

”Τὰ πάντα ῥεῖ καὶ οὐδὲν μένει.”  
Ἡράκλειτος

# Affin transzformációk

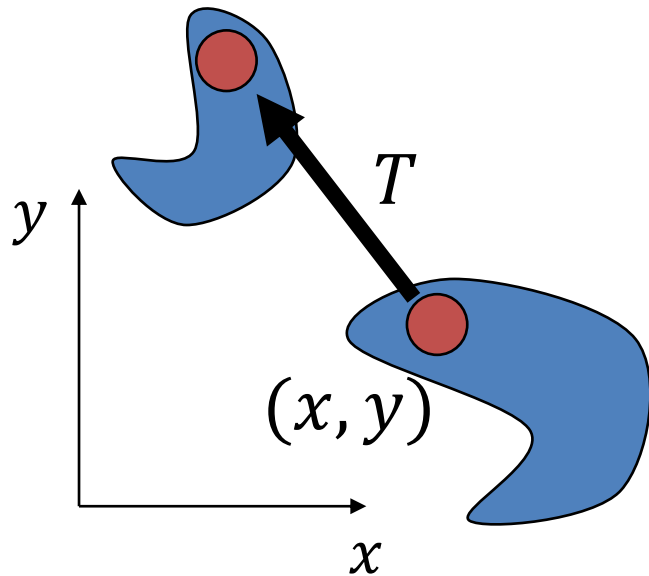
Szirmay-Kalos László



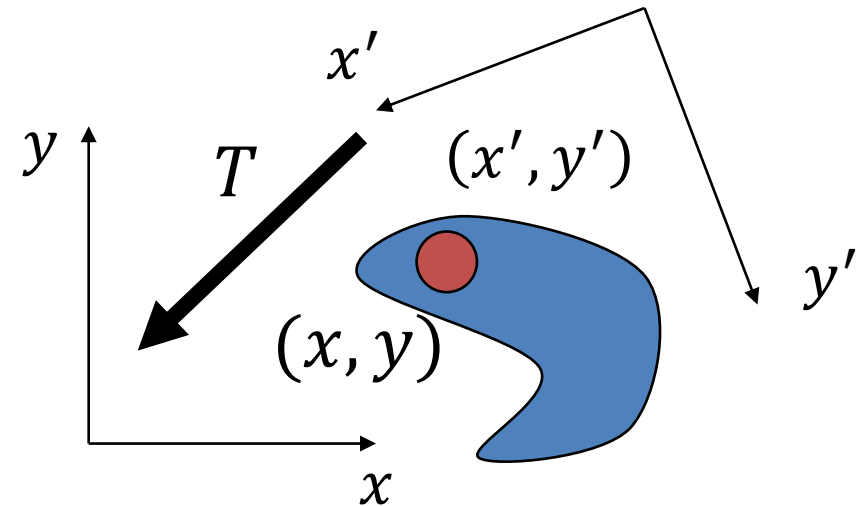
# Transzformációk

Ponthoz pontot (koordinátákhoz koordinátákat) rendel

$$(x', y') = T(x, y)$$



$$(x', y') = T(x, y)$$





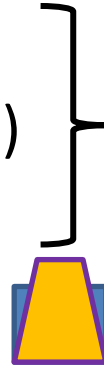
**Tönkre tehetik reprezentációt és az egyenletet!**

# Transzformációk

- Ponton kívül csak szakaszt és háromszöget transzformálunk egyenestartó transzformációval (Képlet?).

