

3D-s baricentrikus koordináták

Szijártó András

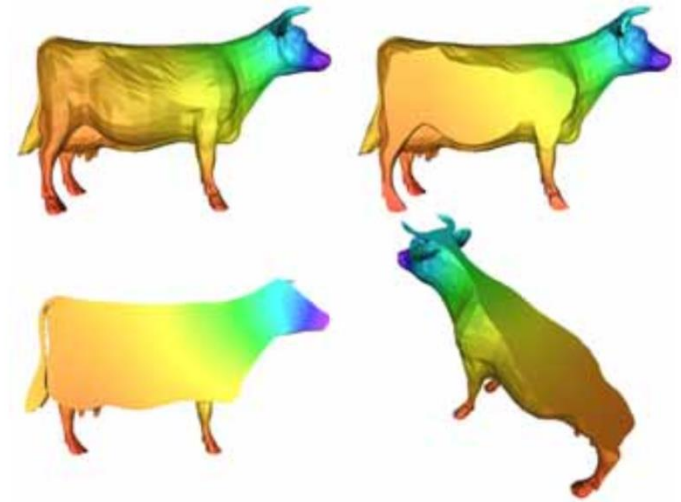
2016

Tartalom

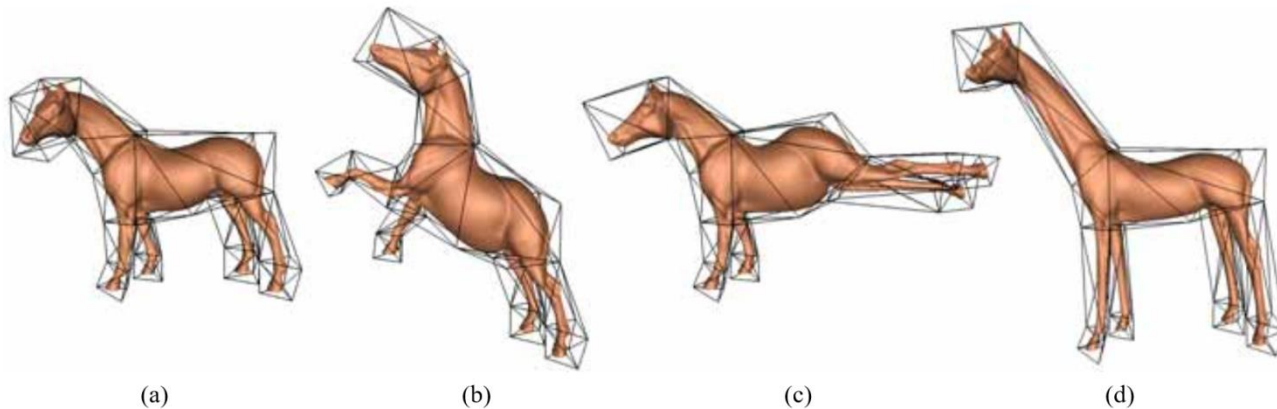
- 1) Általános baricentrikus koordináták $3D$ -ben
- 2) Mean Value koordináták $3D$ -ben
- 3) Mean Value koordináták N -oldalú lapokkal
- 4) Alkalmazások I. (interpoláció)
- 5) Alkalmazások II. (deformáció)

Motiváció

- Háromszöghálók paraméterezése és síkba terítése
- Skalár- és vektorfüggvények interpolációja
- Alakzatok és képek deformációja
- Animálás



3D RGB interpoláció [5]



3D alakzat deformálás [5]

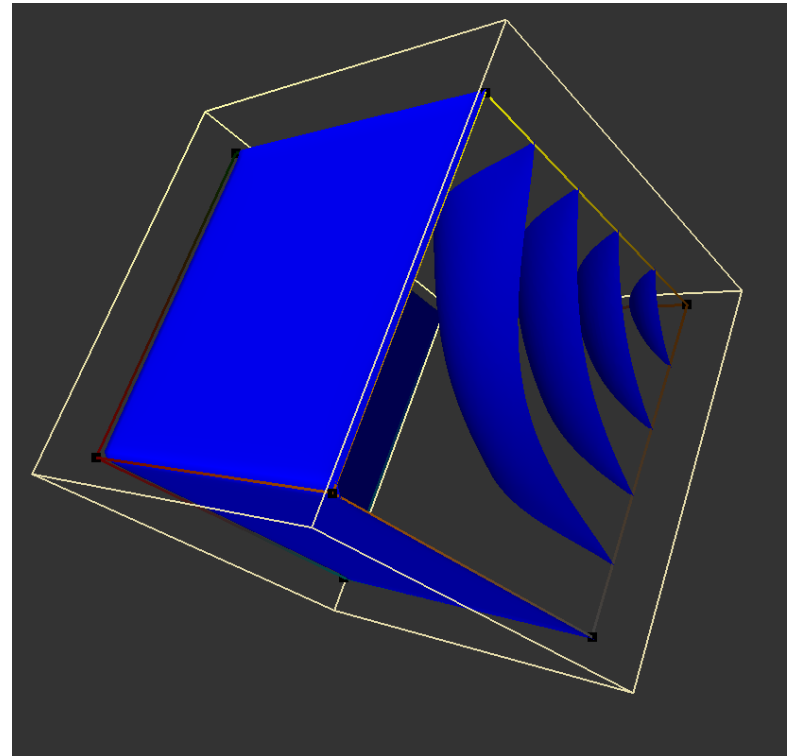
1. Általános baricentrikus koordináták 3D-ben

- A feladat: $2D$ esethez hasonlóan poliéder csúcsaihoz szeretnénk baricentrikus koordinátákat rendelni.
- Célunk, hogy minden belső v pont előálljon a poliéder csúcsainak lineáris kombinációjaként:

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i(v) v_i$$

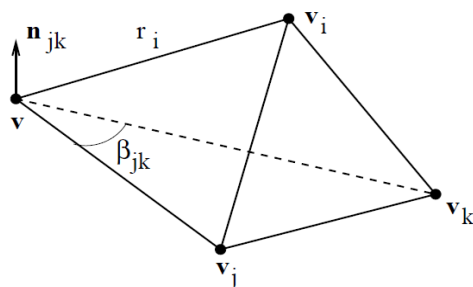
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(v) \equiv 1$$

- Az élek mentén lineáris,
lapokon $2D$ baricentrikus.

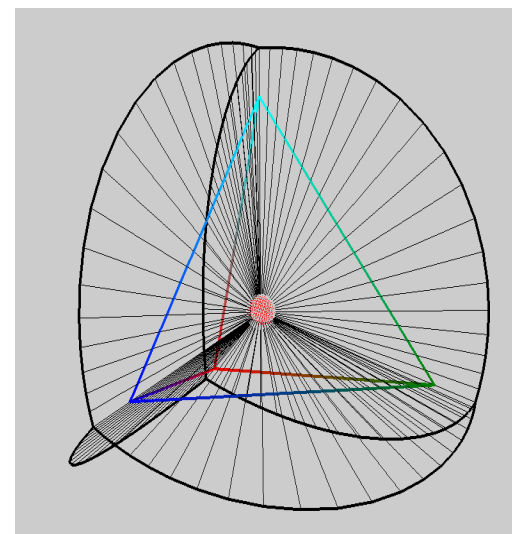
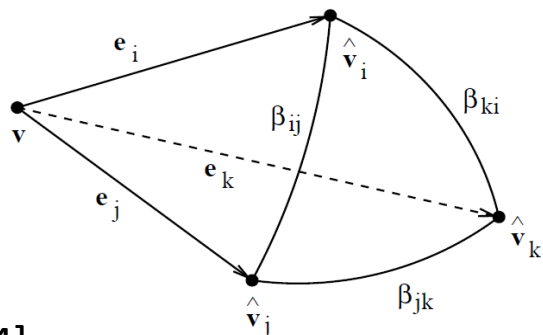


2. Mean Value koordináták 3D-ben

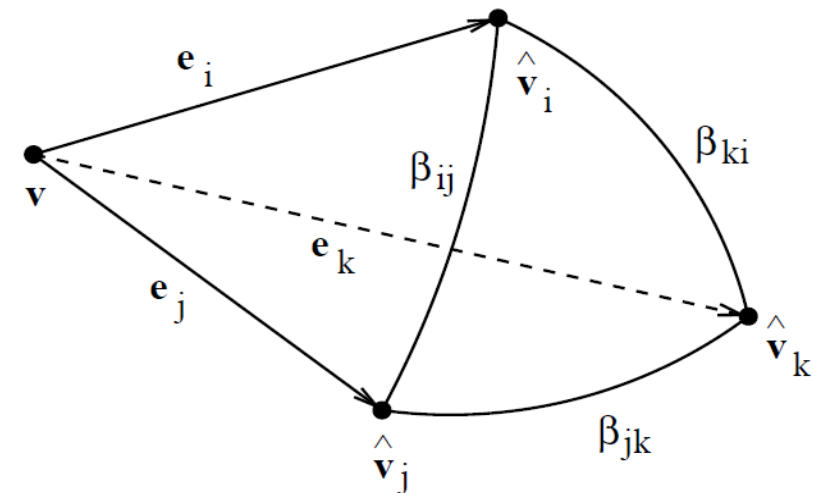
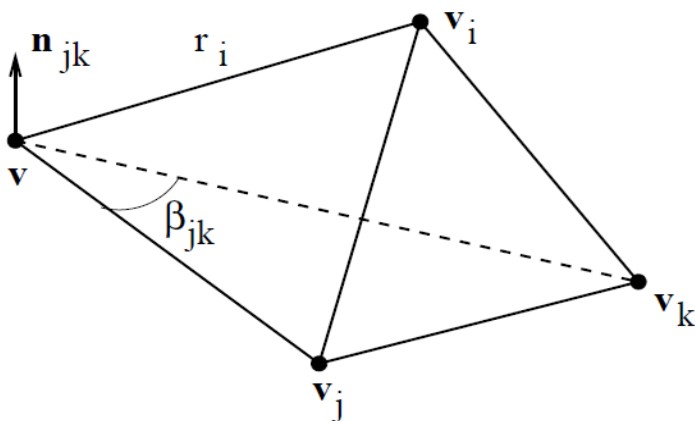
- Adott egy háromszög lapokkal határolt poliéder, és benne egy $\mathbf{v}$ pont, ahol ki akarjuk értékelni a mean value koordinátákat.
- A $\sum_{i=1}^n \lambda_i (\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) = 0$ kifejezés (*Affine precision*) analóg azzal, hogy az egységgömb felszínén az egység normálisok integrálja nulla ($\int_S \mathbf{n}(\mathbf{p}) = 0$, ahol $\mathbf{n}(\mathbf{p}) = (\mathbf{p} - \mathbf{v})$).
- Vegyünk $\mathbf{v}$ körül egy egységgömböt, erre levetítjük a poliéder lapjait.



