

3D Számítógépes Geometria II.

8. n-oldalú Bézier felületek

<http://cg.iit.bme.hu/portal/3dgeo2>

<https://www.vik.bme.hu/kepzes/targyak/VIIIAV16>

Dr. Várady Tamás, Dr. Salvi Péter
BME, Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Irányítástechnika és Informatika Tanszék



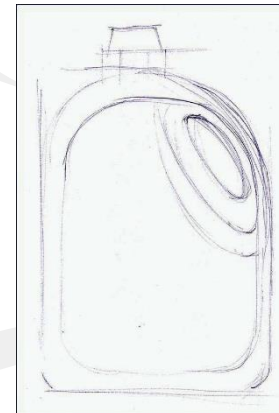
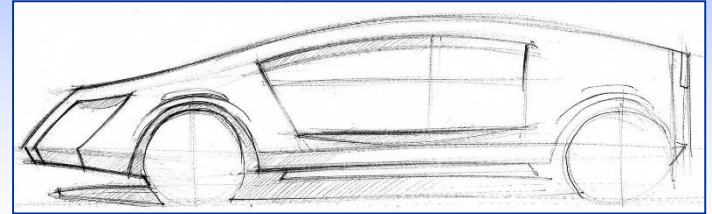
Tartalom

1. Bevezetés
2. n -oldalú Bézier patch-ek
3. Kontrollstruktúra
4. Domén és paraméterezés
5. A felület egyenlete
6. Súlyfüggvények
7. Fokszám emelés és csökkentés
8. Bézier ribbonok kombinációja
9. Példák, demó

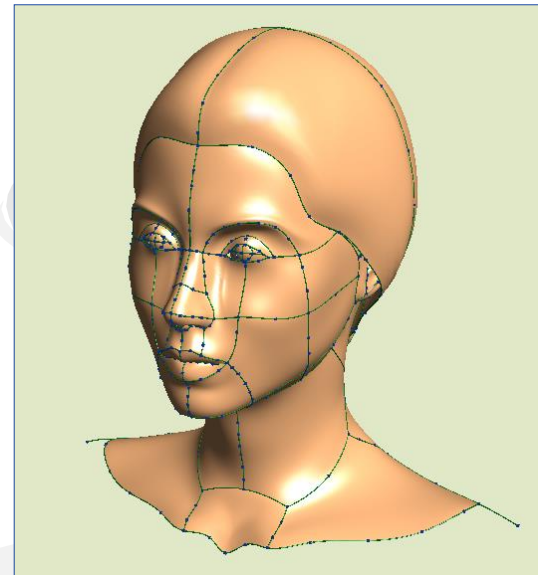
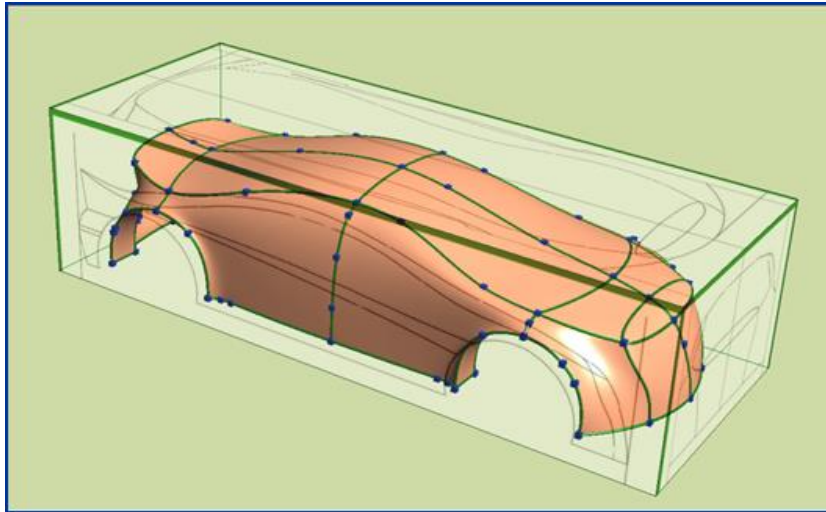
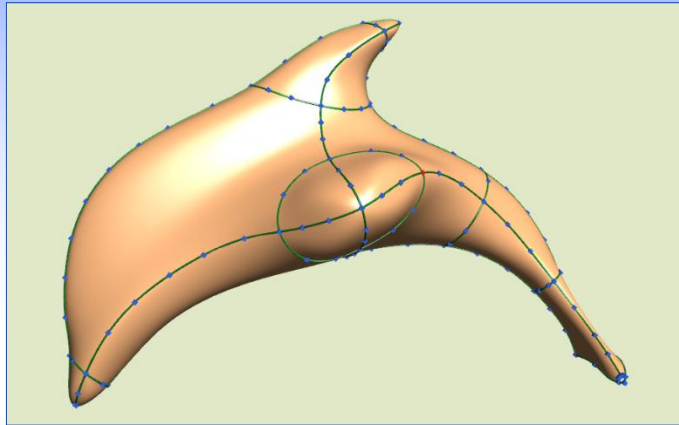
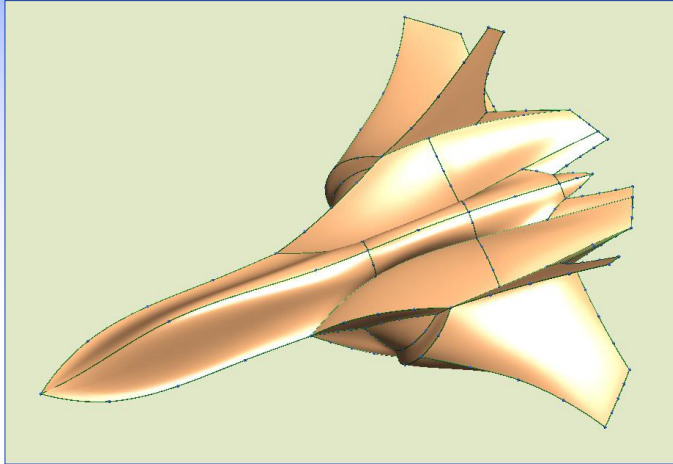
1.1.Motiváció

- Összetett szabadformájú objektumok modellezése
- Esztétikus forma – nagyon lényeges
- Modellezés kizárólag négyoldalú felületekkel – igen nehézkes

→ általános topológiájú
felület-modellezés

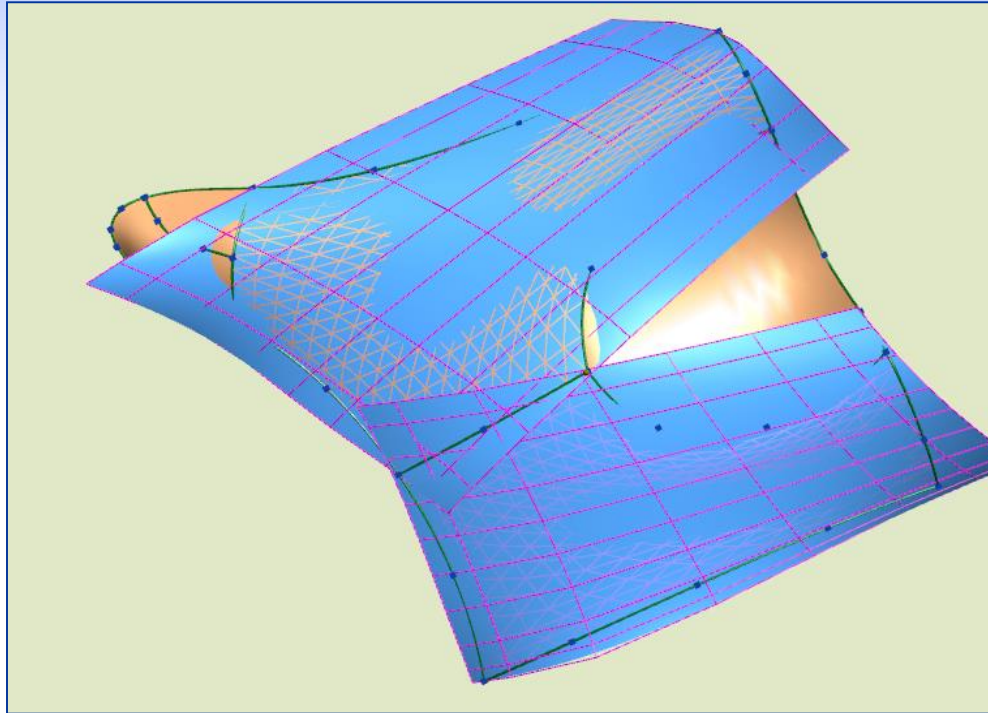


1.2.Általános topológiájú felületek



n -oldalú patch-ek, n -fokú csúcsok, T-node-ok; sima kapcsolódás

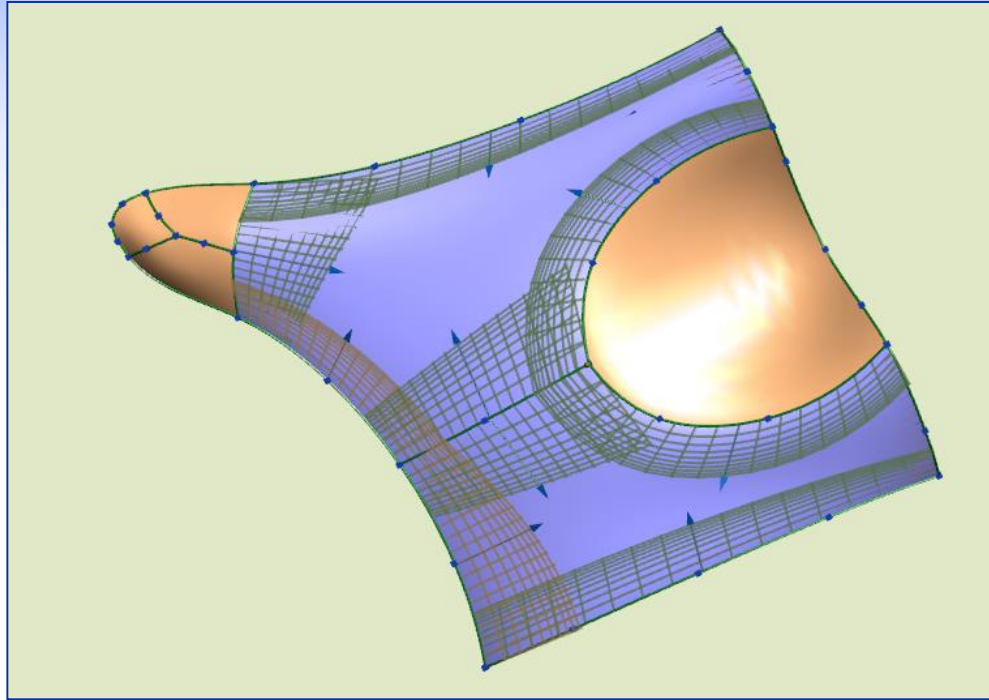
1.3. Trimmelt négyoldalú felületek



(trimmelt =
visszavágott)

- CAGD szabványok: tenzor szorzat felületek (Bézier, B-spline)
- n -oldalú felületek modellezése igen nehézkes
- határgörbék interpolációja és sima kapcsolódás biztosítása nehezen megoldható