- **Példák:**

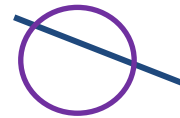
- Eltolás, elforgatás, tükrözés = egybevágóság
- Nagyítás/kicsinyítés = hasonlóság (szögtartás)
- Irányfüggő nyújtás , nyírás , ...
- Perspektív vetítés (párhuzamosságot rontja)



= **Affin transzformációk**  
(párhuzamos egyenestartó)

- **Ellenpéldák:**

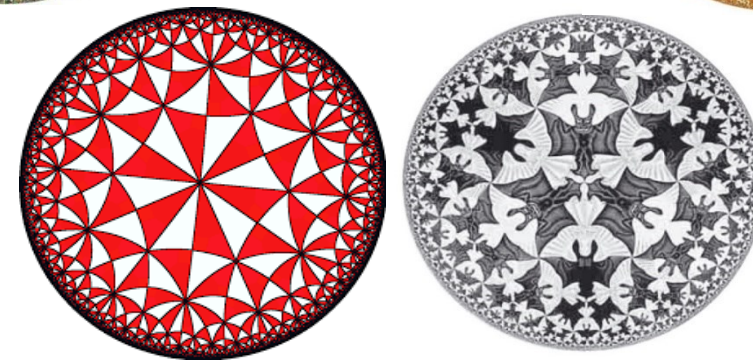
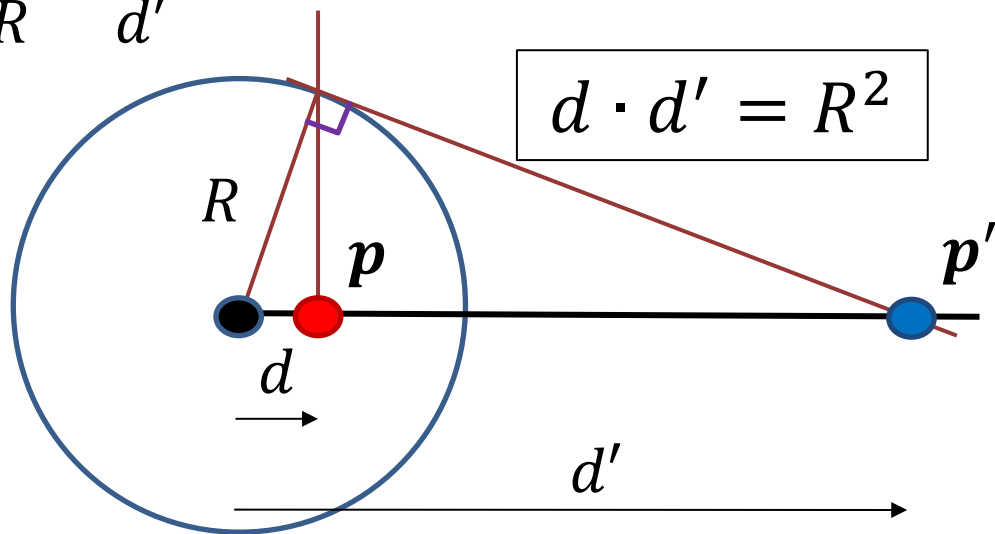
- Inverzió (egyenesből kört vagy egyenest), ...



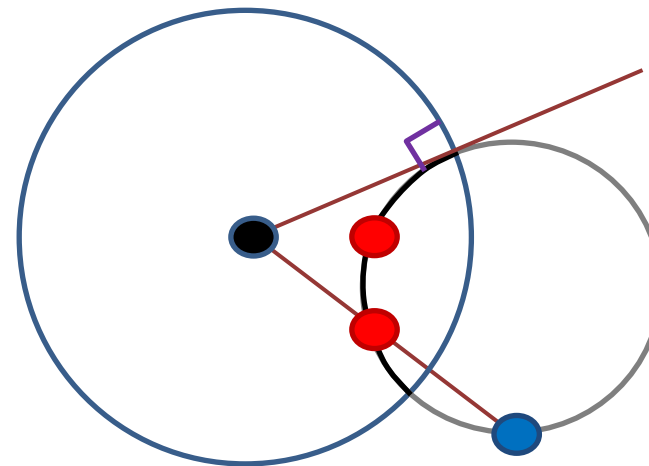
Ha nem egyenest/háromszöget és/vagy nem egyenestartó transzformációt akarunk?  
Közeli pontokat transzformálunk és az eredményre szakaszokat/háromszögeket teszünk.