[4]



2. Mean Value koordináták 3D-ben

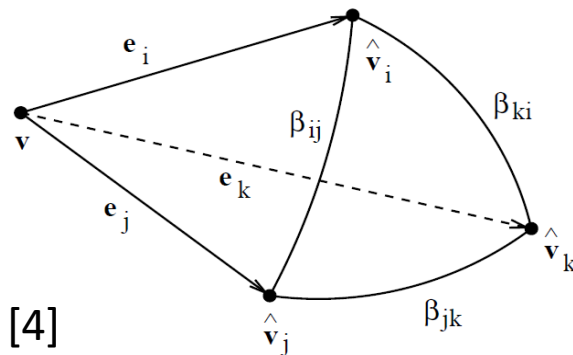
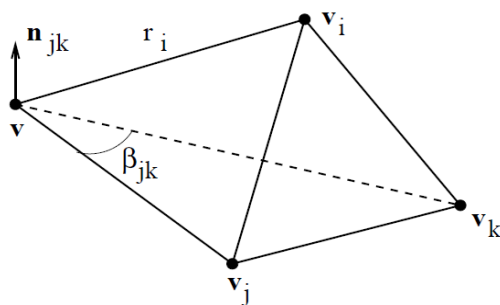


[4]

- Gömbi háromszöget kapunk, aminek a csúcsaihoz súlyokat rendelünk.
 - 2D baricentrikus a háromszögre
 - Korrekció a vetítés miatt
- Ebből számolhatjuk a mean value koordinátákat.
 - A csúcs körüli háromszögekből adódó súlyok összege.

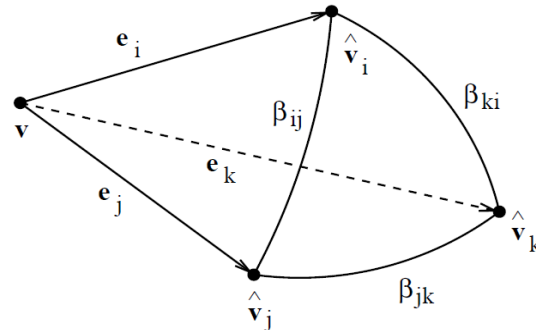
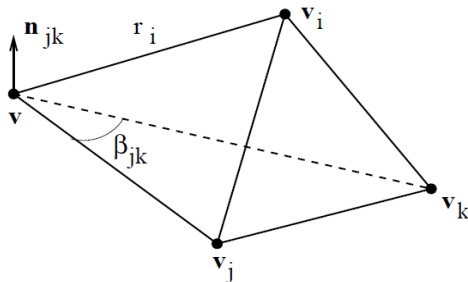
2. Mean Value koordináták 3D-ben

- A háló háromszögei egy $\mathbf{v}$ középpontú egységsugarú gömbre vetülnek le.
- $T = [\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k]$ leképeződik $\hat{T} = [\hat{\mathbf{v}}_i, \hat{\mathbf{v}}_j, \hat{\mathbf{v}}_k]$ -re.
- $\mathbf{r}_i = \|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}\|$ az oldalvektorok hosszai.
- $\mathbf{e}_i = (\mathbf{v}_i - \mathbf{v})/\mathbf{r}_i$ az egységvektorok.
- Új pont az egységgömbön: $\hat{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v} + \mathbf{e}_i$.
- Cél, hogy a $\hat{T}$ -ban meghatározzuk a baricentrikus koordinátákat.



2. Mean Value koordináták 3D-ben

- Gömbi integrál kiszámítása trükkös:
az integrált a gömbcikkeken számítjuk ki
 - $\int_{\hat{T}} (\mathbf{p} - \mathbf{v}) = \mu_{i,T} \mathbf{e}_i + \mu_{j,T} \mathbf{e}_j + \mu_{k,T} \mathbf{e}_k = -(\beta_{ij} \mathbf{n}_{ij} + \beta_{jk} \mathbf{n}_{jk} + \beta_{ki} \mathbf{n}_{ki})$
- Így a csúcsokhoz tartozó súly ($\langle \dots, \mathbf{n}_{jk} \rangle$):
 - $$\mu_{i,T} = \frac{\beta_{jk} + \beta_{ij} \langle \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{n}_{jk} \rangle + \beta_{ki} \langle \mathbf{n}_{ki}, \mathbf{n}_{jk} \rangle}{2 \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{n}_{jk} \rangle}$$
 - ahol $\mathbf{n}_{rs} = (\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_s) / \|\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_s\|$, és β_{rs} a körcikk területe a r -edik és az s -edik egységvektor között



2. Mean Value koordináták $3D$ -ben

- Minden háromszög mindhárom csúcsához
- Most csoportosítsuk a $\mu_{i,T}$ -ket a háló csúcsai szerint
- Ezt még súlyozni kell a vetítés arányával ($\frac{1}{|r_i|}$)
- $w_i = \frac{1}{|r_i|} \sum_{v_i \in T} \mu_{i,T} > 0.$
- Ebből normalizálással: $\lambda_i = \frac{w_i}{\sum_{j=1}^n w_j}$

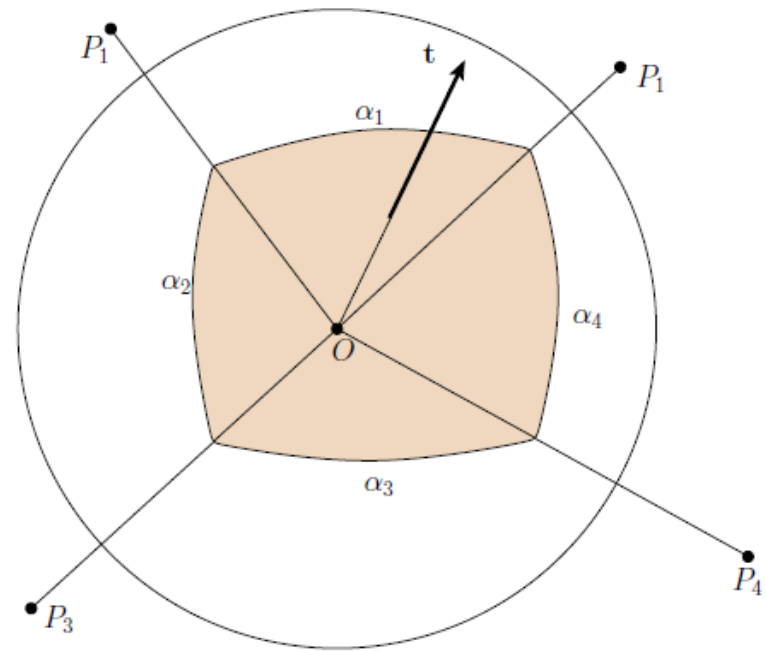
3. Mean Value koordináták N -oldalú lapokkal

- Ugyanaz az elv mint korábban,
de a $\mu_{i,T}$ kiszámolása különbözik
- $\int_{\hat{T}} (\mathbf{p} - \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^N \mu_{i,T} \mathbf{e}_i$
- Az integrált ugyanúgy számoljuk mint eddig
- A súlyok szétosztása nem egyértelmű
- Vetítsük síkba a sokszöget
- Ötlet: számoljuk $2D$ baricentrikus szerint.

3. Mean Value koordináták N -oldalú lapokkal

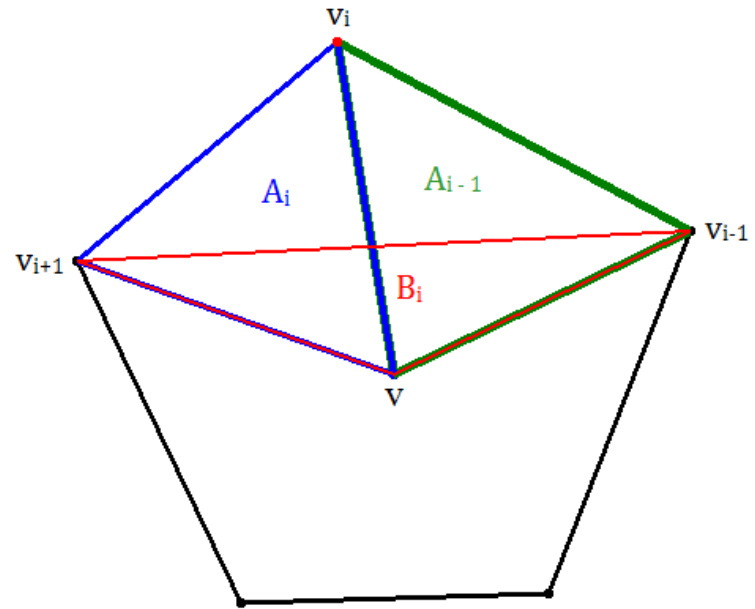
- A területvektor egyenlő a határoló körcikkek befelé irányított területvektorainak összegével.