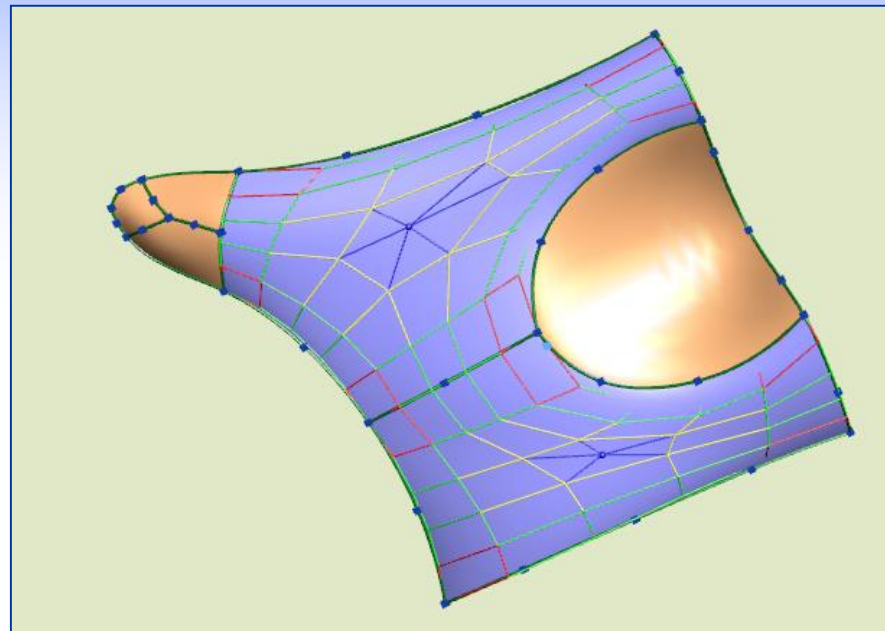
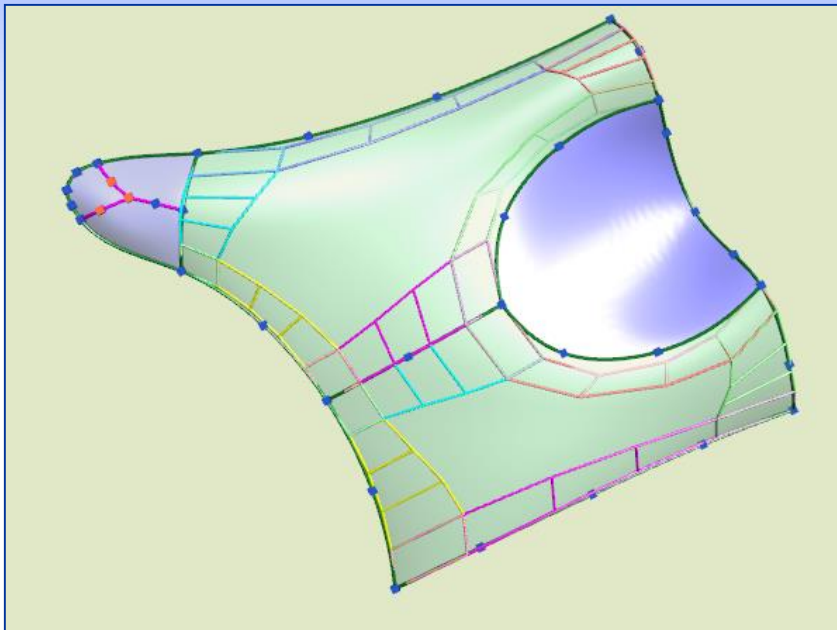
1.4. Transzfinit felületek



(watertight =
vízzáró)

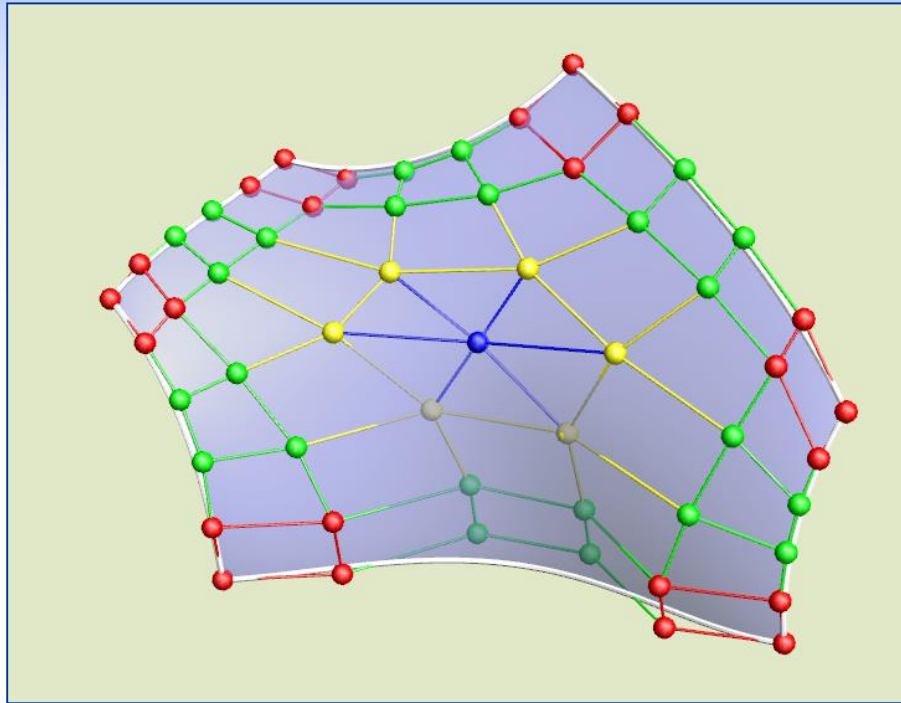
- határgörbék és keresztderiváltak interpolációja; „watertight” kapcsolódás
- nem szabványos reprezentáció
- a felület belseje automatikusan kiadódik, de szükség lehet további módosításokra

1.5. n -oldalú Bézier felületek



- Bézier határgörbék és keresztderiváltak interpolálása
- illeszkedés a négyoldalú Bézier patch-ekhez
- „watertight” kapcsolódás; a felület belseje automatikusan keletkezik
- **editálás és optimalizálás** - speciális kontrollstruktúra
- nem szabványos reprezentáció

2.1. GB patch – általános, n -oldalú Bézier felület

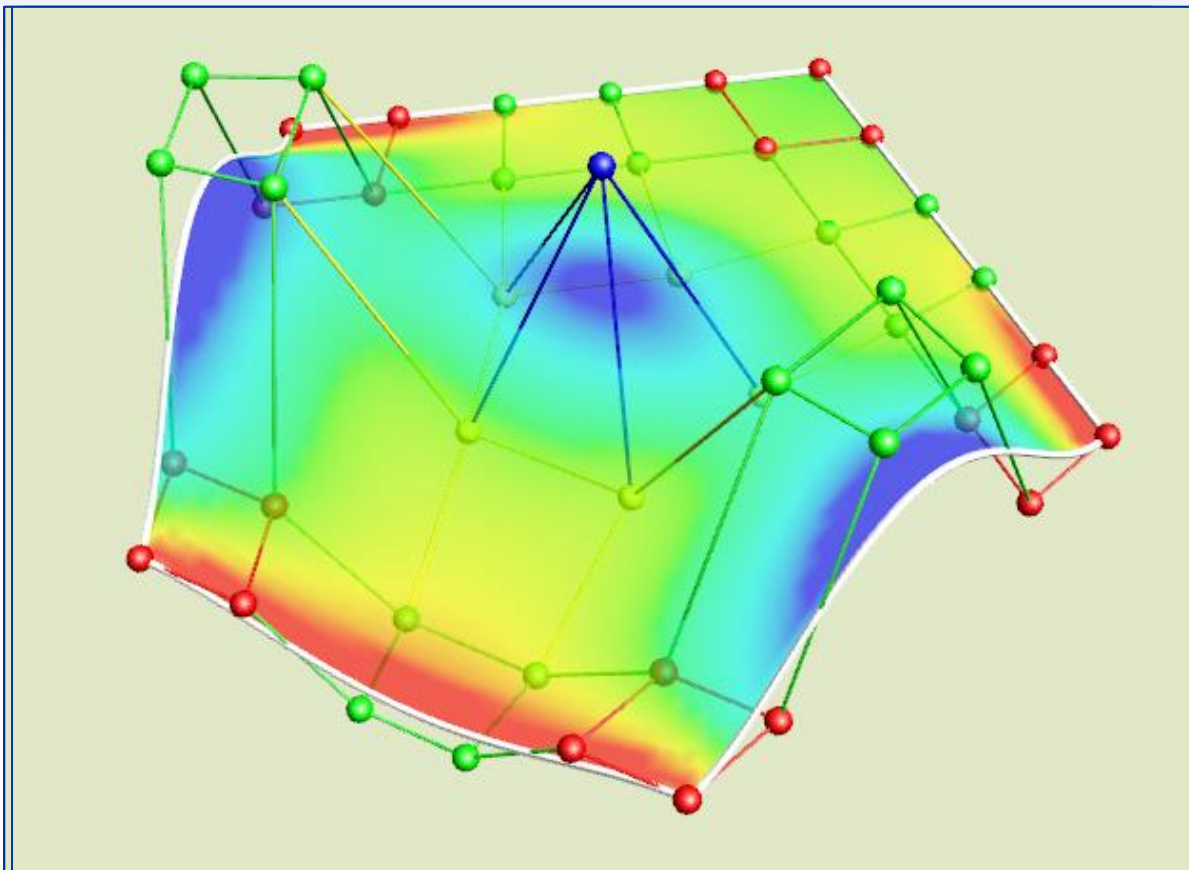


(GB =
Generalized Bézier)

($n=6$, $d=5$)

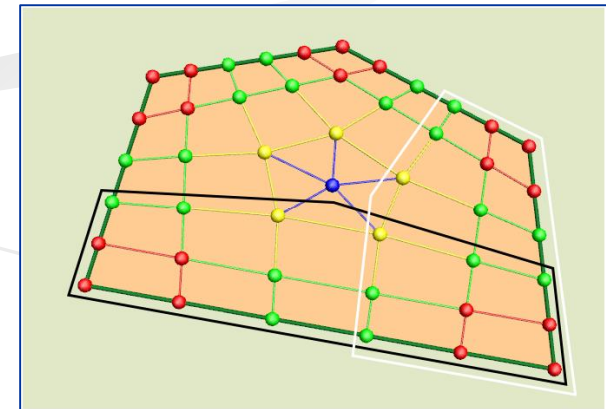
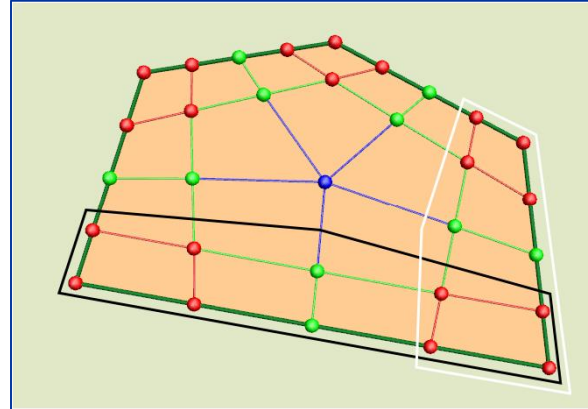
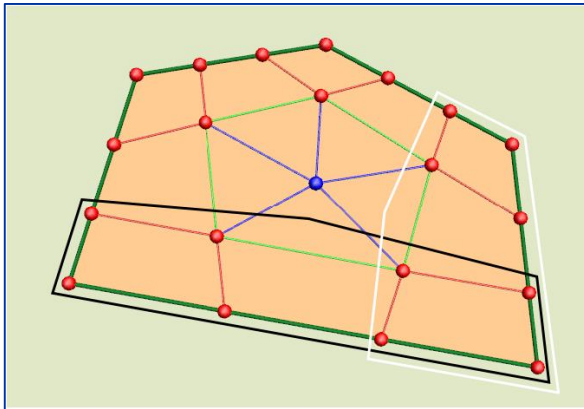
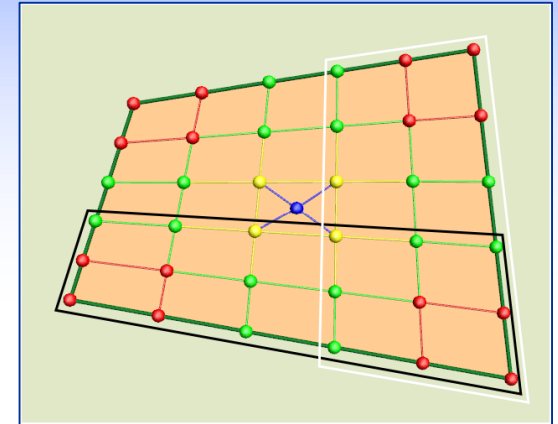
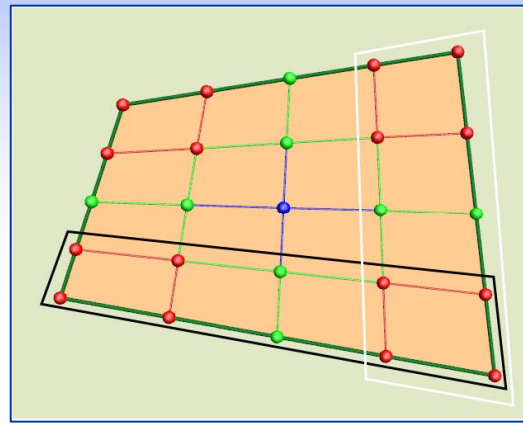
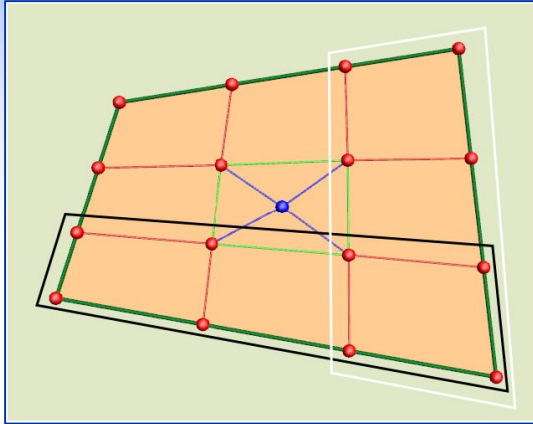
- n -oldalú kontrollstruktúra; $n \geq 3$; foksám: $d \geq 3$
- G^1 patch: Bézier határgörbék és keresztderiváltak
- Bézier ribbonok: az i -edik oldalhoz tartozó első két kontrollpont sor
- független középső kontrollpont (CCP)

