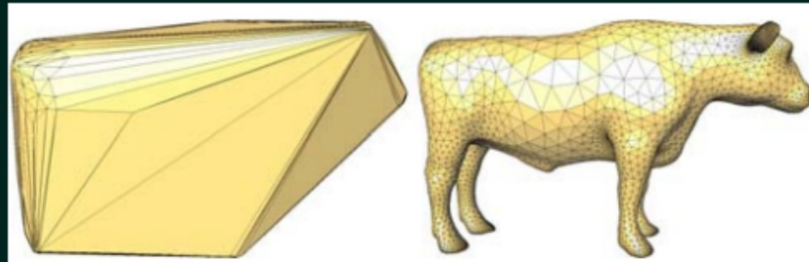
10 iteráció db iteráció

μ = kör domain középpontjáról való távolság



Határ kezelése

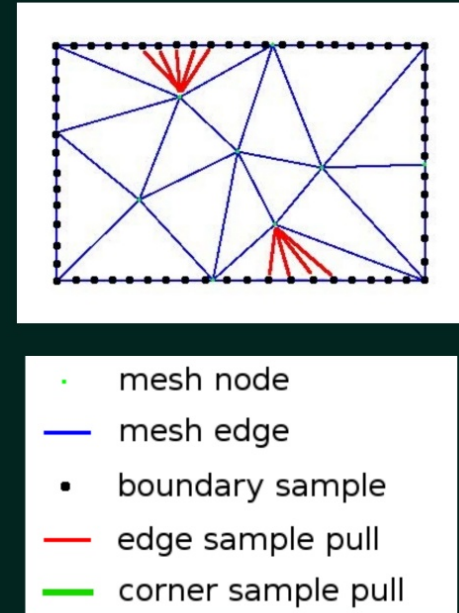
Csúcsok a határnál problémásak, mivel a Delaunay háló a konvex burkon lévő pontokat is tartalmazza