- $$\mathbf{t} = \sum_{i=1}^k \frac{\overrightarrow{OP_i} \times \overrightarrow{OP_{i+1}}}{|\overrightarrow{OP_i}| \cdot |\overrightarrow{OP_{i+1}}| \cdot \sin \alpha_i} \cdot \frac{\alpha_i}{2}$$
- Vetítsük a pontokat egy a $\mathbf{t}$ -re merőleges síkra.
- Kiszámoljuk a pontokhoz a $2D$ baricentrikus koordinátákat.
- Innen megkapjuk a $\mu_{i,T}$ -t

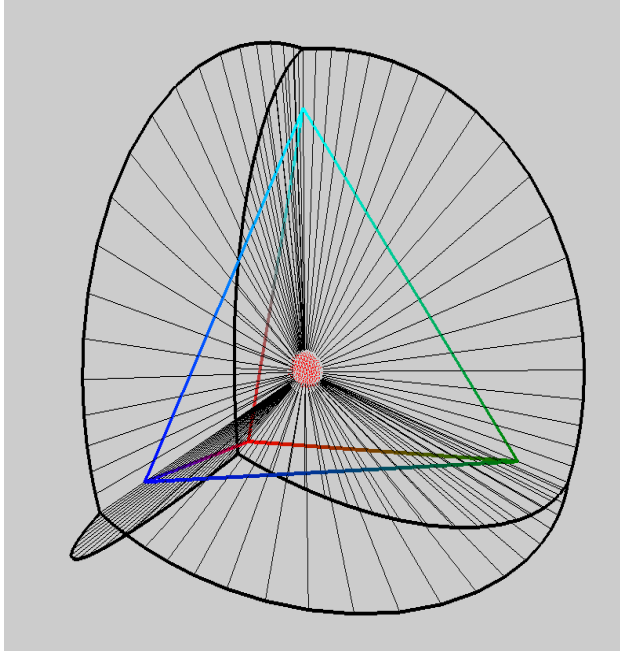


3. Mean Value koordináták N -oldalú lapokkal

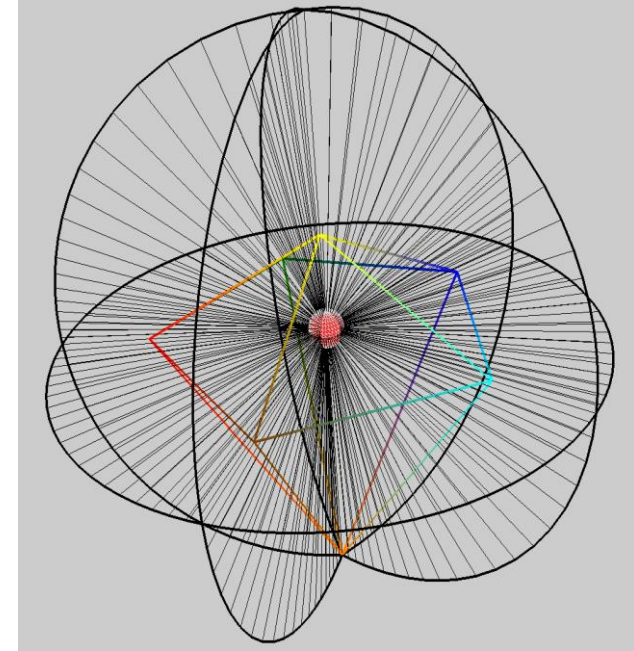
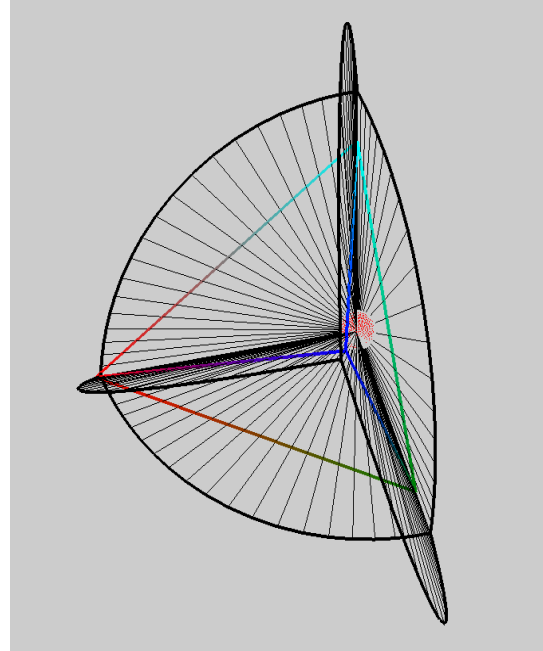
- Speciális esetek:
 - A $\mathbf{v}$ pont a poliéder egy csúcsába esik.
 - Ekkor $\lambda_i(\mathbf{v}) = \delta_{i,j}$
 - A $\mathbf{v}$ pont a poliéder egy élére esik.
 - $\lambda_i(\mathbf{v}) = (1 - \mu)\delta_{i,j} + \mu\delta_{i,j+1}$
 - A $\mathbf{v}$ pont a poliéder egy lapjára esik (ismét visszavezetjük a $2D$ esetre).



3. Poliéder vetítése gömbre I.

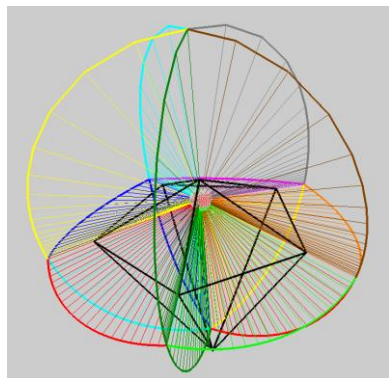
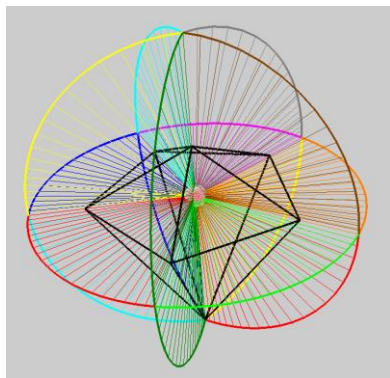


Tetraéder közepén, és egyik lapjához közel lévő tesztpont. A tesztpont mozgatásával a 0.25, 0.25, 0.25, 0.25 koordináták a 0.13, 0.29, 0.289, 0.291-ba mennek át.

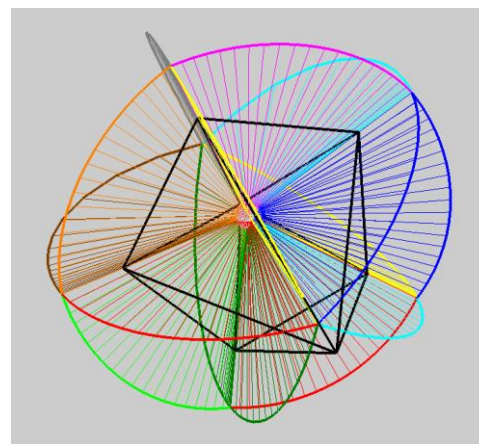
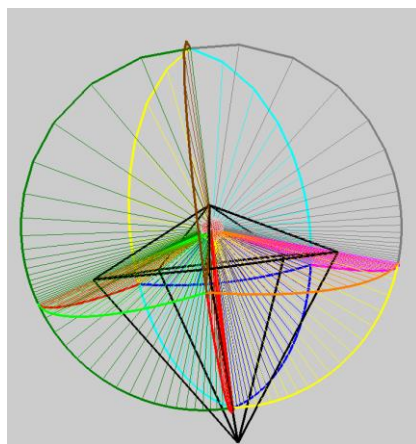
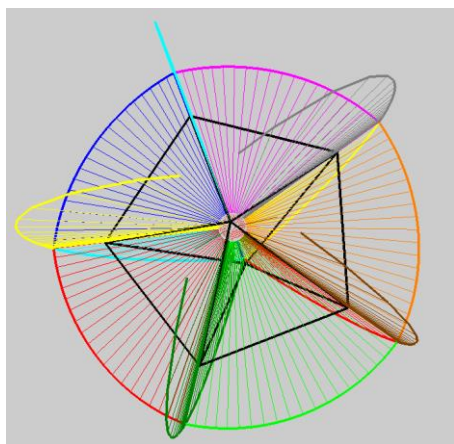


Gyémánt alakzat közepén lévő tesztponttal. A koordináták rendre 0.12, 0.12, 0.12, 0.12, 0.29, 0.11.

3. Poliéder vetítése gömbre II.



Gyémánt alakzat kiindulási állapota, fix módosított tesztponttal és három különböző nézőponttal.

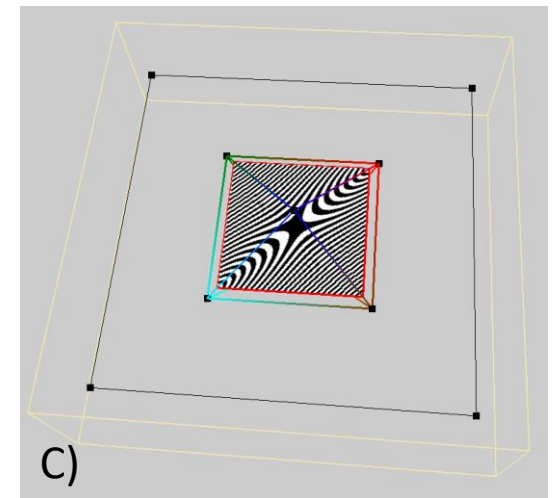
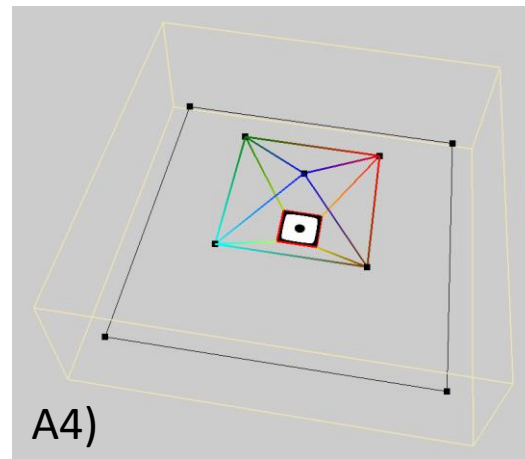
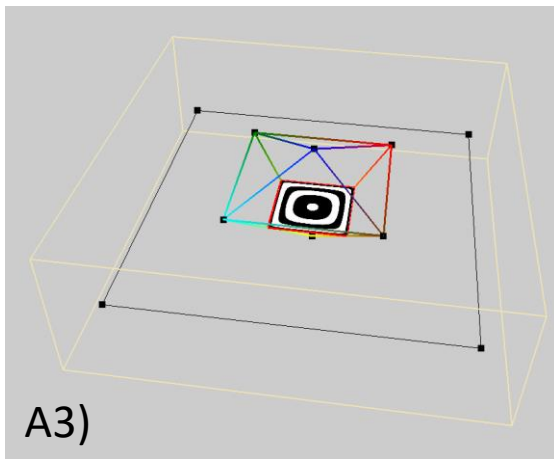
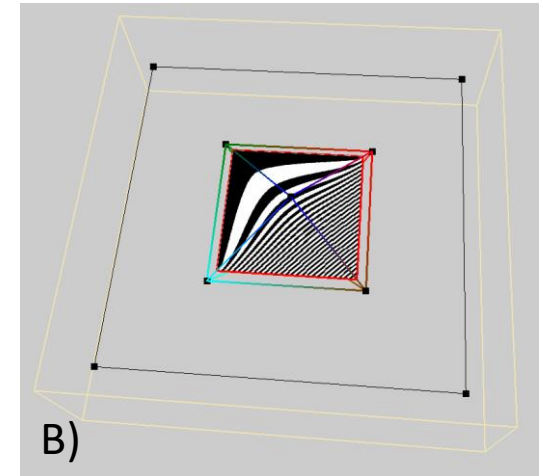
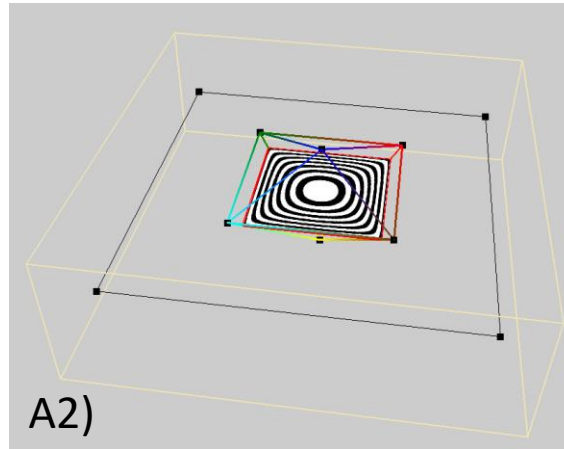
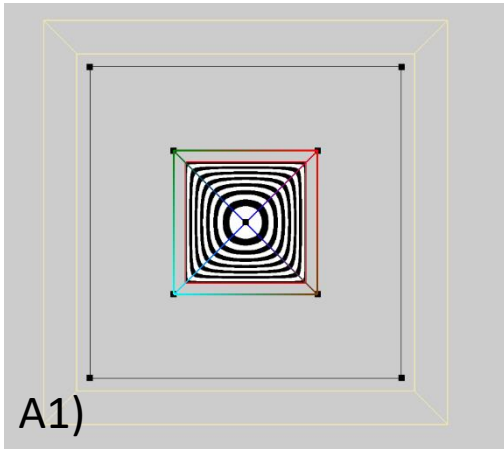