2.2. Ribbonok és a középső felületelem



3.1. Kontrollstruktúra

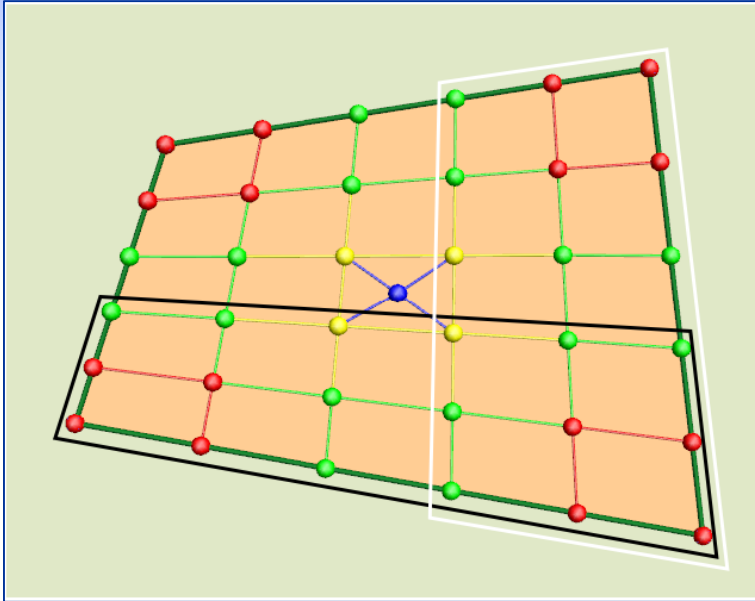
(layer = réteg,
CP = control point)



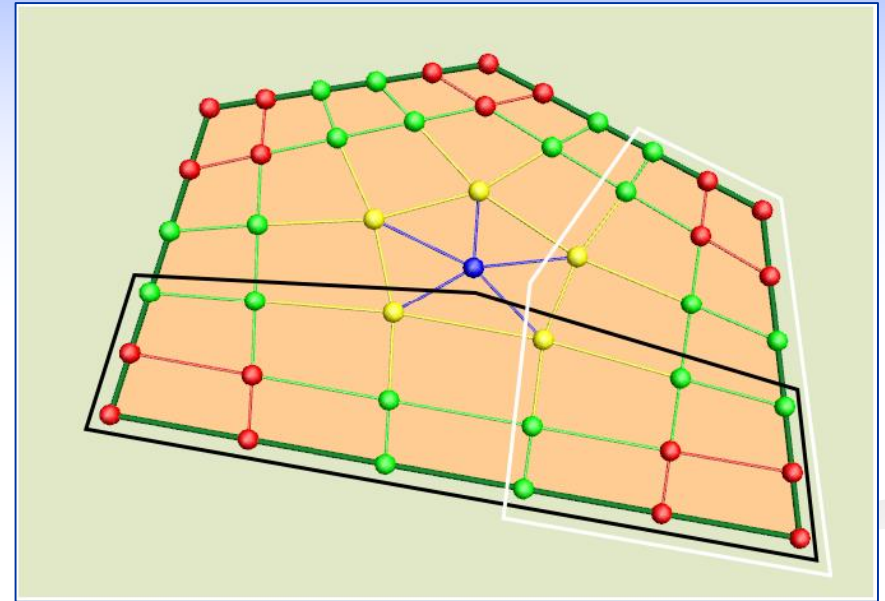
layer-ek száma: $d=3,4 \rightarrow l=2$; $d=5,6 \rightarrow l=3$; ..., $l=(d+1) \div 2$

CP-k száma: d - páros: $nl(l+1)+1$, d - páratlan: nl^2+1

3.2. Kontrollstruktúra



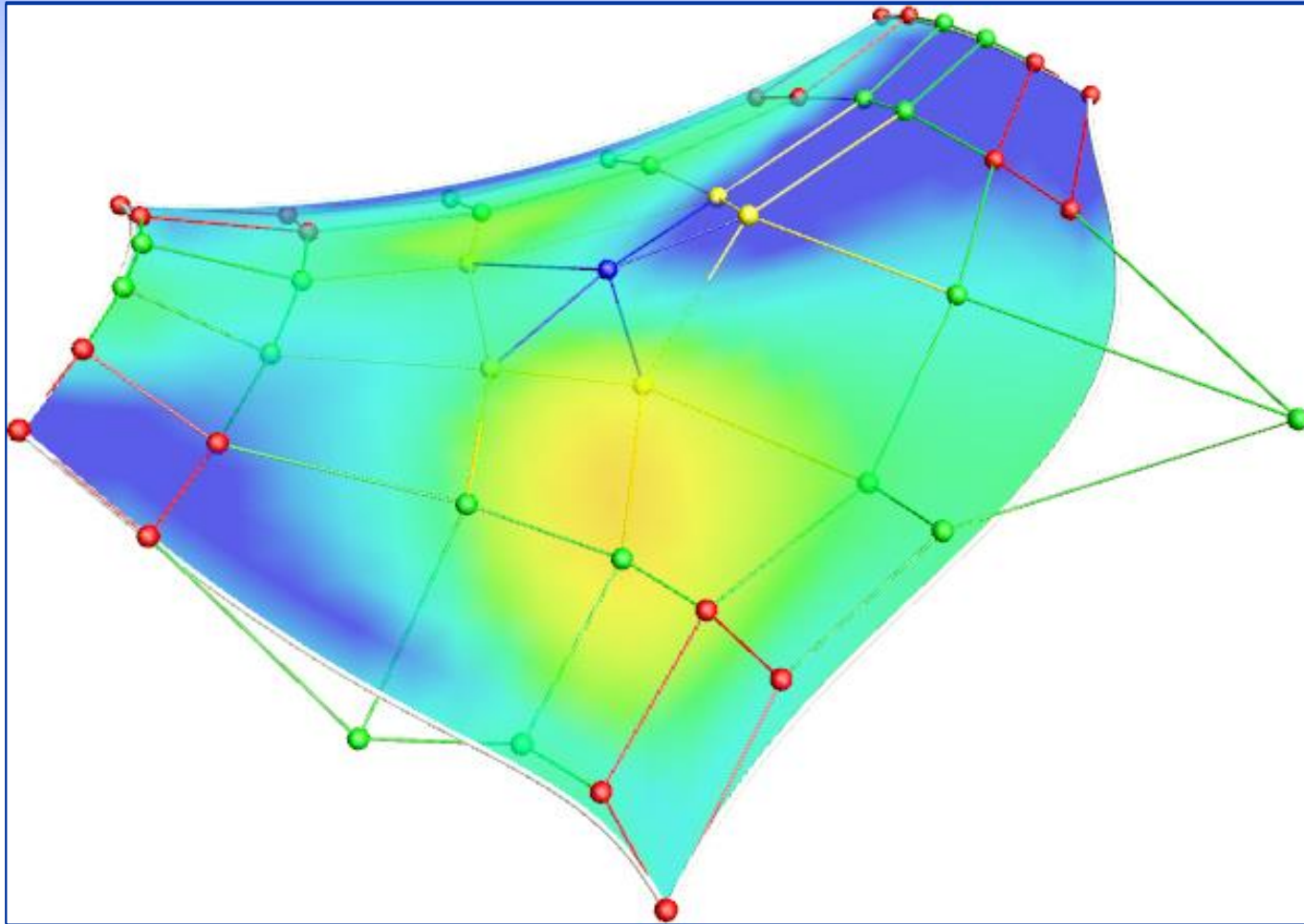
Négyoldalú patch



n -oldalú patch

- sarok kontrollpontok (piros) – az i -edik és az $i+1$ -edik oldalhoz tartoznak
- ribbon kontrollpontok (zöld) – csak az i -edik oldalhoz tartoznak
- belső kontrollpontok(sárga) – fokszám-emelés által keletkeznek
- középső kontrollpont (kék) – a felület belsejére hat

3.3. GB patch-ek editálása



Ugyanúgy, mint négyszoldalú patch-eknél

4.1. Általános baricentrikus koordináták

- Domén – n -oldalú szabályos poligon
- Minden belső pont megadható, mint a poligon csúcsainak súlyozott kombinációja
- Folytonos leképezés

$$(u, v) \Leftrightarrow [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$$

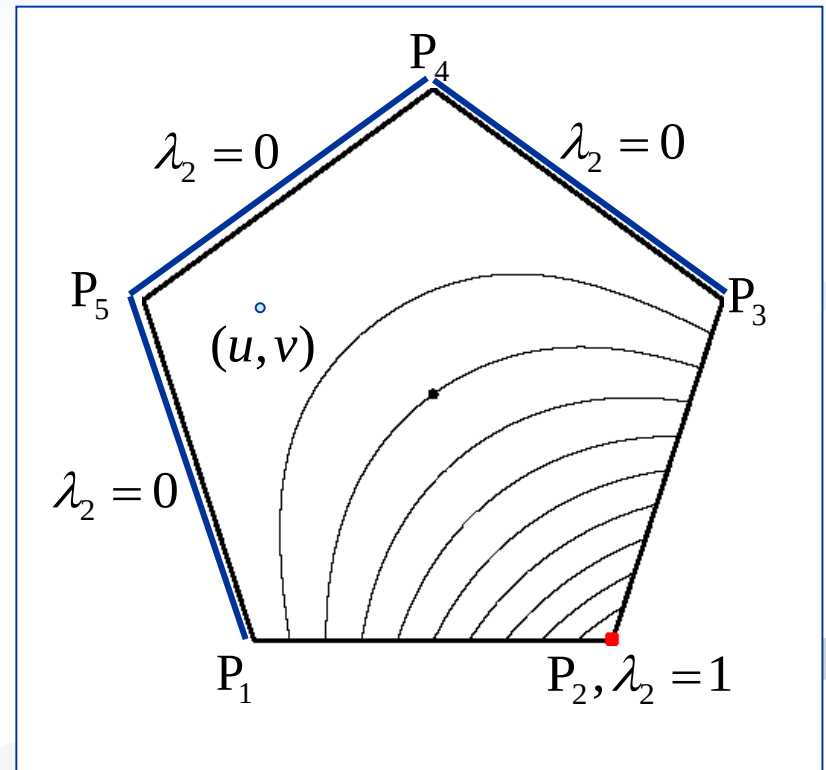
$$\lambda_i \geq 0 \quad [\text{positivity}]$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad [\text{partition of unity}]$$