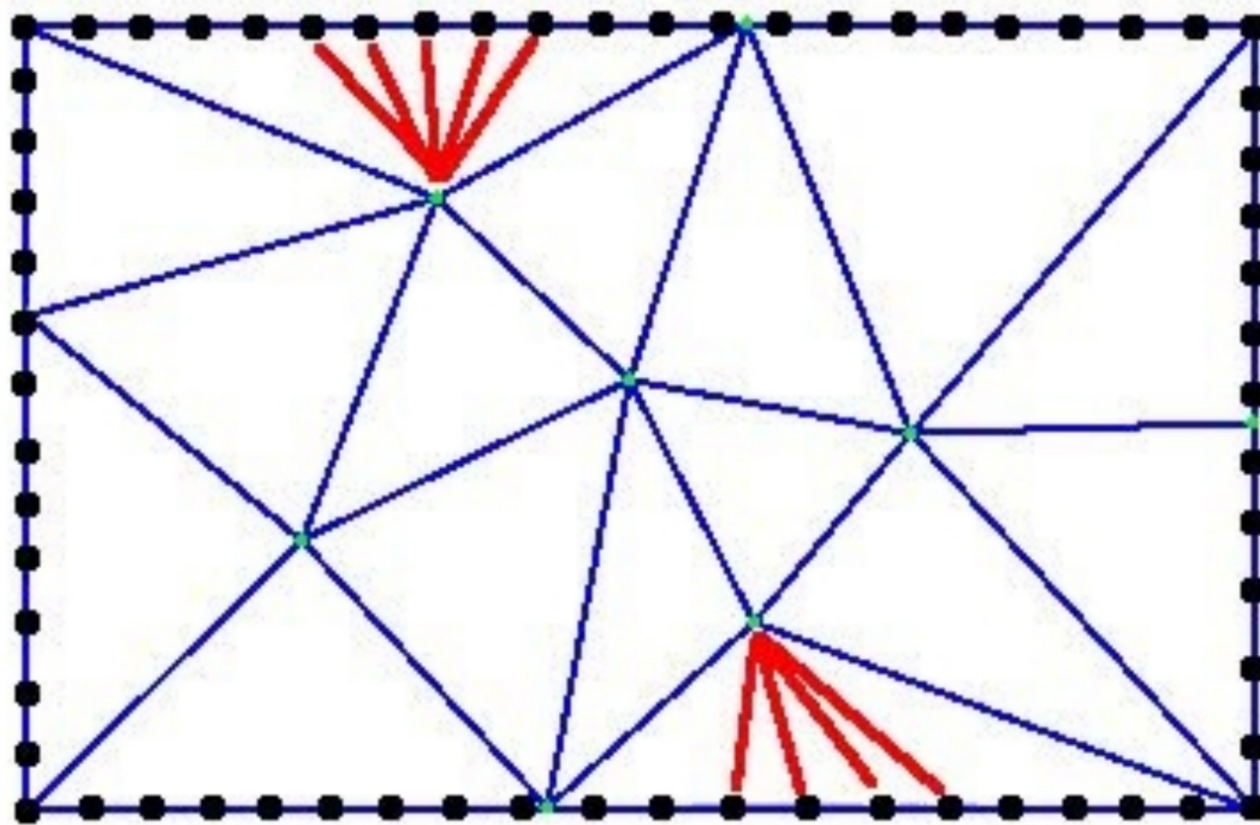


A hálón kívül eső elemektől meg kell szabadulni

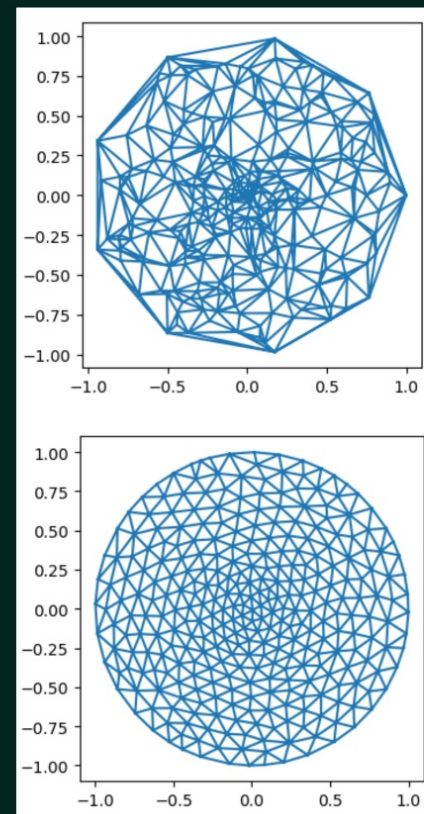
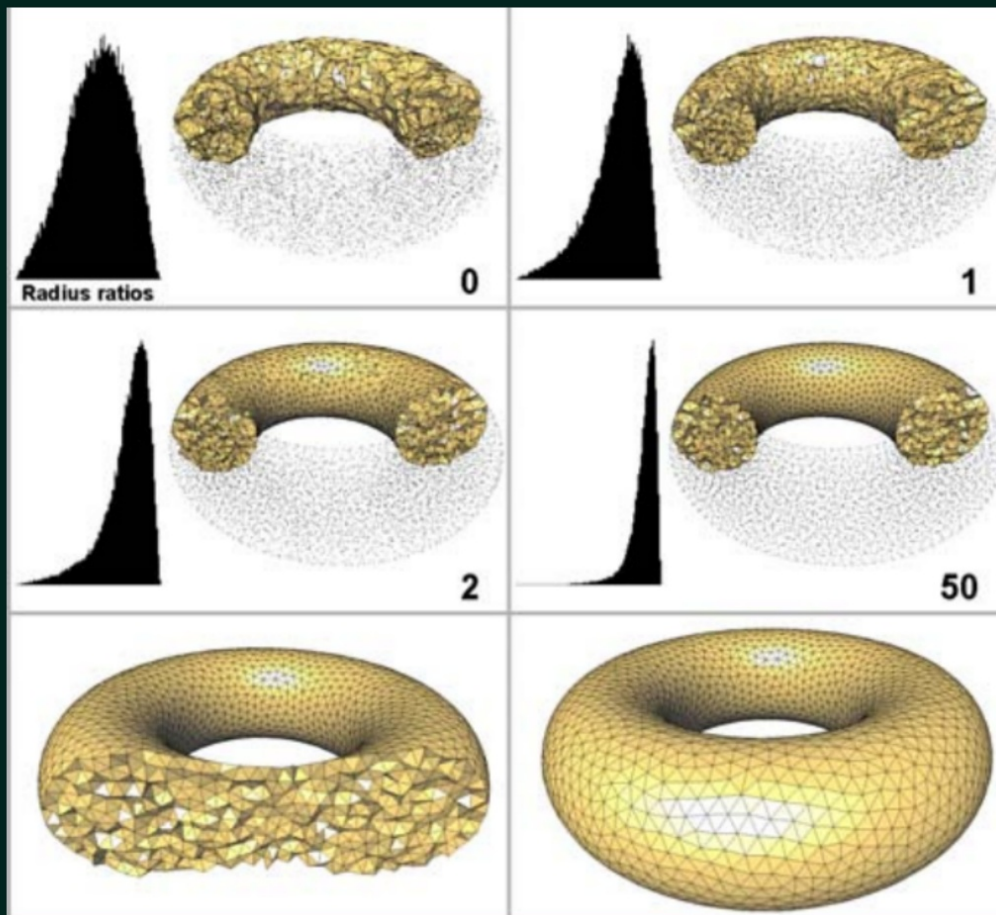
Határ kezelés menete

- A határ mentén sűrű segéd pontokat helyezünk el (quadrature pontok).
- Ezen pontok helyzetüktől függően különböző súlyokat kapnak.
- Megkeressük mely csúcsok vannak ezen pontokhoz legközelebb
 - Ezen csúcsok helyzetét a quadrature pontok határozzák meg
- Ha a csúcs egyikhez sem tartozik, akkor a már ismert módon változik a pozíciója.





Példa



Összefoglalva

- Az ODT algoritmus hatékony módszer Delaunay hálók optimalizálására
 - A háromszögek legkisebb szögének maximalizálásával
 - Elemek eloszlását is képes szabályozni
 - Viszont a határok kezelése problematikus

Összefoglalva

Optimalizáció

Optimal Delaunay Triangulation

Köszönöm a figyelmet!

Háromszög
hálók

Bevezetés