A baricentrikus koordináták a következők:
0.0690294, 0.0690326, 0.0690226, 0.0690231,
0.0690318, 0.630757, 0.0241039.

4. Skalár interpoláció

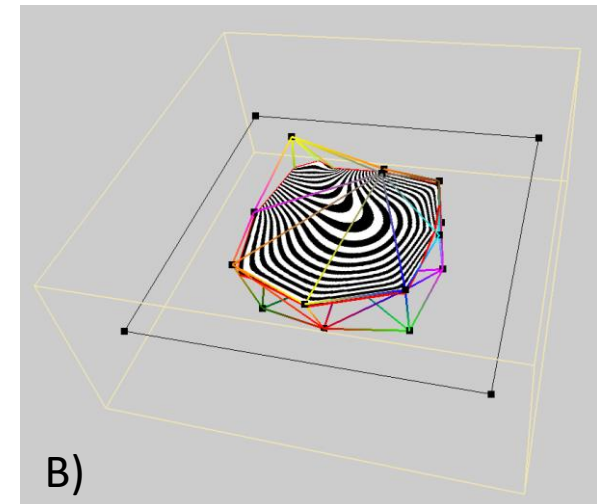
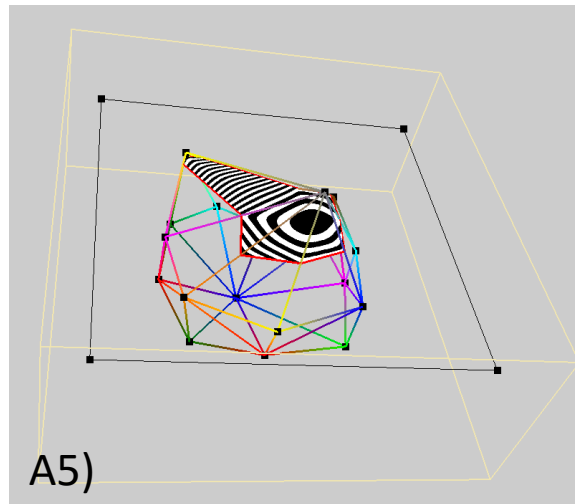
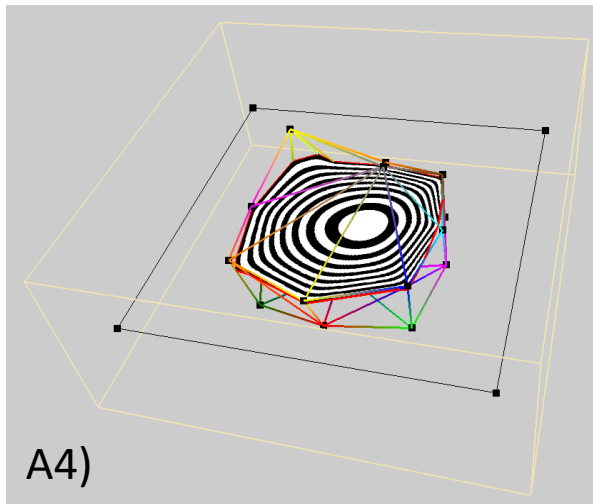
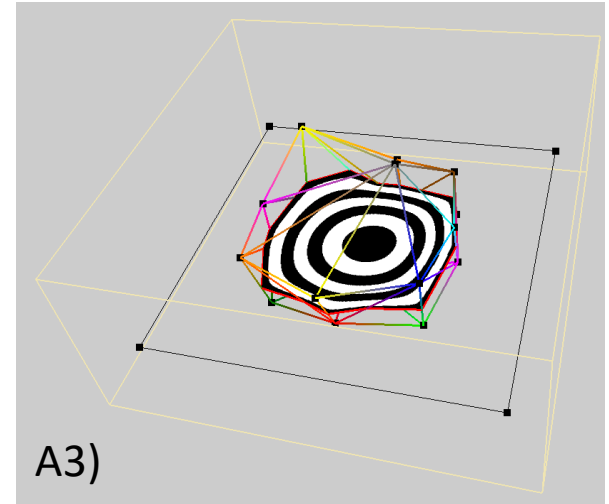
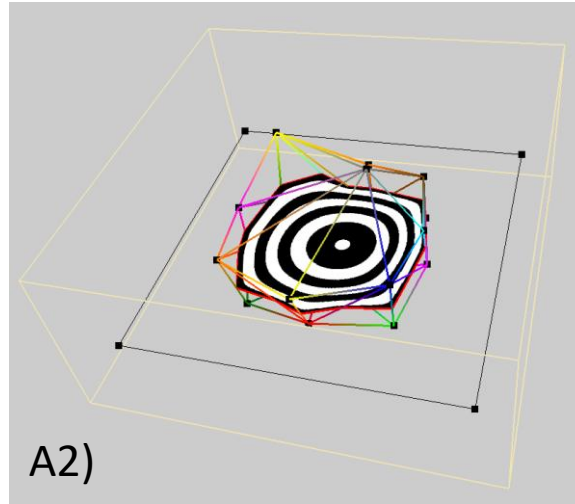
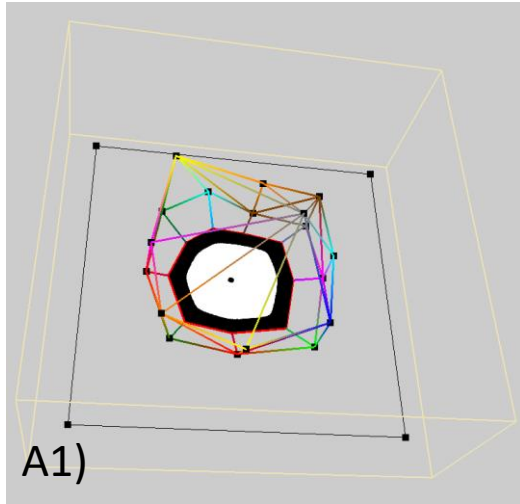
- Csúcsokhoz skalár rendelés: $\mathbf{v}_i \rightarrow f_i$
- Kiértékelés: $f(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathbf{v}) f_i$
- Az $f(\mathbf{v})$ térbeli eloszlása síkon jól szemléltethető
- Csíkozott megjelenés:
 - Érték tartományokra osztás
 - Tartomány szerinti színezés

4. Skalár interpoláció



A) A felső csúcshoz $f=1$, a többihez $f=0$ értéket rendeltünk. B) oldalsó csúcs 1, többi 0 értékű. C) két szemközti csúcshoz 1-et, a többihez 0-t rendeltünk.