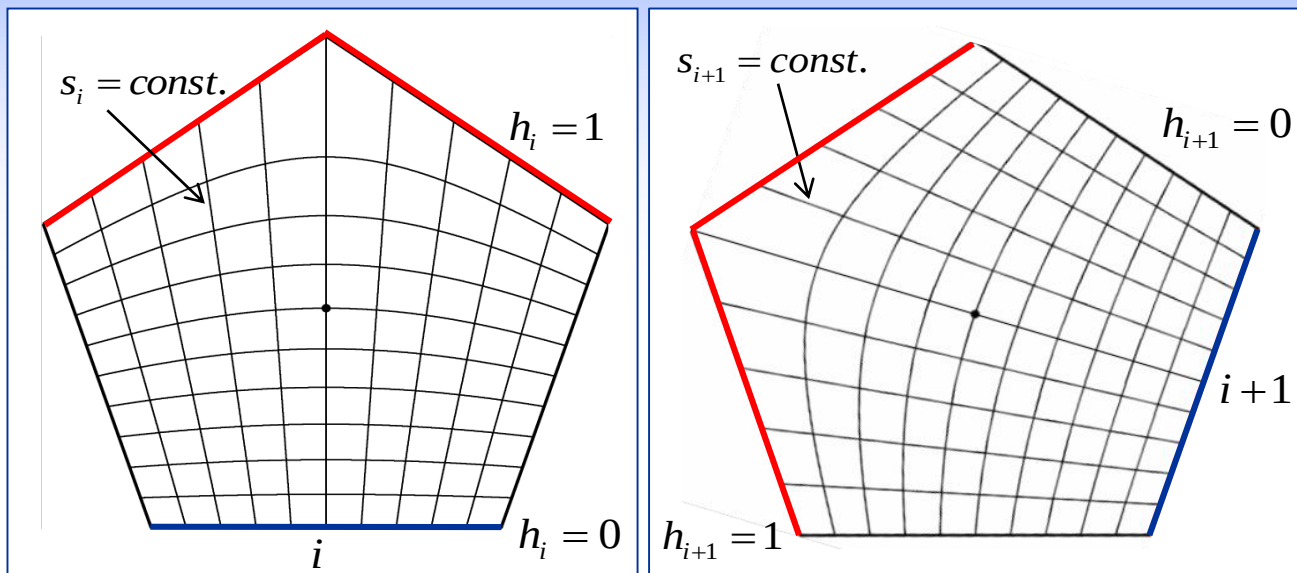
$$(u, v) = \sum_i \lambda_i(u, v) P_i \quad [\text{reproduction}]$$

$$\lambda_i(P_j) = \delta_{ij} \quad [\text{Lagrange property}]$$

- az i -edik koordináta az i -edik csúcsban 1 , máshol 0



4.2. Lokális koordináták – oldal és távolság paraméterek



- Minden oldalhoz tartozik egy oldal (s_i) és egy távolság (h_i) paraméter (Wachspress koordináták)

$$s_i(u, v) = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1} + \lambda_i}; \quad h_i(u, v) = 1 - \lambda_{i-1} - \lambda_i$$

- s_i lineáris az i -edik oldalon, $s_i = \text{const.}$ egyenes vonalak
- h_i nulla az i -edik oldalon, $h_i = 1$ a többi oldalon $j \neq i-1, i, i+1$

5.1. Az n -oldalú Bézier patch

Az i -edik ribbon egyenlete:

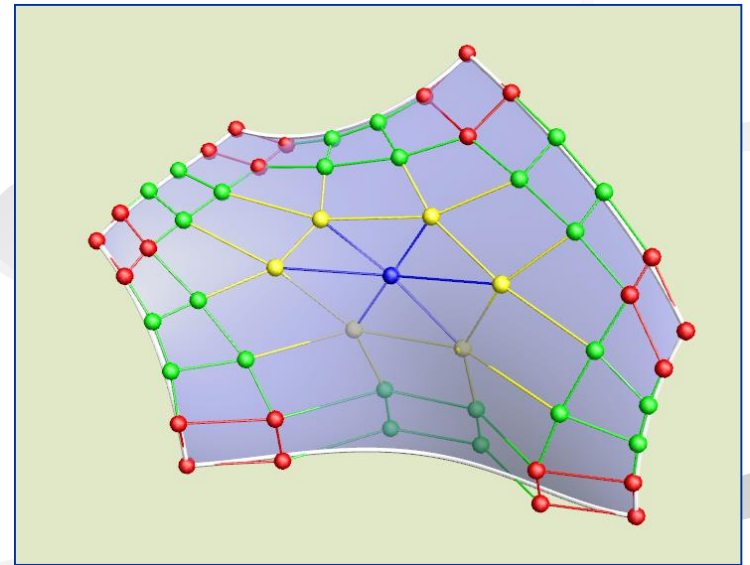
$$\mathbf{Rib}(s_i, h_i) = \sum_{j=0}^d \sum_{k=0}^{l-1} \mathbf{C}_{j,k}^{d,i} \mu_{j,k}^i B_{j,k}^d(s_i, h_i)$$

A felület egyenlete:

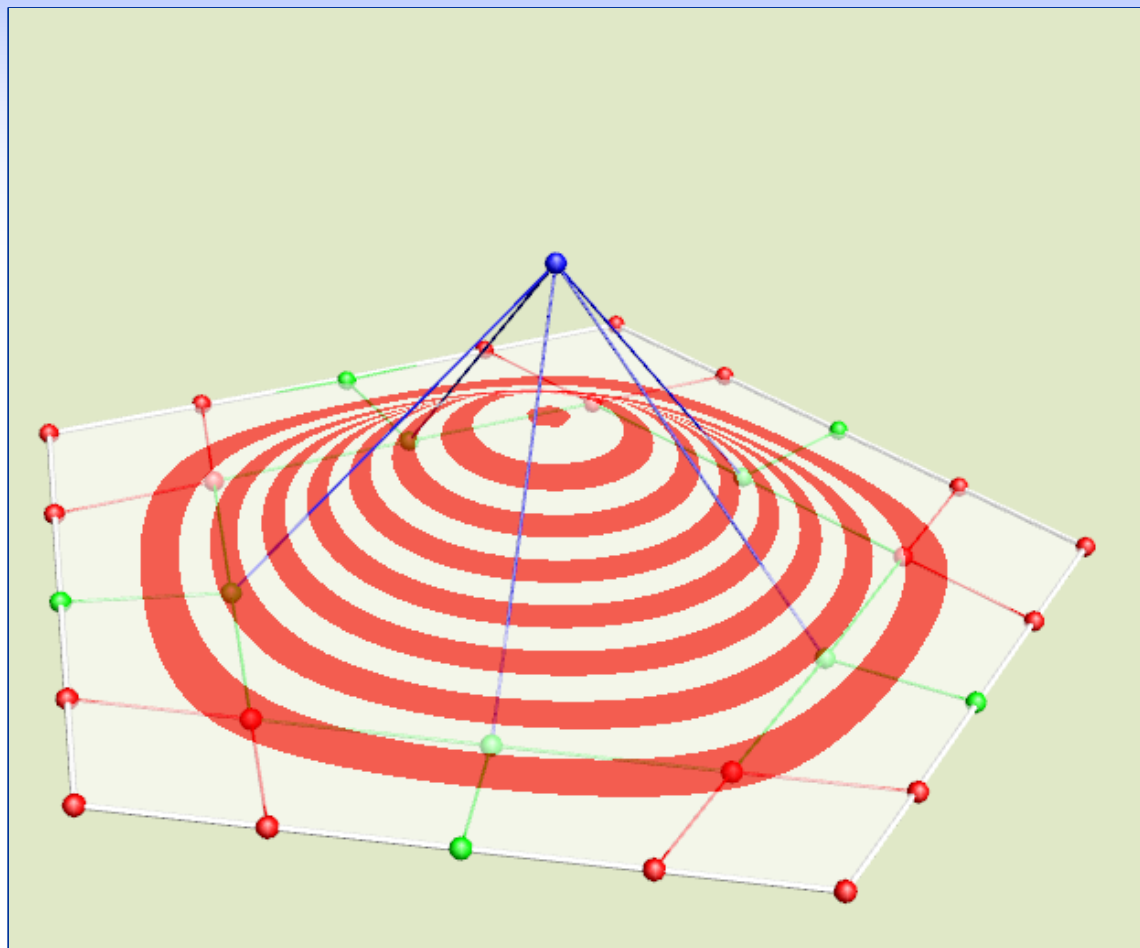
$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=1}^n \mathbf{Rib}(s_i, h_i) + \mathbf{C}_0 B_0(u, v)$$

- n - az oldalak száma
- d - degree
- l - a layer-ek száma
- $\mathbf{C}^{d,i}$ – az i -edik oldal kontrollpontjai
- B^d - kétváltozós Bernstein függvények
- μ^i - skalár szorzó

G^1 patch: reprodukálja a határgörbéket és a keresztderiváltakat, az első két kontrollpont sor alapján

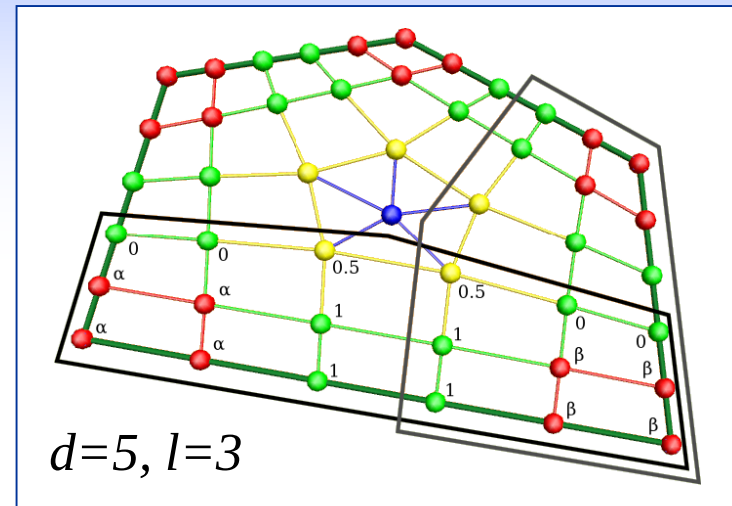
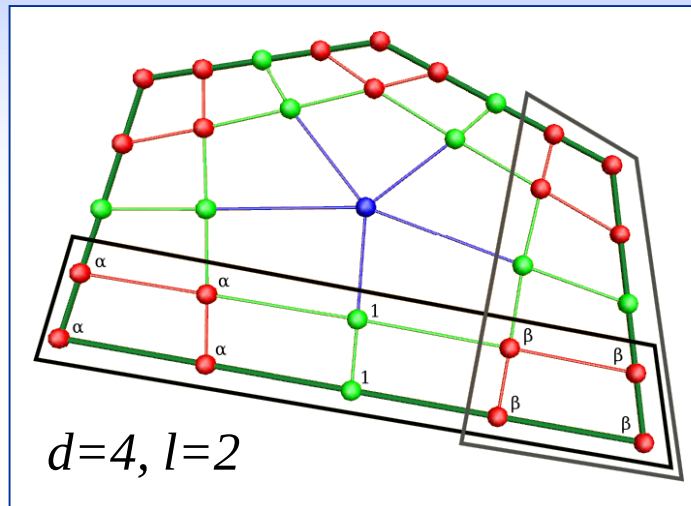