# Ellenpélda: Inverzió

$$\frac{d}{R} = \frac{R}{d'}$$



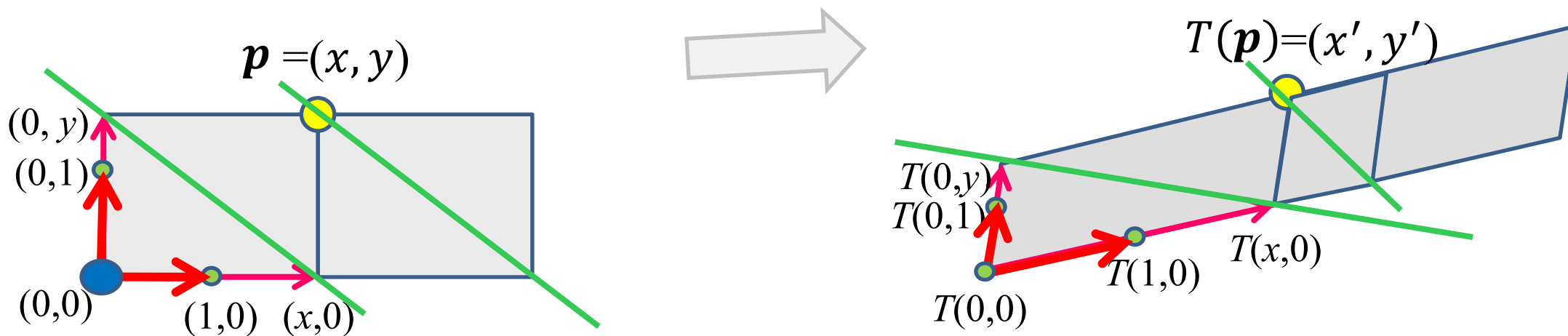
## Szerkesztés a Poincaré diszken



- Alapkör külsejét és belsejét cseréli
- Egyenesből kört vagy egyenest
- Körből kört vagy egyenest
- Szögtartó, saját maga inverze
- Körzővel/vonalzóval szerkeszthető
- Képlet (origó = körközép):  $\mathbf{p}' = \mathbf{p} \frac{R^2}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}$

# Affin transzformációk

Egyenest-egyenesbe, párhuzamosokat megtartja



$$\begin{aligned} T(\mathbf{p}) &= T(0,0) + (T(x,0) - T(0,0)) + (T(0,y) - T(0,0)) \\ &= T(0,0) + x(T(1,0) - T(0,0)) + y(T(0,1) - T(0,0)) \\ &= \mathbf{o}' + x\mathbf{i}' + y\mathbf{j}' \end{aligned}$$

$$[x', y', 1] = [x, y, 1] \begin{bmatrix} \mathbf{i}'_x & \mathbf{i}'_y & 0 \\ \mathbf{j}'_x & \mathbf{j}'_y & 0 \\ \mathbf{o}'_x & \mathbf{o}'_y & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + c \\ y' &= dx + ey + f \end{aligned}$$