4. Skalár interpoláció

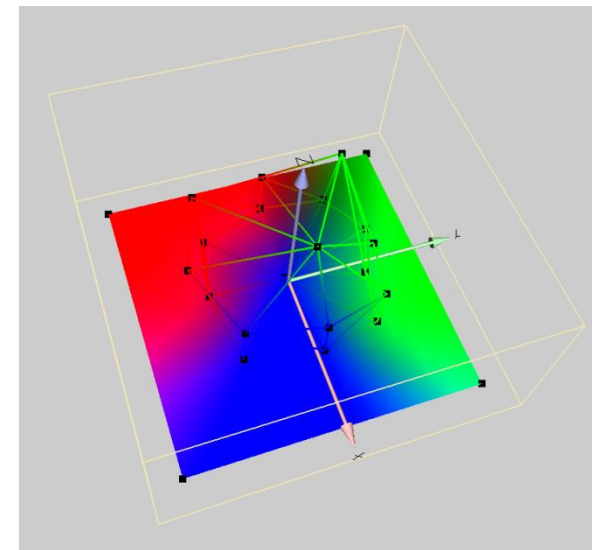
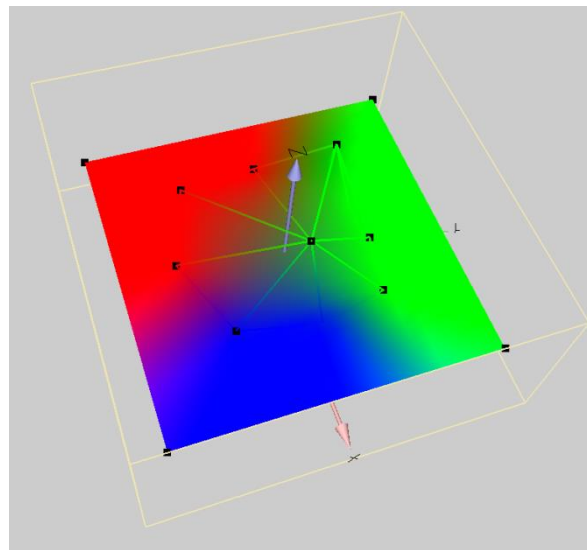
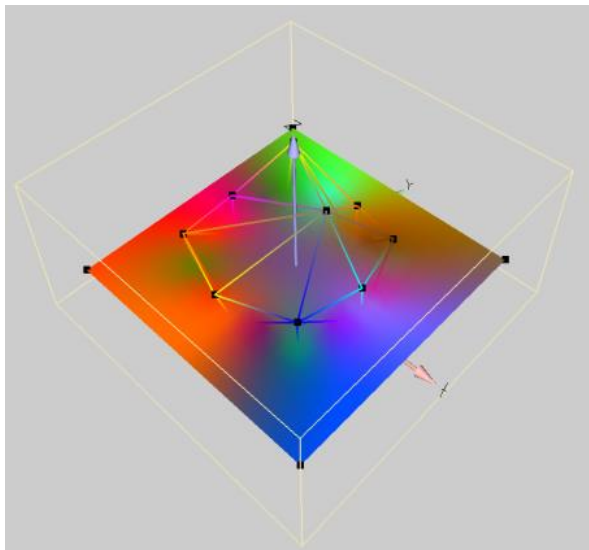
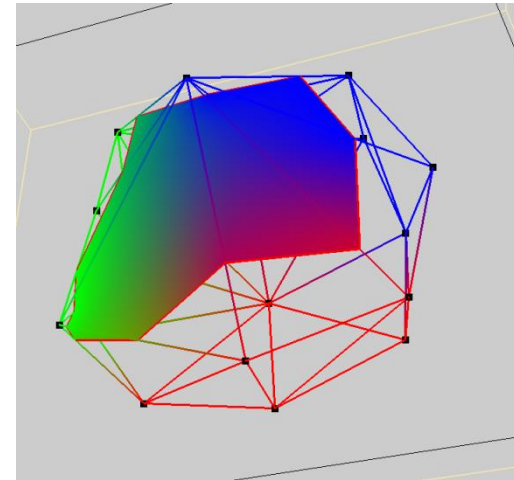
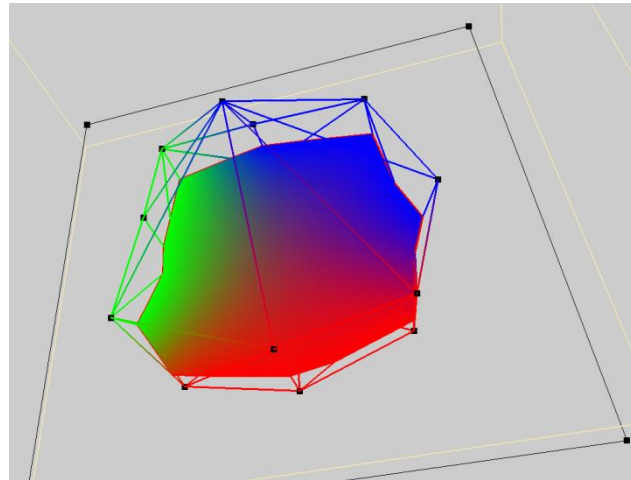
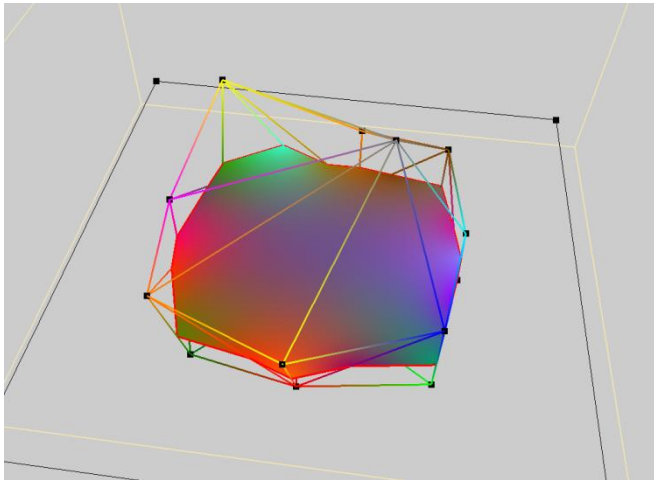


A) Felső csúcsához 1 érték rendelve, a többihez 0. B) Két felső csúcsához 1 érték rendelve, a többihez 0.

4. Szín interpoláció

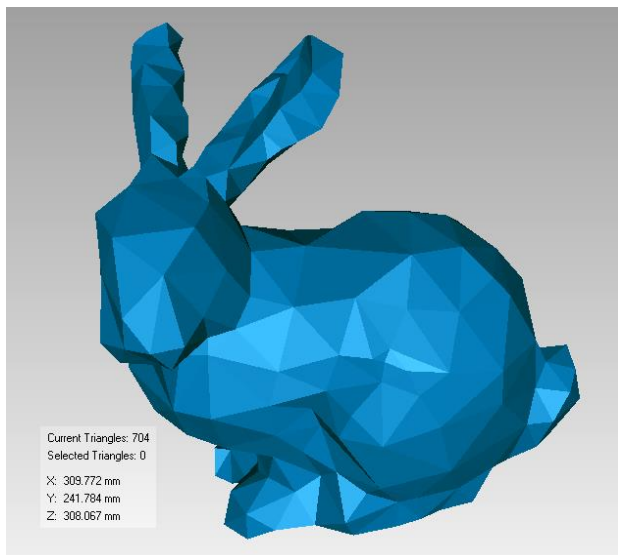
- Hozzárendelés: $\mathbf{v}_i \rightarrow F_i$ ahol $F = (RGB)$
- Leképezés: $F(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathbf{v}) F_i$
- $F(\mathbf{v})$ alapján színezzük a síkot.

4. RGB interpoláció

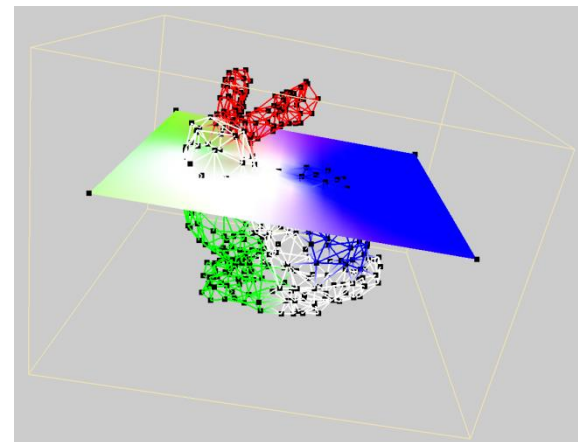
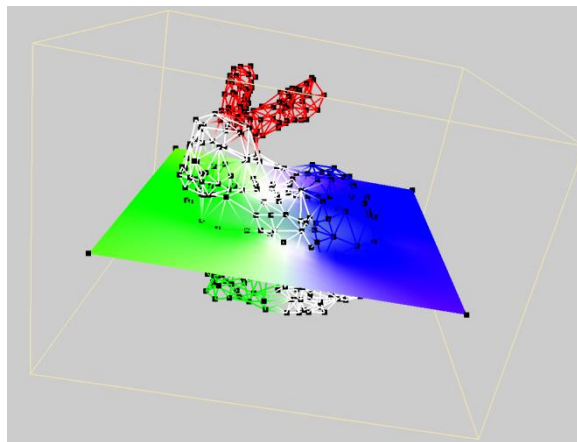
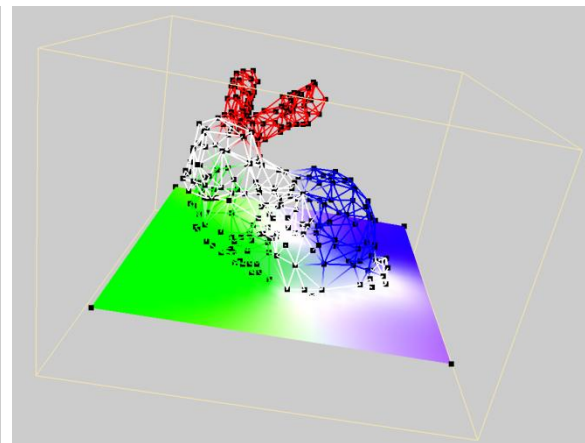
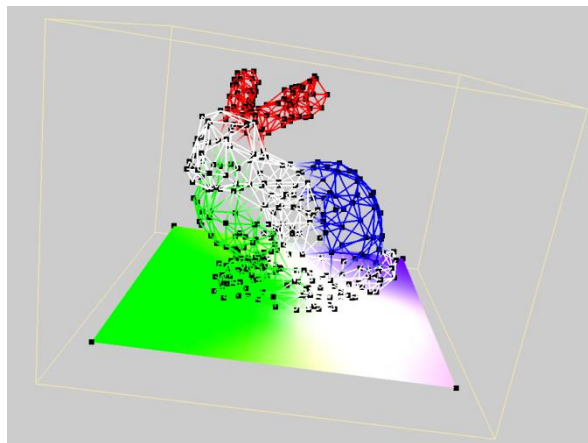


Konkáv poliéder síkmetszetei teljes sík és poligon feltüntetésével. RGB interpoláció.