6.1. Súlyfüggvények



A polygonális domén felett: 1.-8. - kétváltozós Bernstein, 9. - súlyhiány

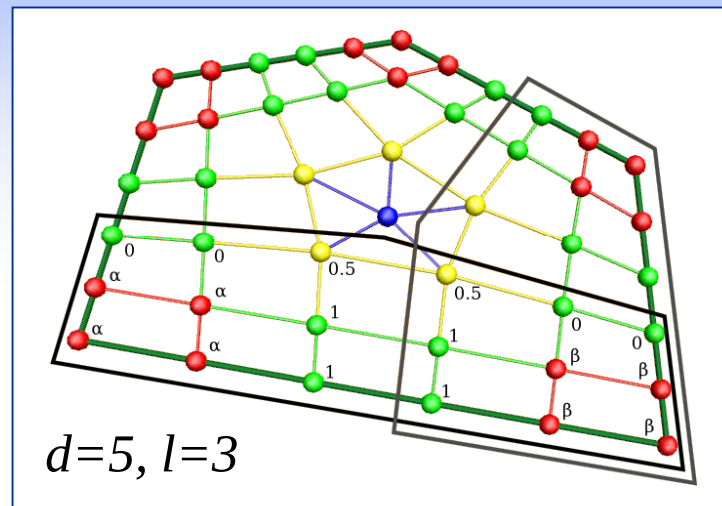
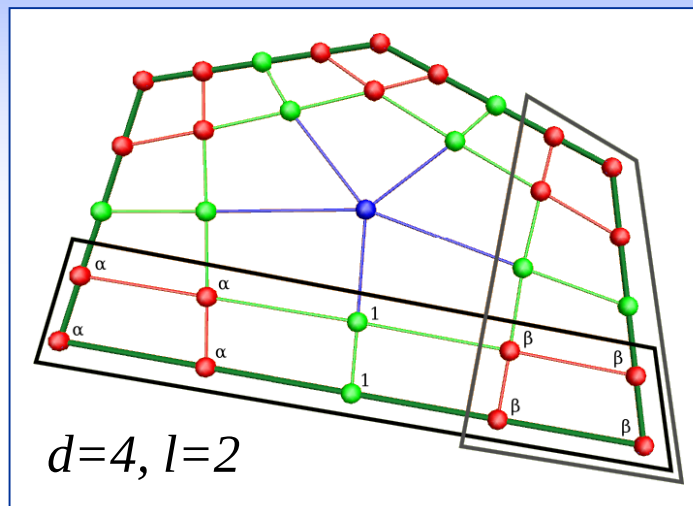
6.2. Súlyfüggvények az oldalak mentén



- a zöld és a belső sárga kontrollpontok szorzója egy kétváltozós Bernstein függvény:

$$B_{j,k}^d(s_i, h_i) = B_j^d(s_i) B_k^d(h_i); \quad B_j^d(s) = \binom{d}{j} (1-s)^{d-j} s^j$$

6.3. Súlyfüggvények a sarkokban



$$\mu_{j,k}^i : \{0, 0.5, 1, \alpha_i, \beta_i\}; \alpha_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}; \beta_i = \frac{h_{i+1}}{h_{i+1} + h_i}$$

- a piros kontrollpontokhoz két súlyfüggvény tartozik

$$\beta_i B_{j,k}^d(s_i, h_i) + \alpha_{i+1} B_{k,d-j}^d(s_{i+1}, h_{i+1})$$

- az i -edik határon $h_i = 0 \rightarrow \beta_i = 1; \alpha_{i+1} = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} = 0$

és a felületegyenlet leegyszerűsödik $B_{j,k}^d(s_i, 0)$

6.4. G^1 folytonosság

Az i -edik oldalon

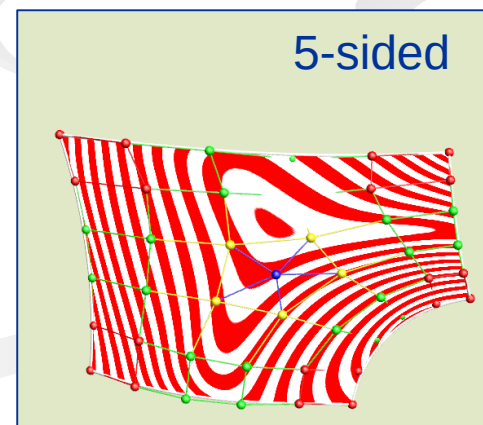
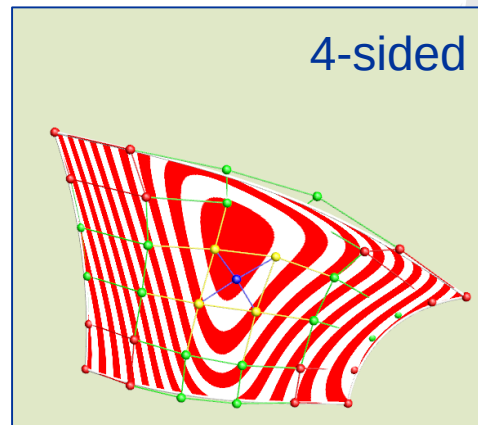
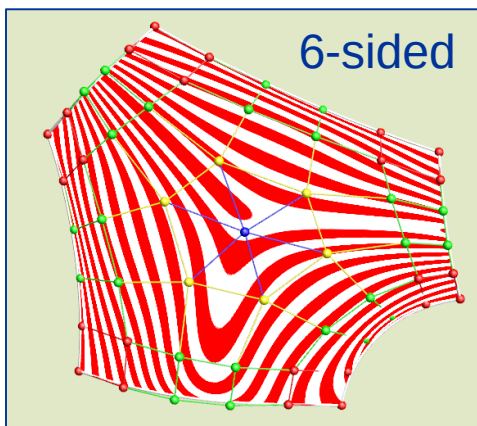
$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^d \sum_{k=0}^{l-1} \mathbf{C}_{j,k}^{d,i} \mu_{j,k}^i B_{j,k}^d(s_i, h_i) + \mathbf{C}_0 B_0(u, v)$$

- csak az i -edik Bézier határgörbe számít

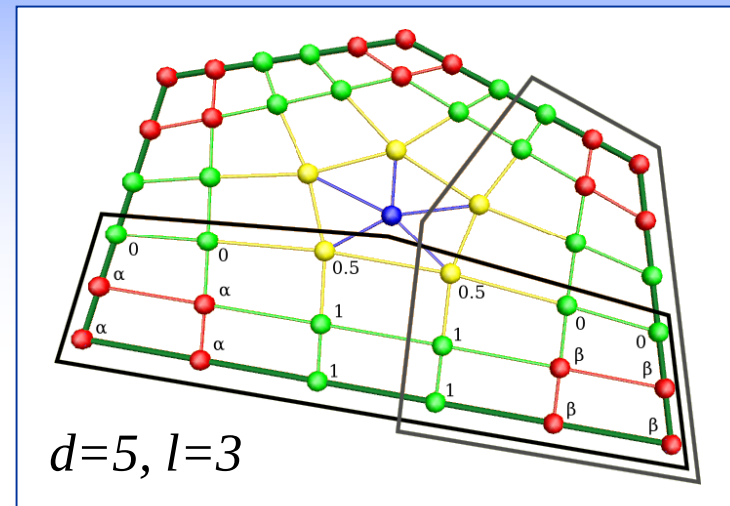
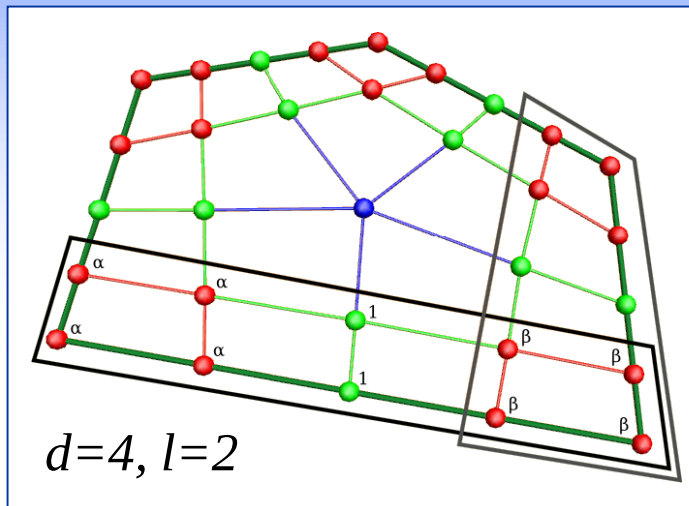
$$\mathbf{S}(u, v)|_{h_i=0} = \sum_{j=0}^d \mathbf{C}_{j,0}^{d,i} B_{j,0}^d(s_i, 0)$$

- az i -edik Bézier keresztderiváltat reprodukáljuk

$$\frac{\partial}{\partial h_i} \mathbf{S}(u, v)|_{h_i=0} = d \sum_{j=0}^d (\mathbf{C}_{j,1}^{d,i} - \mathbf{C}_{j,0}^{d,i}) B_{j,0}^d(s_i, 0)$$



6.5. Súlyfüggvény középén



- a súlyfüggvények összege

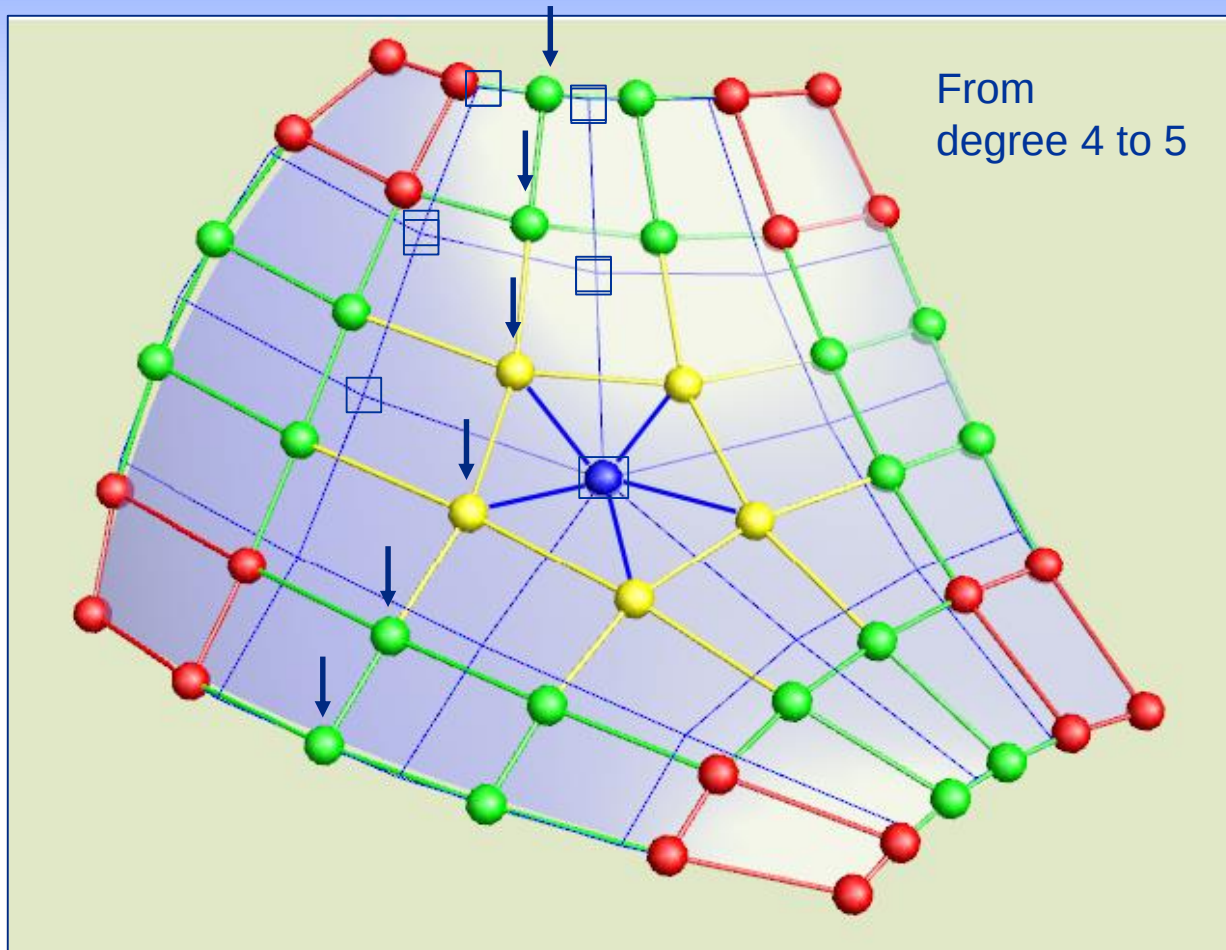
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^d \sum_{k=0}^{l-1} \mu_{j,k}^i B_{j,k}^d(s_i, h_i) \leq 1$$