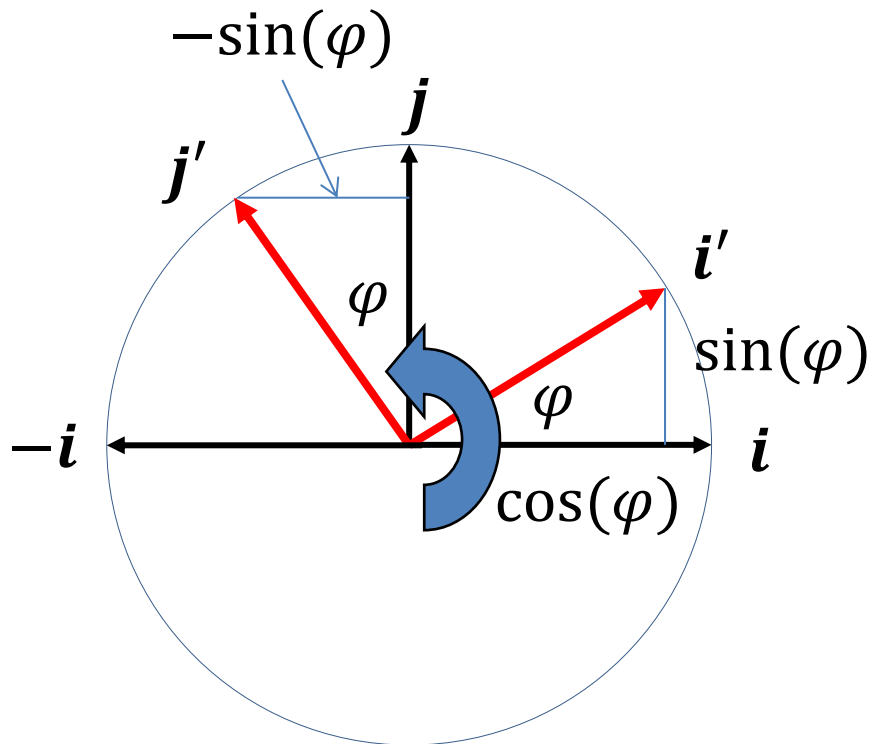
# Szeretjük a mátrixokat, mert szorzásuk asszociatív

- Transzformációk konkatenációja: Asszociatív

$$\begin{aligned} [x', y', z', 1] &= (\dots ([x, y, z, 1] \cdot \mathbf{T}_1) \cdot \mathbf{T}_2) \dots \cdot \mathbf{T}_n \\ &= [x, y, z, 1] \cdot (\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \dots \cdot \mathbf{T}_n) \\ &= [x, y, z, 1] \cdot \mathbf{T} \end{aligned}$$

- Invertálható transzformációk csoportot alkotnak

## 2D forgatás

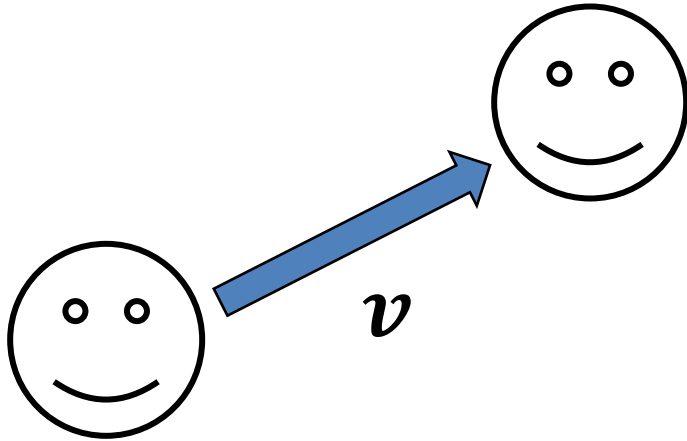


$$[x', y', 1] = [x, y, 1] \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## z tengely körüli 3D forgatás

$$[x', y', z', 1] = [x, y, z, 1] \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

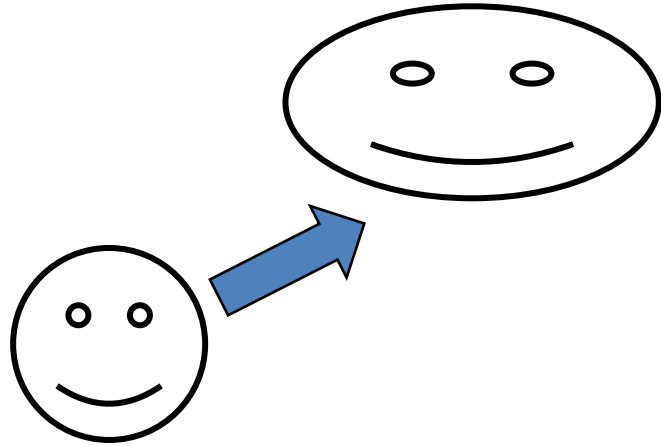
# 3D eltolás



$$[x', y', z', 1] = [x, y, z, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 1 \end{bmatrix}$$