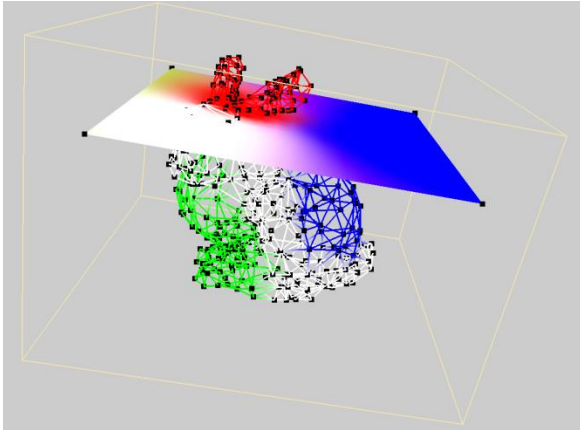
4. RGB interpoláció



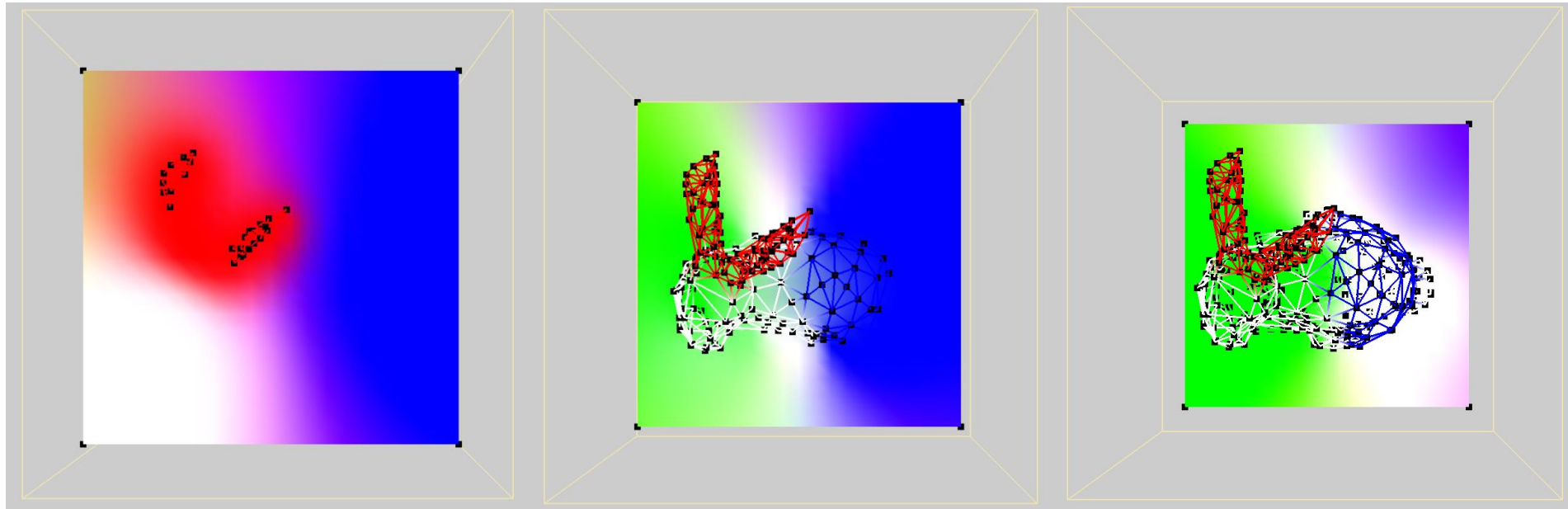
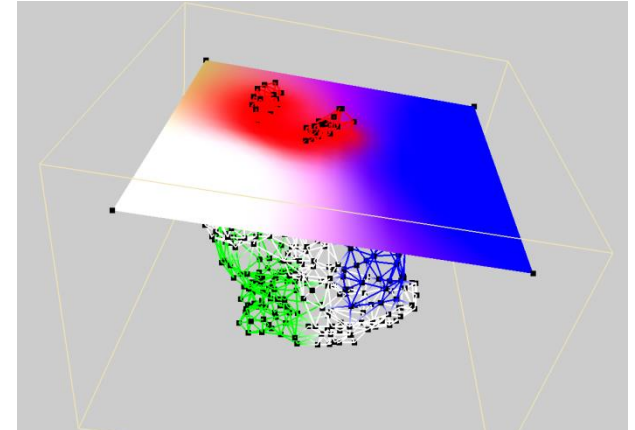
Stanford *bunny* (700)
háromszöglappal határolt
modelljének egy színezése,
majd az alapján történő szín
interpoláció.