- ha konvex kombinációt akarunk a súlyhiányt kompenzálni kell

$$B_0(u, v) = 1 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^d \sum_{k=0}^{l-1} \mu_{j,k}^i B_{j,k}^d(s_i, h_i)$$

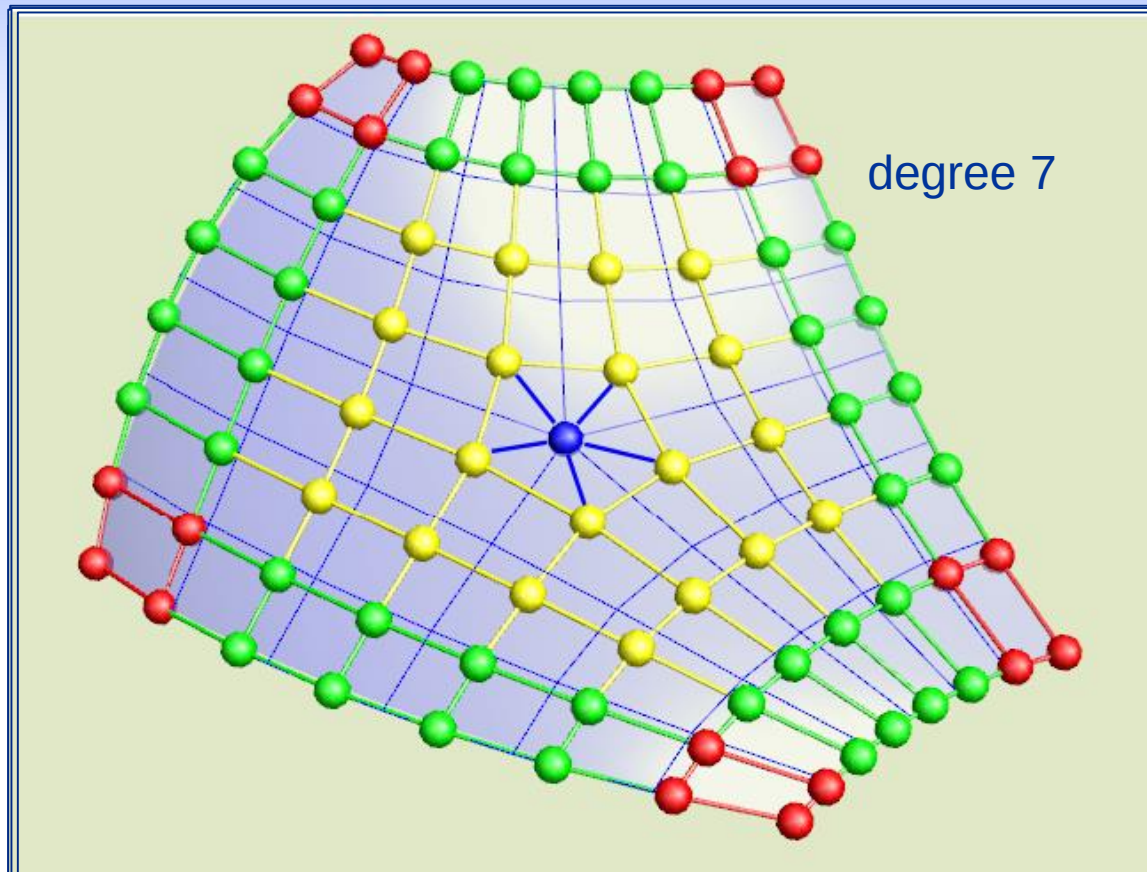
- a középső kontrollpont C_0 súlyfüggvénye
- segítségével a felület közepe tetszőlegesen editálható

7.1. GB patch-ek fokszám emelése



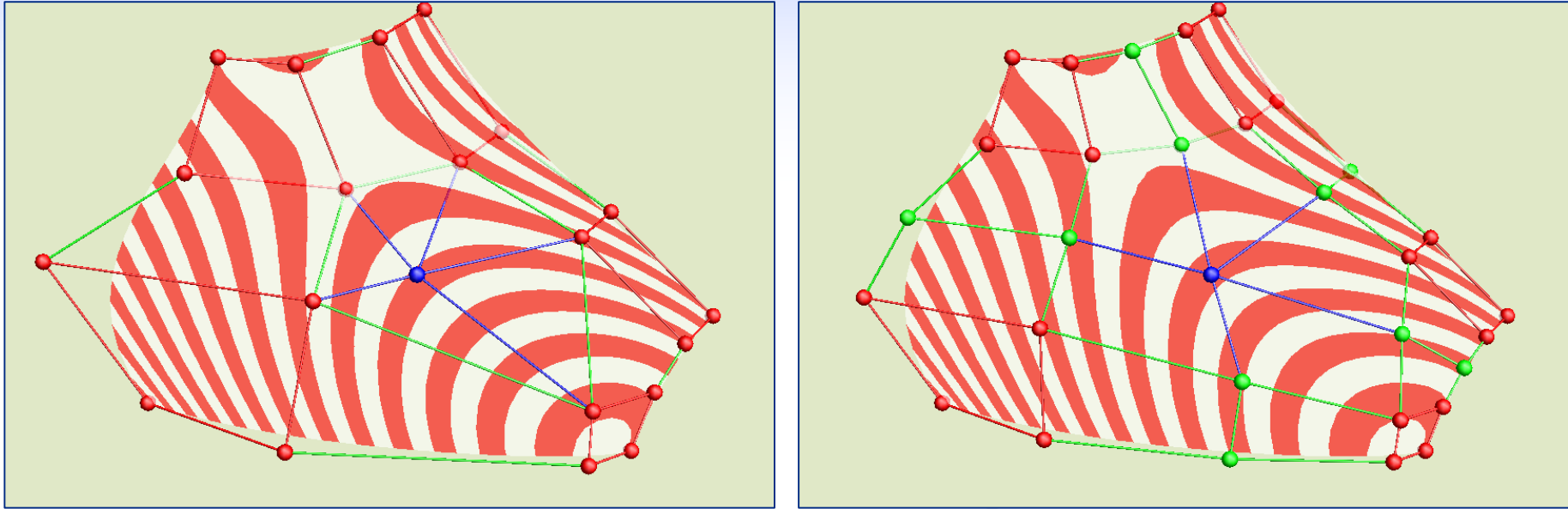
Új kontrollpontok keletkeznek a határok kontroll poligonjain és a struktúra belső négyszögeinek belsejében

7.2. GB patch-ek fokszám emelése



$d = 4$ -től $d = 10$ -ig

7.3. GB patch-ek foks szám emelése



A foks szám emelés pontosan rekonstruálja a határgörbéket és a keresztderiváltakat, de a patch belsejét csak közelítő értelemben

8.1. A displacement elv

(Displacement =
eltolás)

Görbék megadásának egy új felírása: a végpontbeli kényszerek és a görbe belső része különválnak

$$r(u) = r_B(u) + r_D(u)$$

$r_B(u)$ – alap (base) görbe: interpolálja a végponti pozicionális és tangenciális kényszereket (mindig harmadfokú)

$$r_B(0) = r(0), r_B(1) = r(1), \dot{r}_B(0) = \dot{r}(0), \dot{r}_B(1) = \dot{r}(1)$$

$r_D(u)$ – eltolás (displacement) görbe: változatlanul hagyja a végponti pozicionális és tangenciális kényszereket, és beállítja a görbe belsejét (tetszőleges fokszám)

Felületekre hasonlóképpen:

$$S(u, v) = S_B(u, v) + \sum_{i=1}^n S_{D_i}(u, v) + S_I(u, v)$$

8.2. A displacement elv - példa

Adott egy negyedfokú Bézier görbe: $r(u) = \sum_{i=0}^4 Q_i^4 B_i^4(u)$

Harmadfokú base-görbe, fokszámcsökkentés után:

$$r_B(u) = \sum_{i=0}^3 C_i^3 B_i^3(u);$$

$$C_0^3 = Q_0^4, C_1^3 = Q_0^4 + \frac{4}{3}(Q_1^4 - Q_0^4), C_2^3 = \dots, C_3^3 = Q_4^4,$$

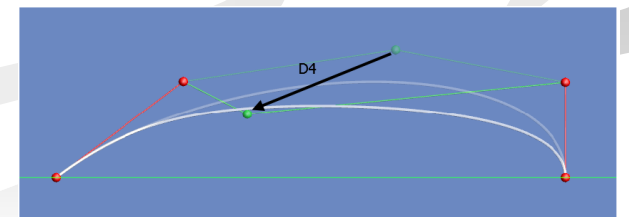
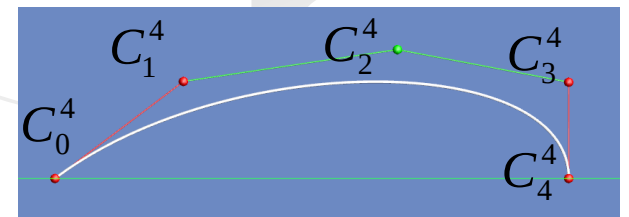
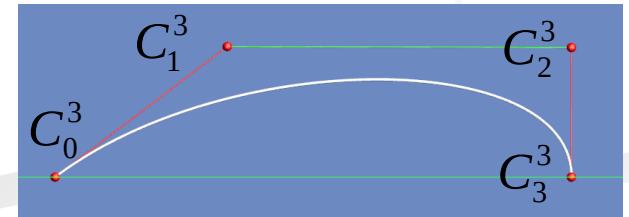
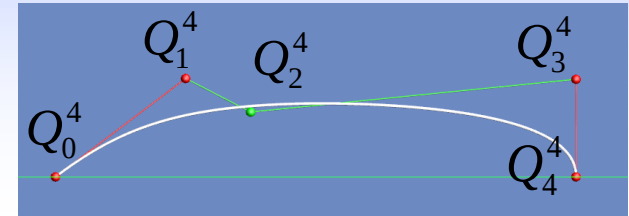
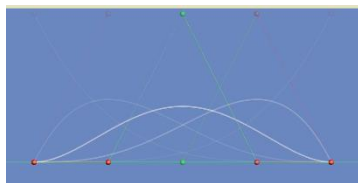
Negyedfokú base-görbe fokszámemelés után:

$$r_B(u) = \sum_{i=0}^4 C_i^4 B_i^4(u);$$

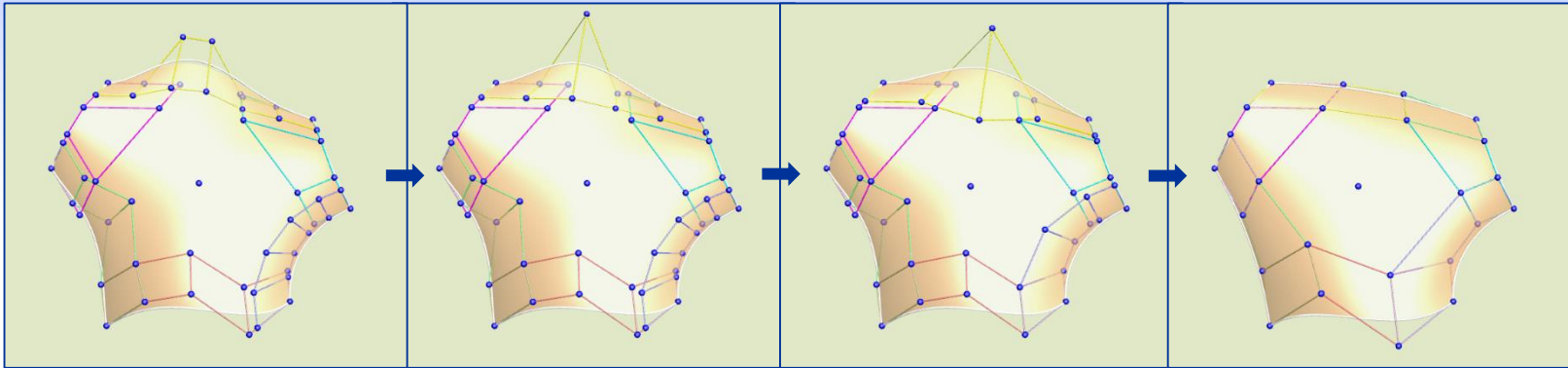
$$C_i^4 = Q_i^4, i = 0, 1, 3, 4; C_2^4 = \frac{1}{2}(C_1^3 + C_2^3) \neq Q_2^4.$$