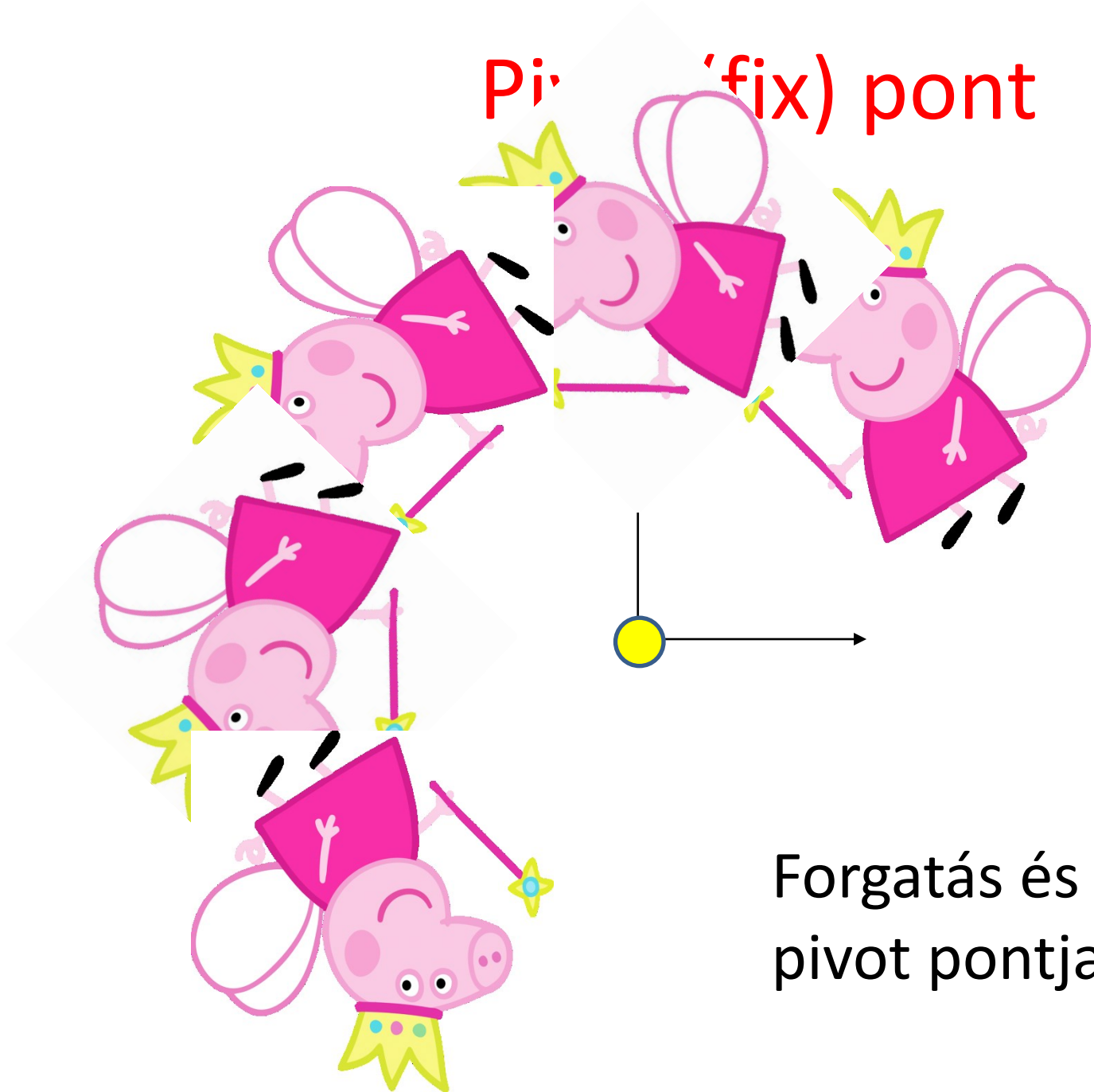


# 3D skálázás



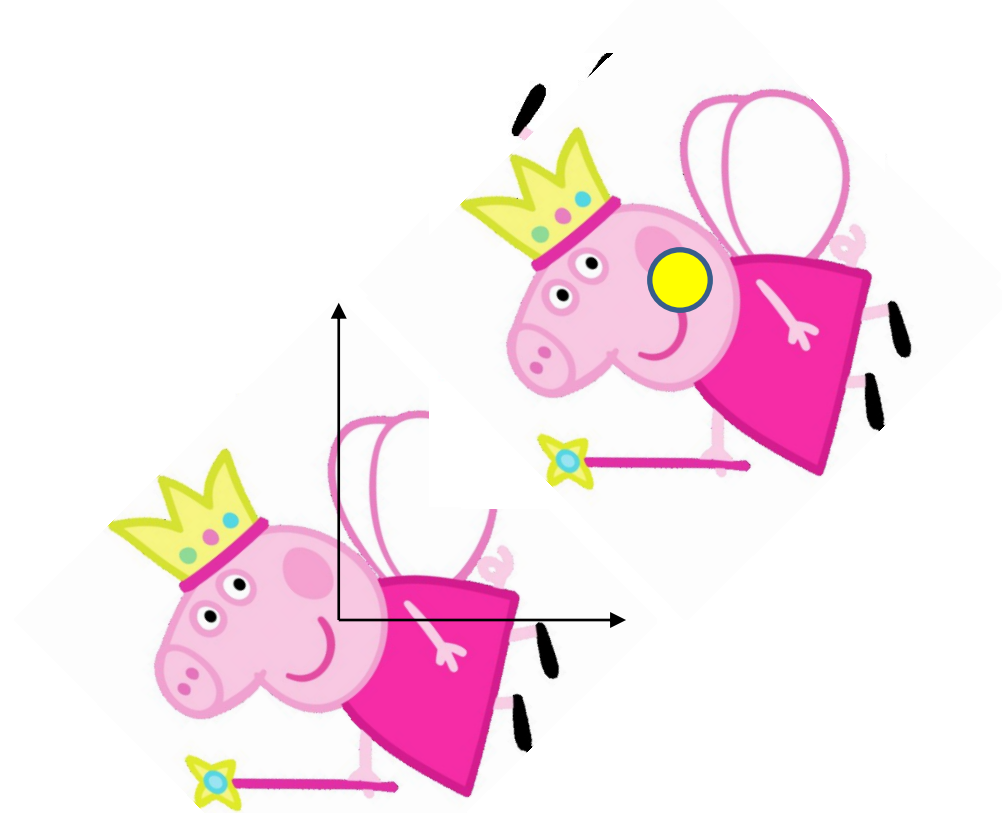
$$[x', y', z', 1] = [x, y, z, 1] \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pi ('fix) pont



Forgatás és skálázás  
pivot pontja az origó

# Pivot (fix) pont



1. Pivot az origóba
2. Forgatás vagy skálázás az origó körül
3. Origó vissza

# mat4 osztály

```
struct mat4 { // row-major matrix 4x4
    vec4 rows[4];
    mat4(vec4& it, vec4& jt, vec4& kt, vec4& ot) {
        rows[0] = it; rows[1] = jt; rows[2] = kt; rows[3] = ot;
    }
    vec4& operator[](int i) { return rows[i]; }
};

inline vec4 operator*(vec4& v, mat4& m) {
    return v.x * m[0] + v.y * m[1] + v.z * m[2] + v.w * m[3];
}

inline mat4 operator*(mat4& ml, mat4& mr) {
    mat4 res;
    for (int i = 0; i < 4; i++) res.rows[i] = ml.rows[i] * mr;
    return res;
}

void GPUProgram::setUniform(const mat4& mat, char * name) {
    int location = getLocation(name);
    if (location >= 0) glUniformMatrix4fv(location, 1, GL_TRUE, mat);
}
```