4. RGB interpoláció

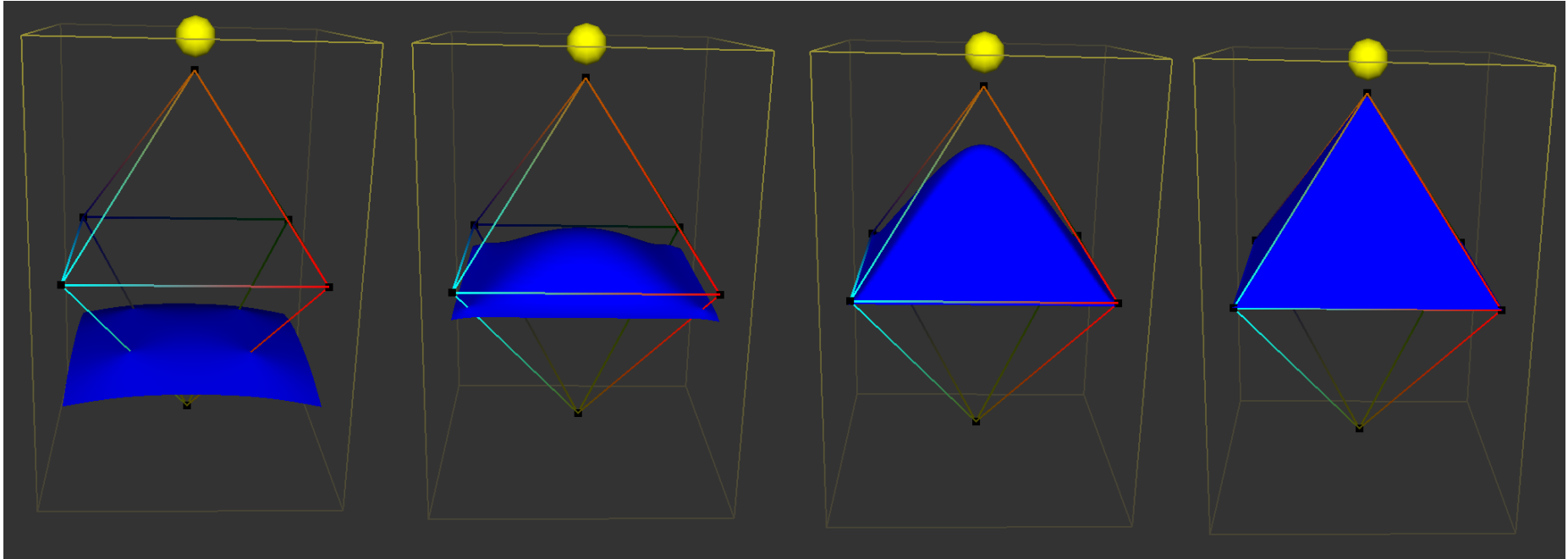


Oldalnézet



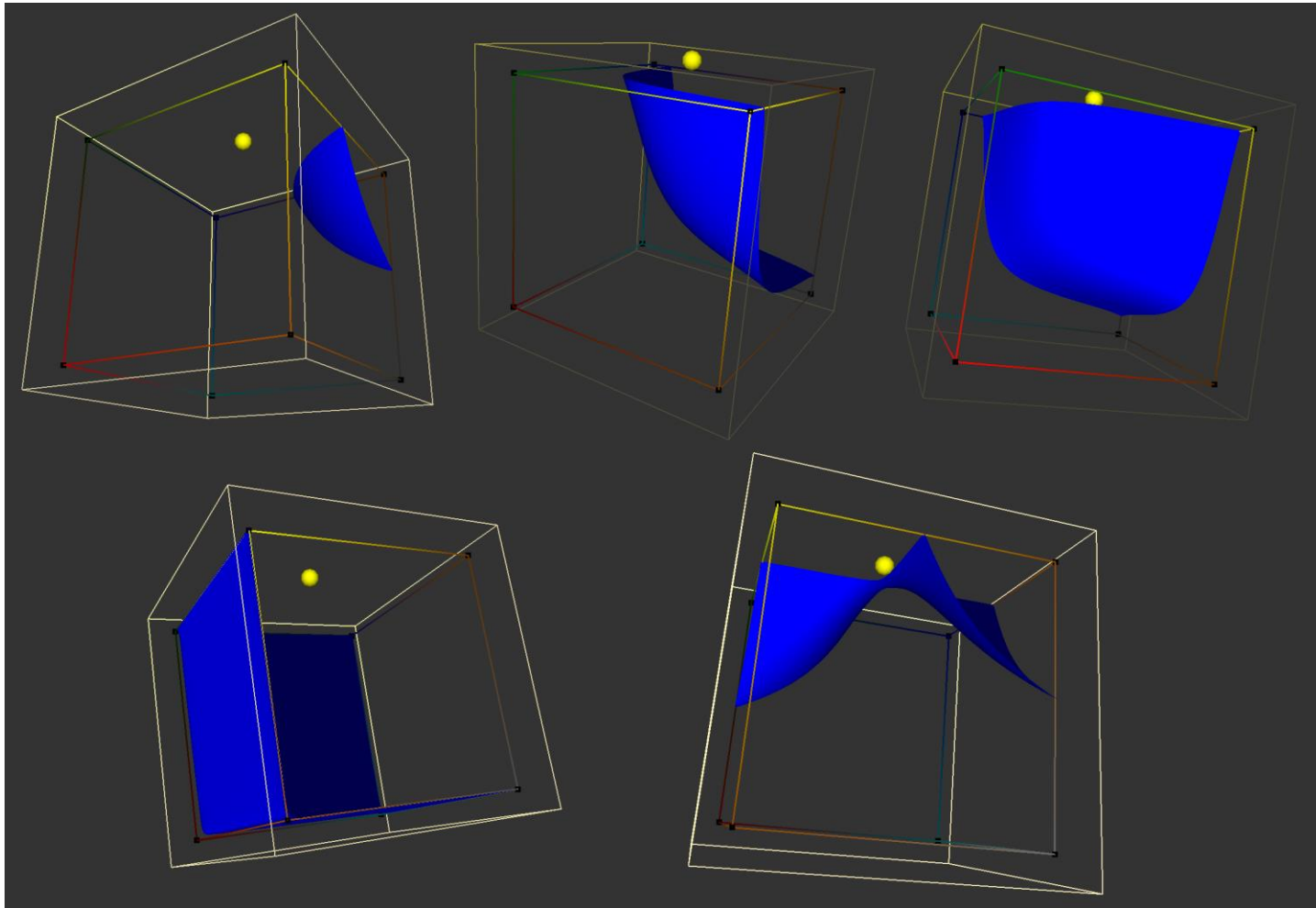
Felülnézet

4. Szintfelületek I.



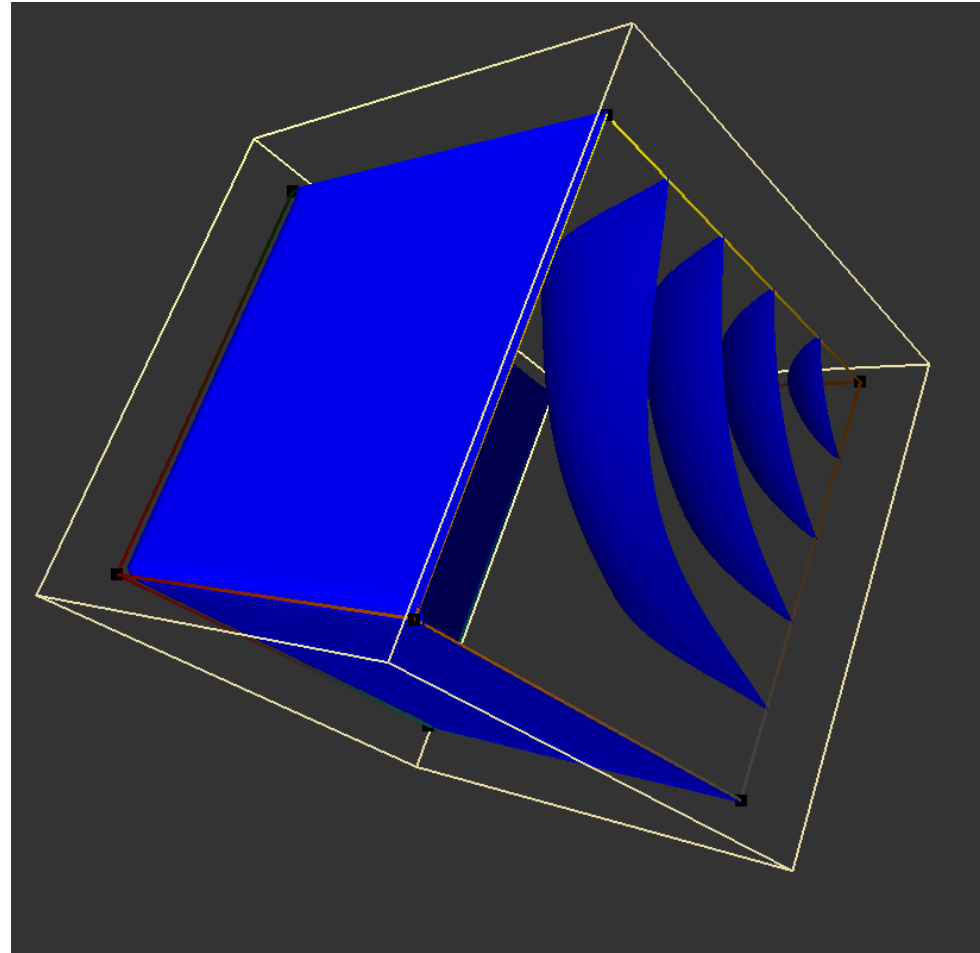
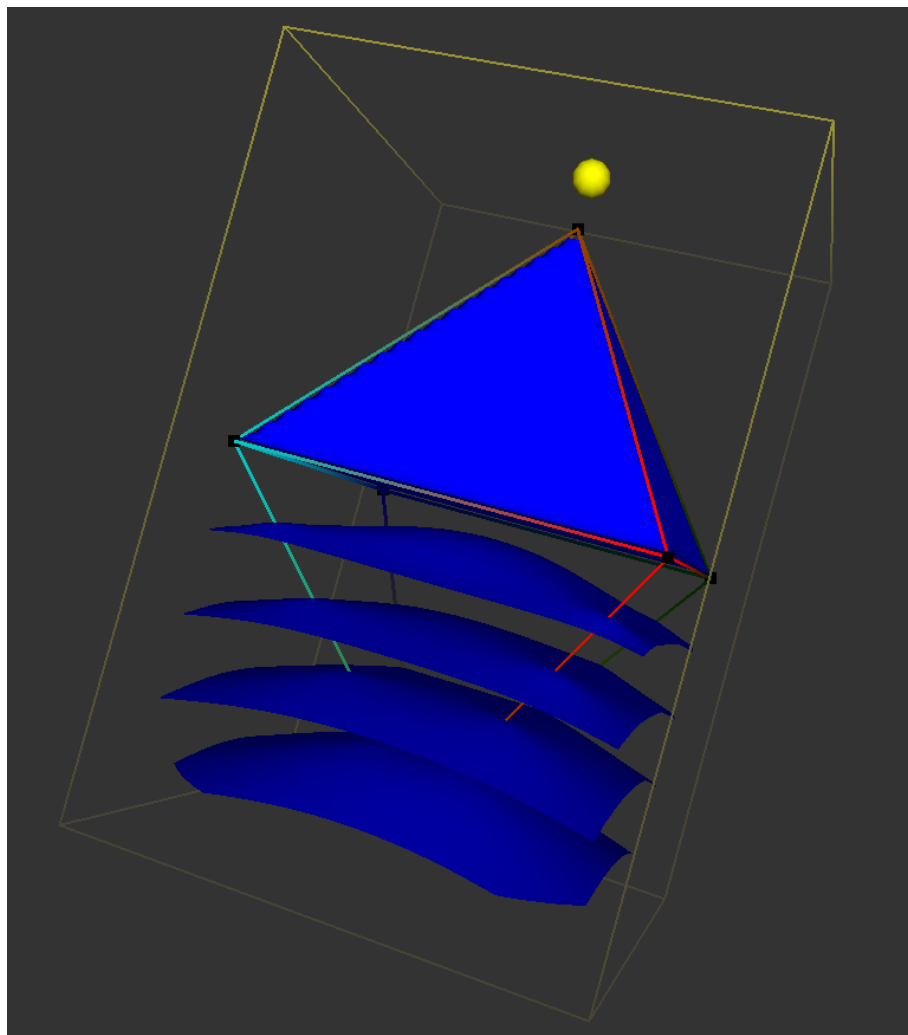
- A poliéder alsó csúcsához tartozó függvény értéket 1-re míg a többi 0-ra állítottuk.
- A négy ábra a következő paraméterhez tartozó felületeket mutatja:
- 0.5, 0.1, 0.01, 0.0001

4. Szintfelületek II.



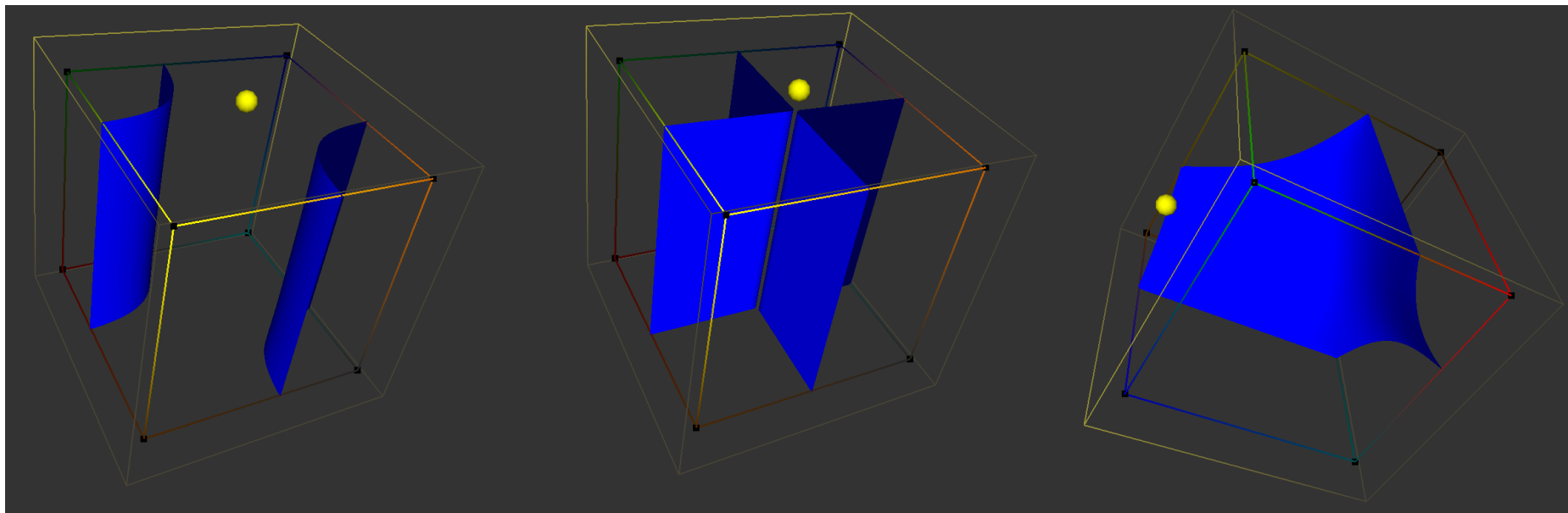
- Kockában a paraméter értékek sorban: 0.5, 0.1, 0.01, 0.0001
- Az 5. ábrán két csúcshoz rendeltünk 1-es értéket, míg a többihez 0-át.