Displacement vektor és displacement-görbe (nem hat a végpontokban):

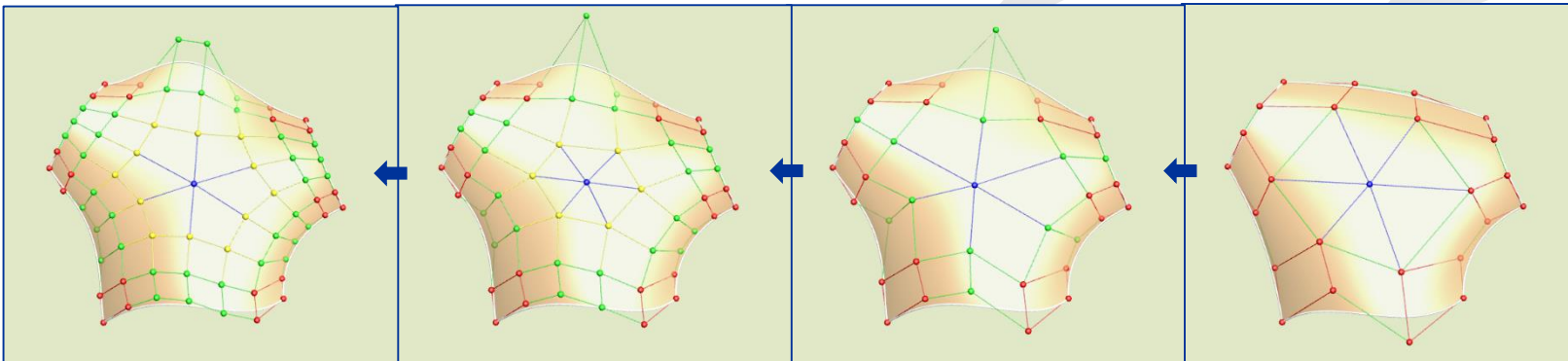
$$D_2^4 = Q_1^4 - C_2^4; r_D(u) = D_2^4 B_2^4(u)$$



8.3. Különböző fokszámú Bézier ribbonok kombinációja

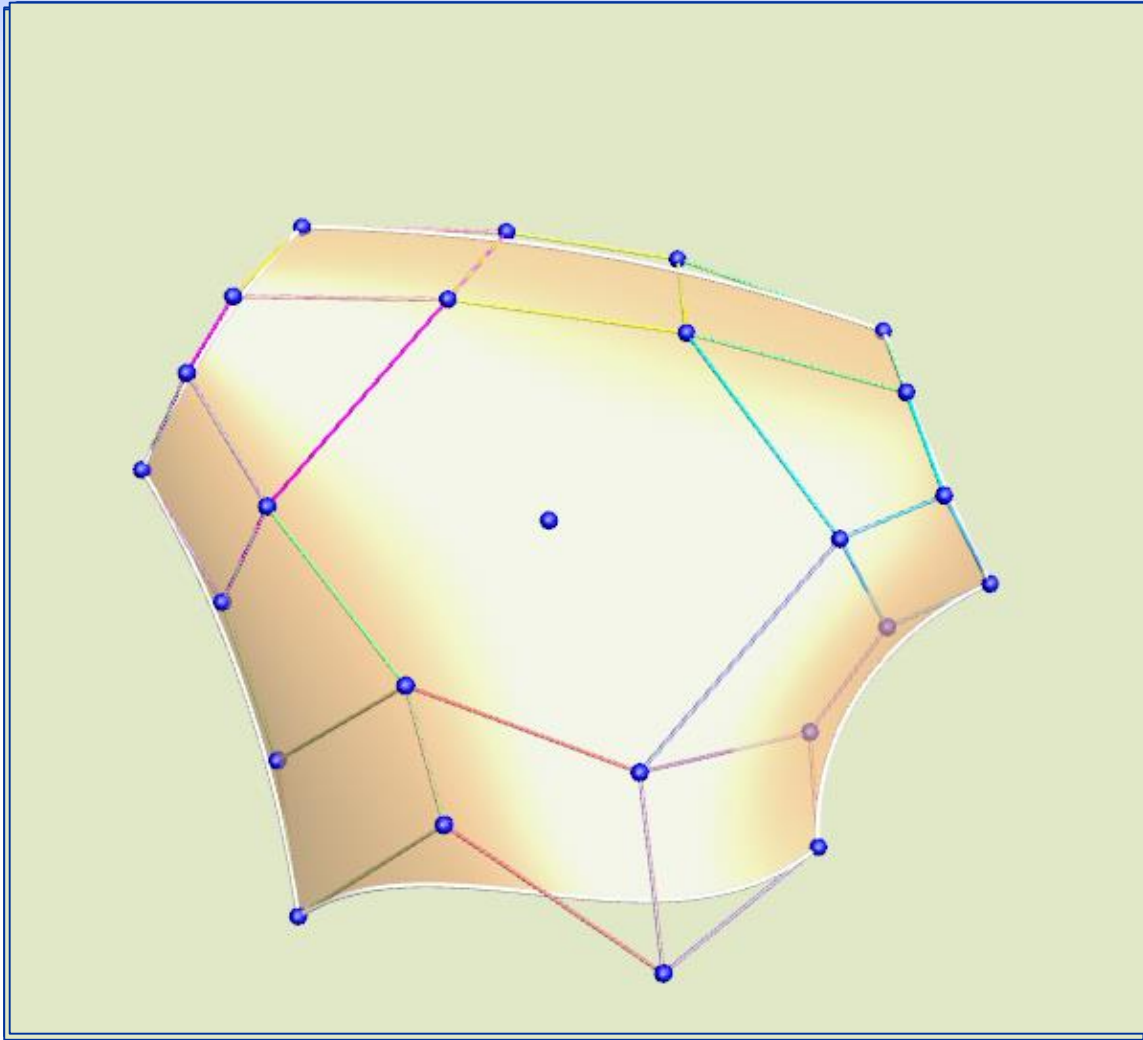


Fokszám csökkentés (ribbonok): *max. fokszám* $6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3$

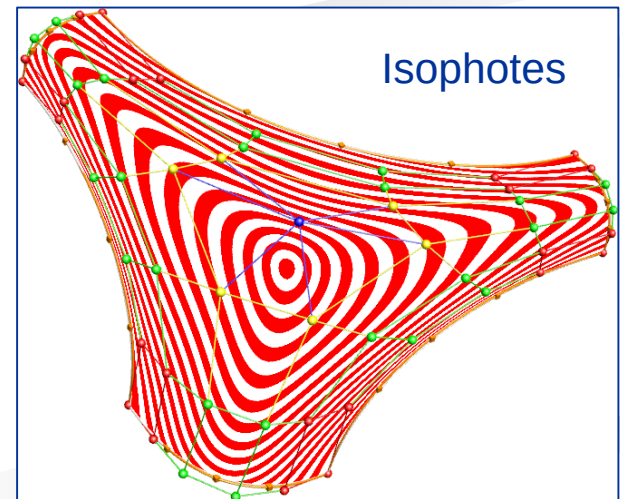
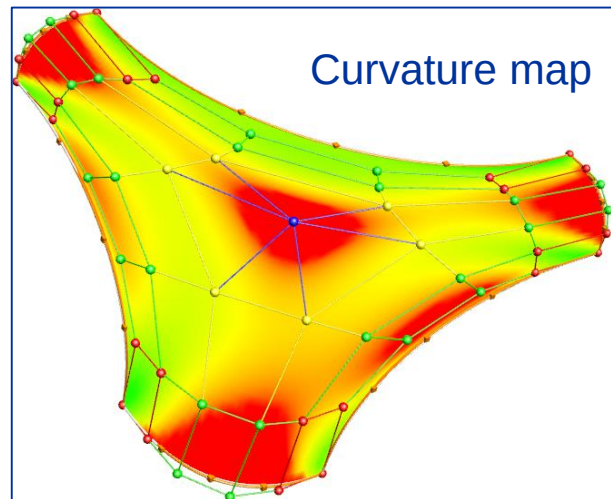
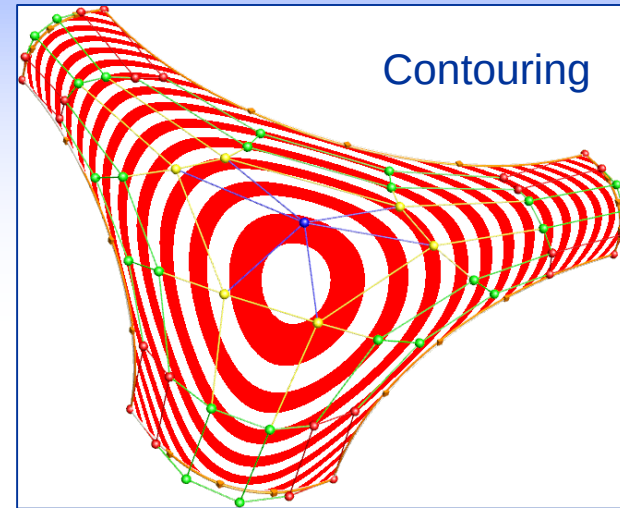
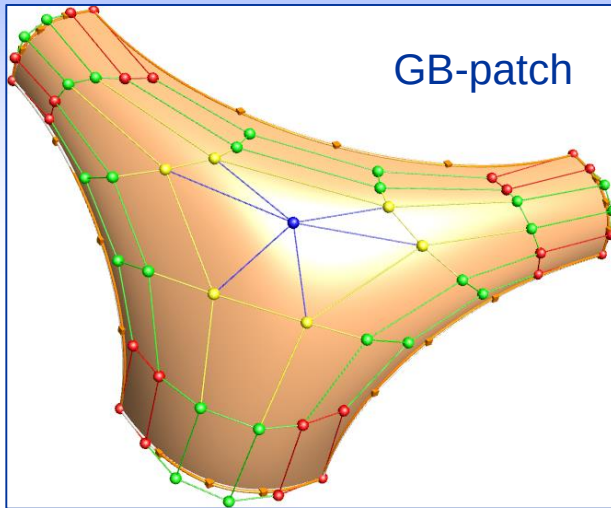


Fokszám emelés és korrekció (patchek): *közös fokszám* $6 \leftarrow 5 \leftarrow 4 \leftarrow 3$