4. Szintfelületek III.



- $[0..1]$ tartomány 5 részre osztása: 0.2-eps, 0.4-eps, 0.8-eps, 1.0-eps

4. Függvény interpoláció

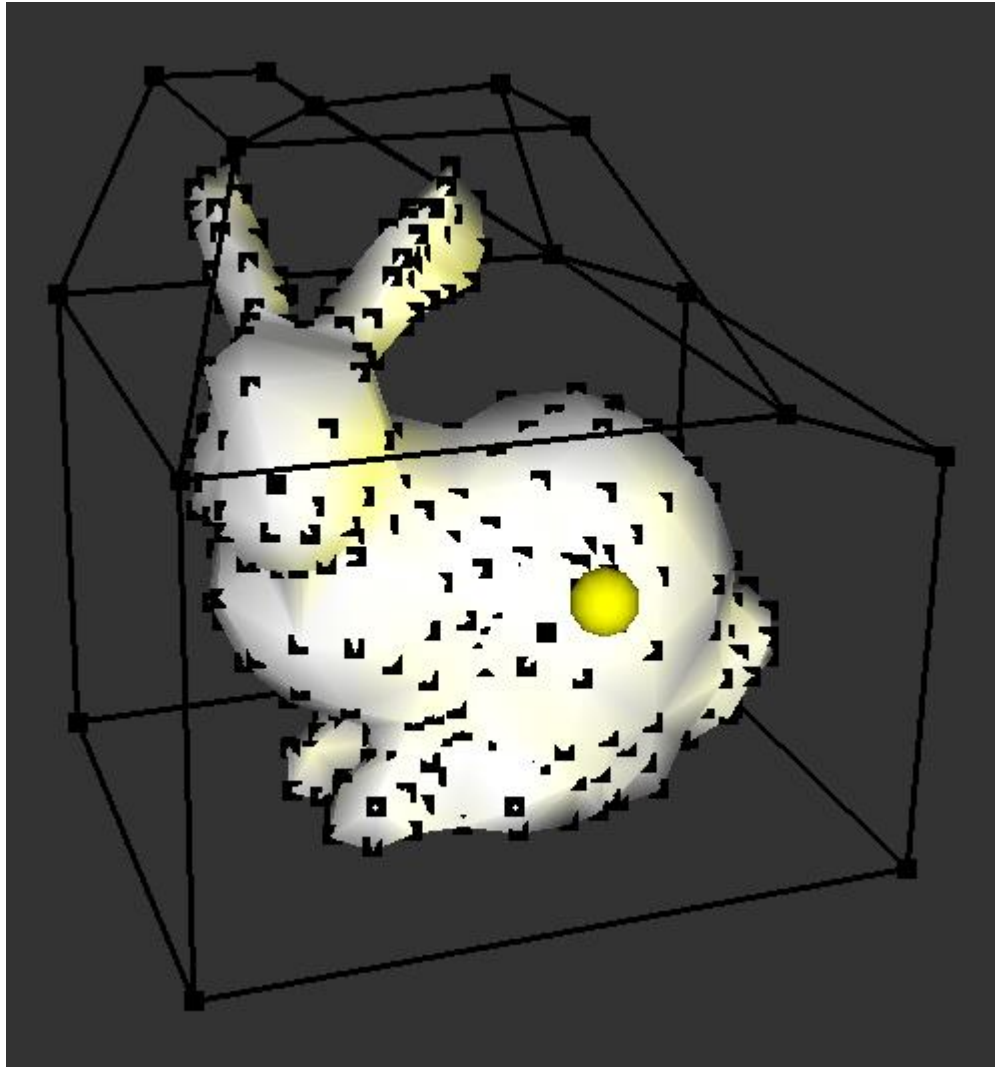


- A paraméter értékek sorban 0.6, 0.5, 0.5

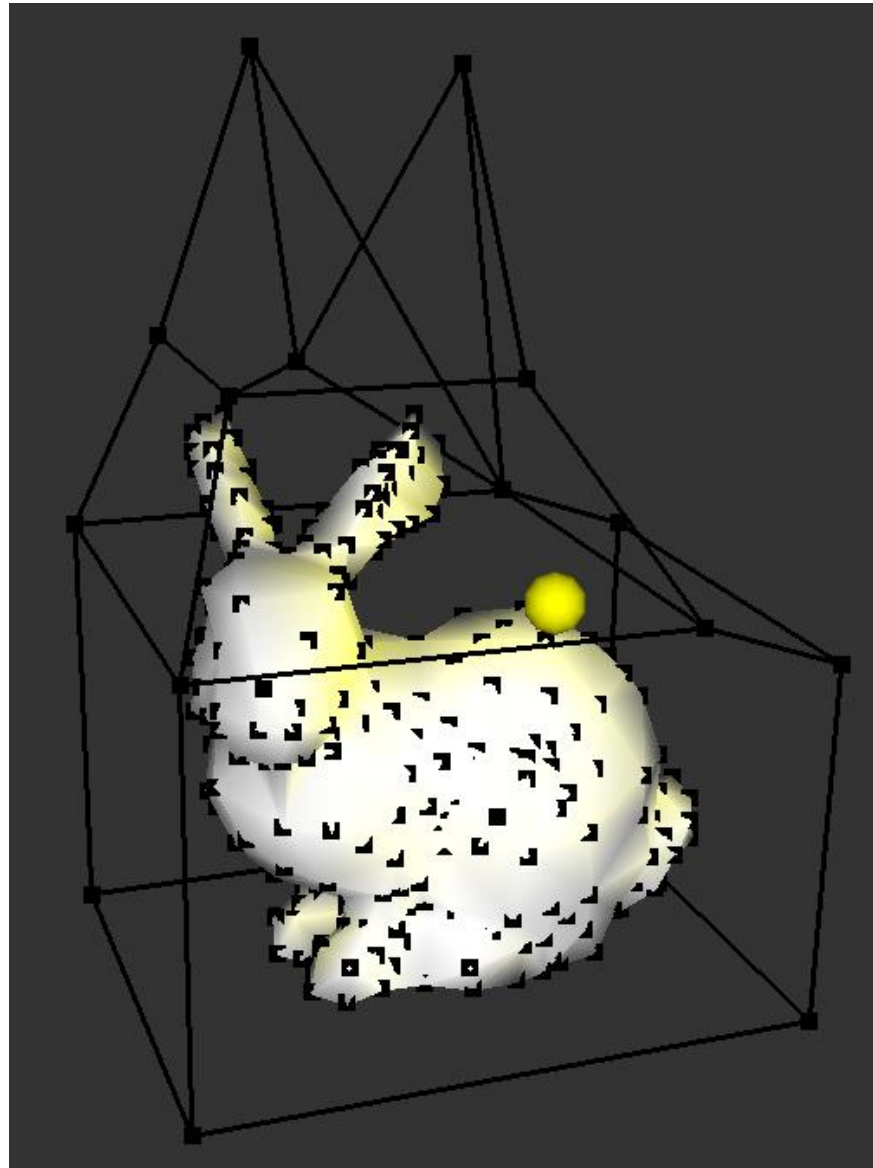
5. Deformáció

- 2D esettel analóg
- $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i(v) v_i$
- Master(Ω) – Slave (α)
- Hozzárendelés a -hoz Ω alapján: $a = \sum_{i=1}^n \lambda_i o_i$.
- Master deformálás: $\Omega \rightarrow \hat{\Omega}$
- A slave előáll a deformált master alapján: $\hat{a} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \hat{o}_i$

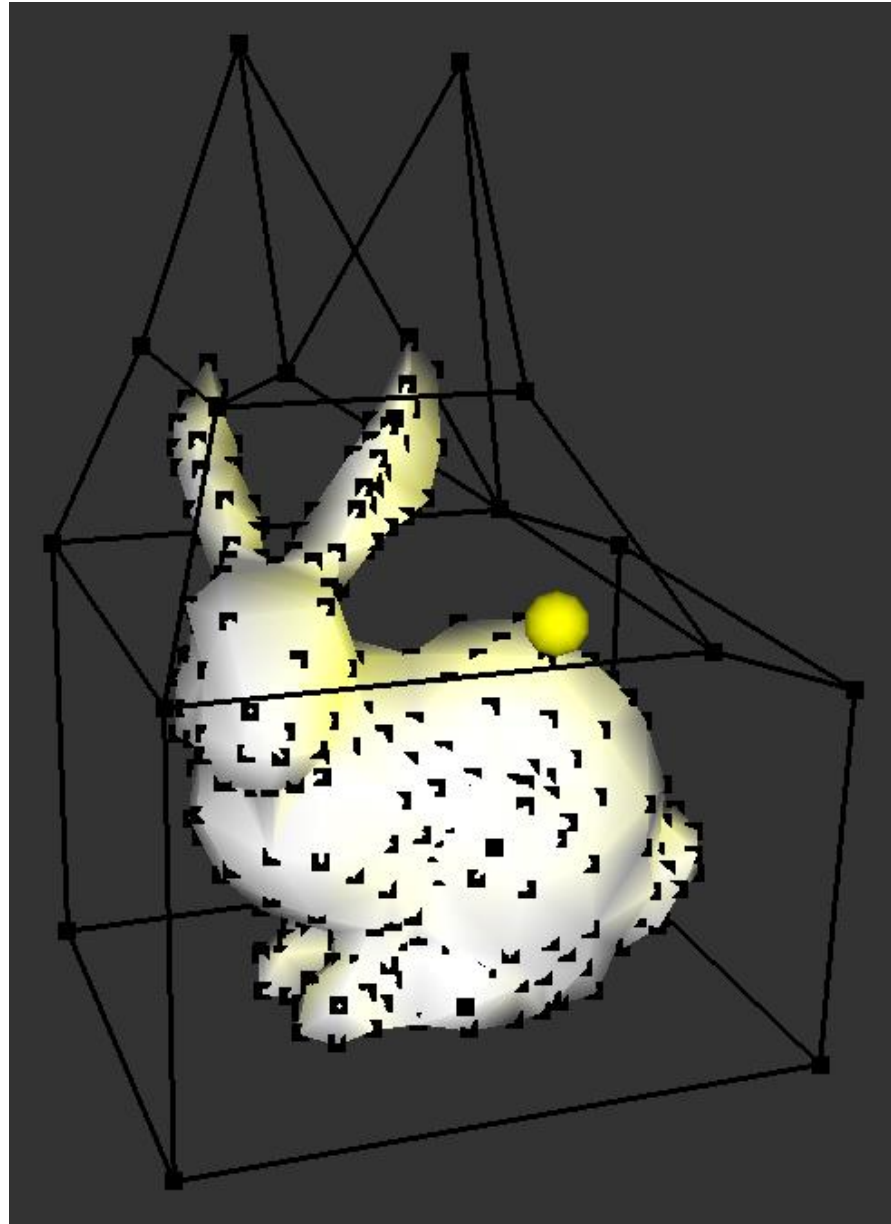
5. Deformáció



5. Deformáció



5. Deformáció



Hivatkozások

- [1] K. Hormann & M. S. Floater: *Mean Value Coordinates for Arbitrary Planar Polygons*, ACM Transactions on Graphics, 25(4):1424-1441, October 2006.
<http://www.inf.usi.ch/hormann/papers/Hormann.2006.MVC.pdf>
- [2] K. Hormann: – *Barycentric Coordinates and Transfinite Interpolation*, Tenth SIAM Conference on Geometric Design and Computing, San Antonio, Texas, November 4-8, 2007,
<http://www.inf.usi.ch/faculty/hormann/barycentric/Hormann.pdf>
- [3] T. Schneider, K. Hormann & M.S. Floater – *Bijjective Composite Mean Value Mapping*, DOI 10.1111/cfg.12180 Eurographics Symposium on Geometry Processing 2013, Guest Editors: Yaron Lipman and Hao Zhang, Volume 32(2013), Number 5. <http://www.inf.usi.ch/hormann/papers/Schneider.2013.BCM.pdf>
- [4] M. S. Floater, G. Kós and M. Reimers: *Mean value coordinates in 3D – Computer Aided Geometric Design*, Volume 22, Issue 7, October 2005, Pages 621-631,
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167839605000725>
- [5] T. Ju, S. Schaefer and J. Warren: *Mean value coordinates for closed triangular meshes – ACM SIGGRAPH 2005 Papers*, Pages 561-566, New York – USA 2005
<http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1073229>