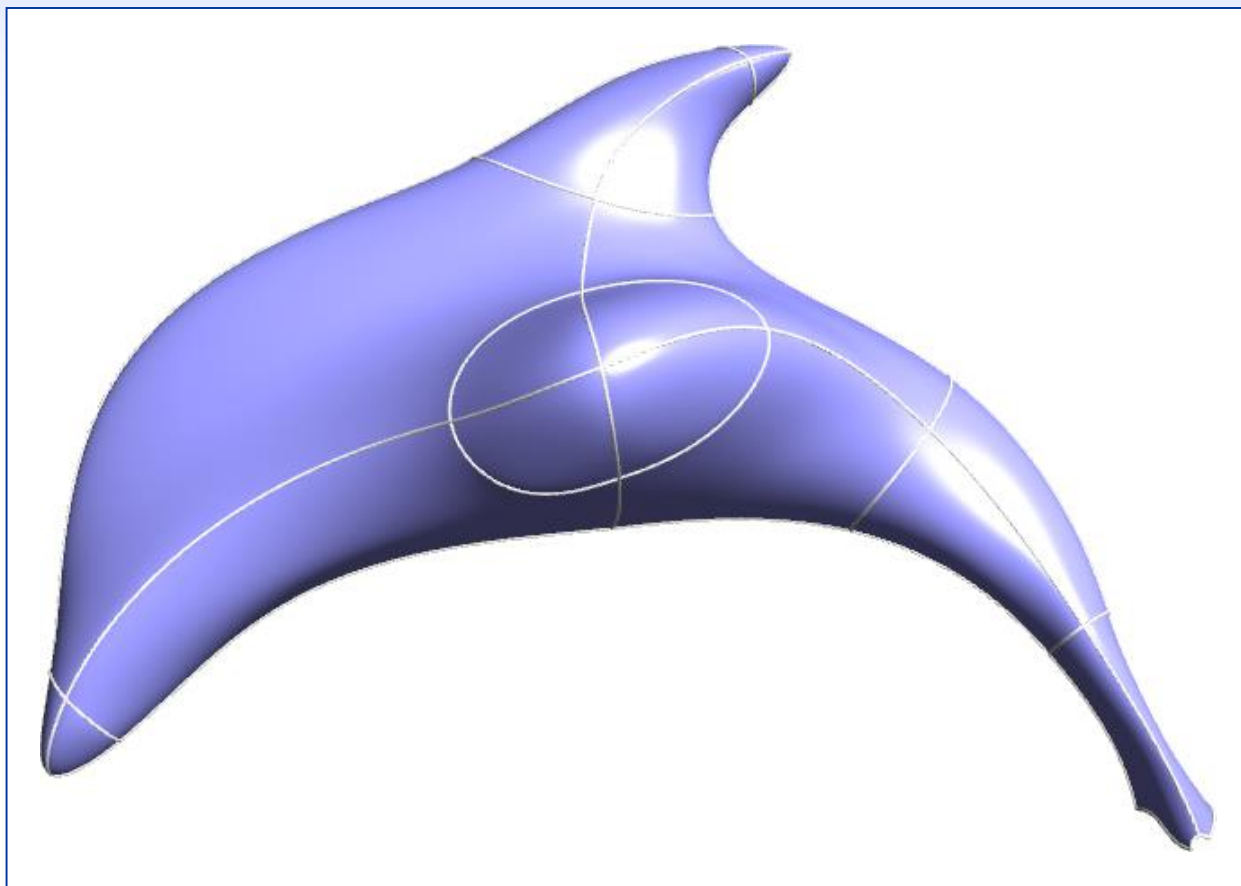
8.4. Különböző fokszámú Bézier ribbonok kombinációja



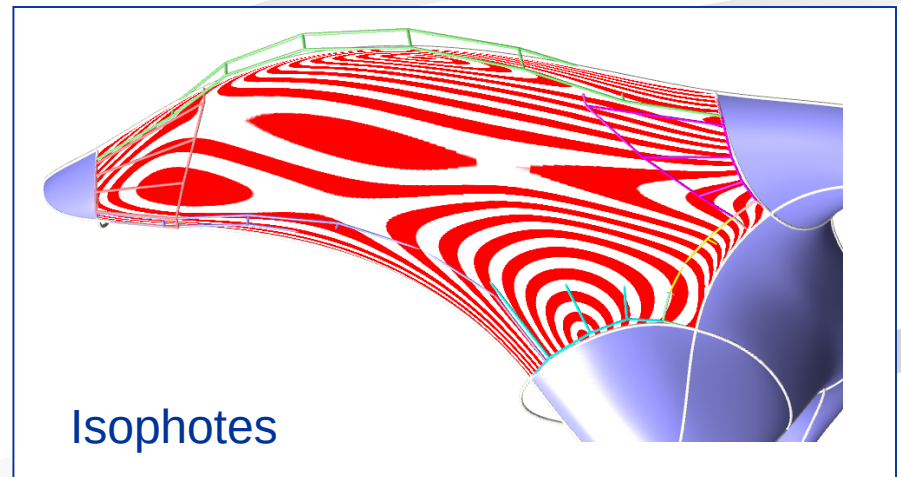
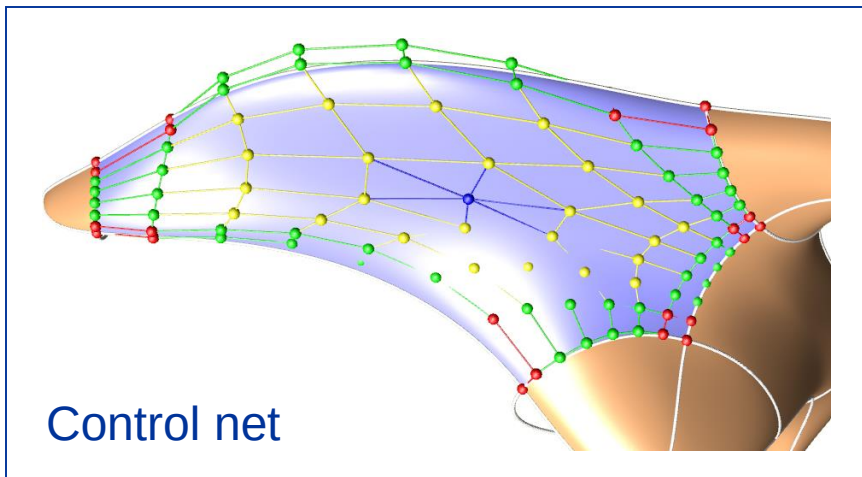
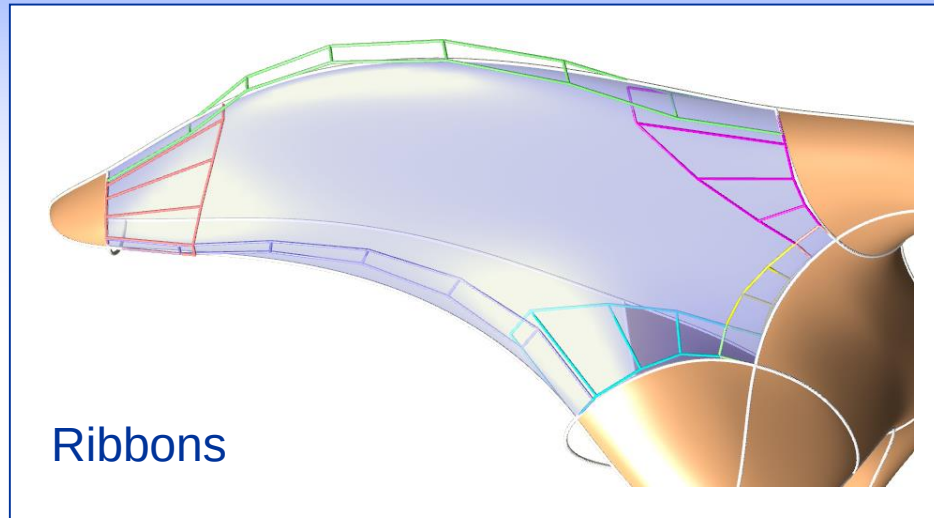
9.1. Példák – setback vertex blend



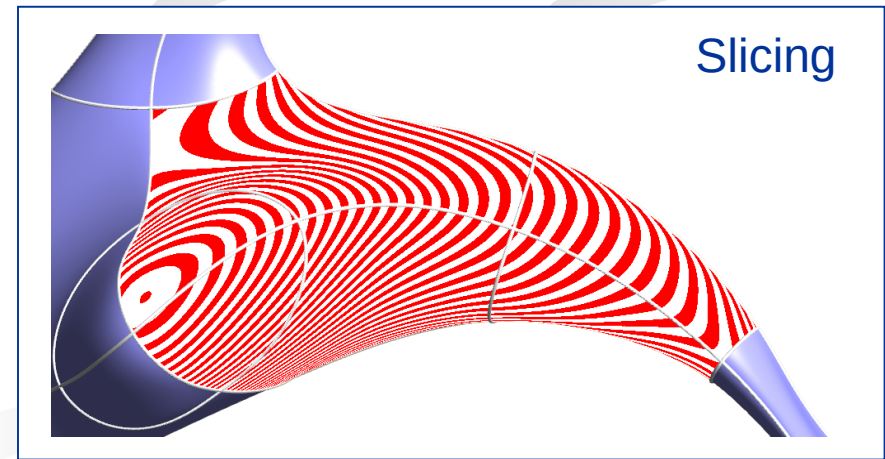
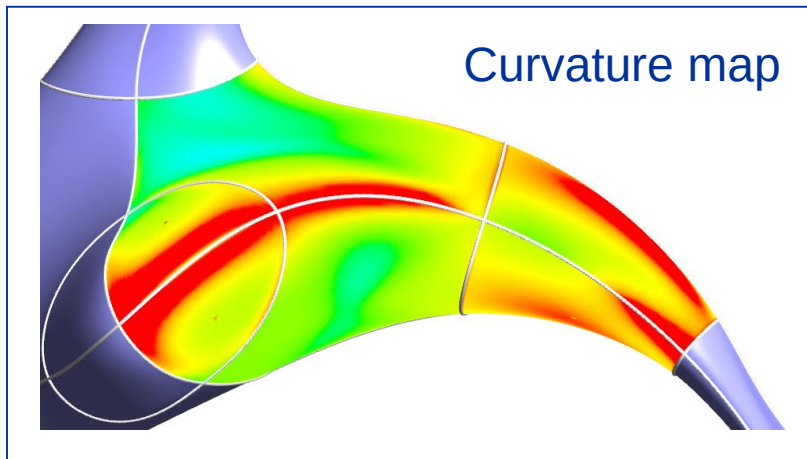
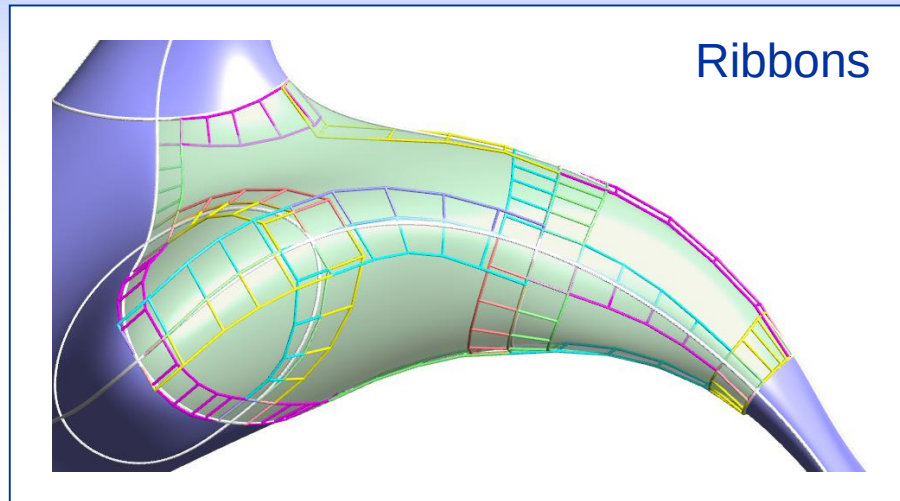
9.2. Példák – delfin modell



9.3. Példák – 6-oldalú GB patch



9.4. Példák – szomszédos patch-ek



9.5. Példák – arc modell