# mat4 „konstruktorok”

```
inline mat4 TranslateMatrix(vec3 t) {
    return mat4(vec4(1, 0, 0, 0),
                vec4(0, 1, 0, 0),
                vec4(0, 0, 1, 0),
                vec4(t.x, t.y, t.z, 1));
}

inline mat4 ScaleMatrix(vec3 s) {
    return mat4(vec4(s.x, 0, 0, 0),
                vec4(0, s.y, 0, 0),
                vec4(0, 0, s.z, 0),
                vec4(0, 0, 0, 1));
}

inline mat4 RotationXYMatrix(float fi) {
    return mat4(vec4(cos(fi), sin(fi), 0, 0),
                vec4(-sin(fi), cos(fi), 0, 0),
                vec4(0, 0, 1, 0),
                vec4(0, 0, 0, 1));
}
```

# Affin transzformációk

- Párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe képeznek le.
- Szokásos transzformációk (eltolás, forgatás, skálázás, nyírás, tükrözés) ilyenek.
- Mátrixszorzás ambiens koordinátákra, ahol a negyedik oszlop  $[0,0,0,1]^T$
- Eltolásnak nincs pivot (fix) pontja, a többinek az origó. Ha mást szeretnénk, akkor eltolás, transzformáció, visszatolás.

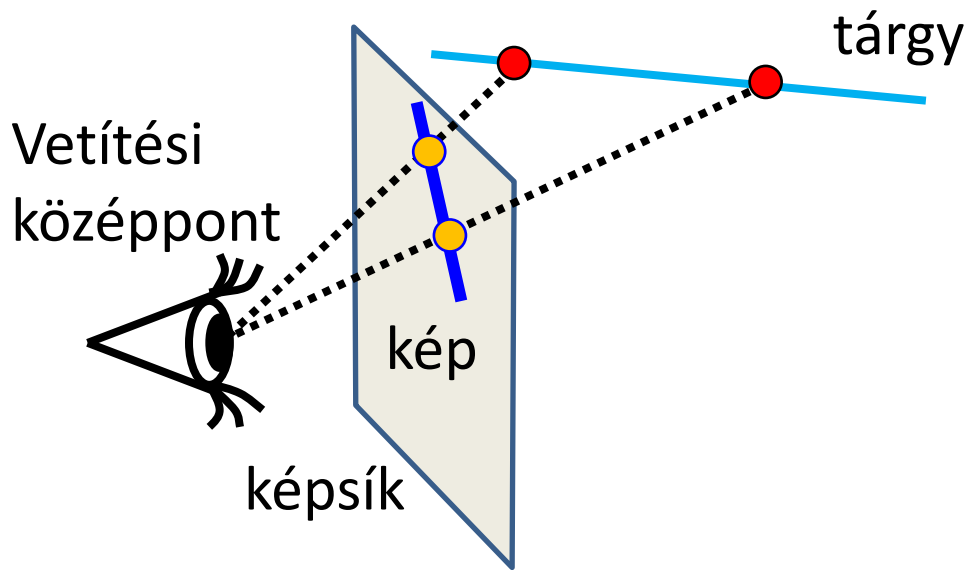
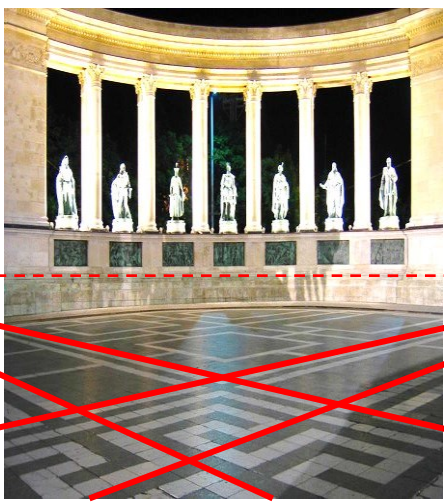
”μὴ εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν  
ἐπὶ γεωμετρίας”

Εὐκλείδης

# Homogén lineáris transzformációk

Szirmay-Kalos László

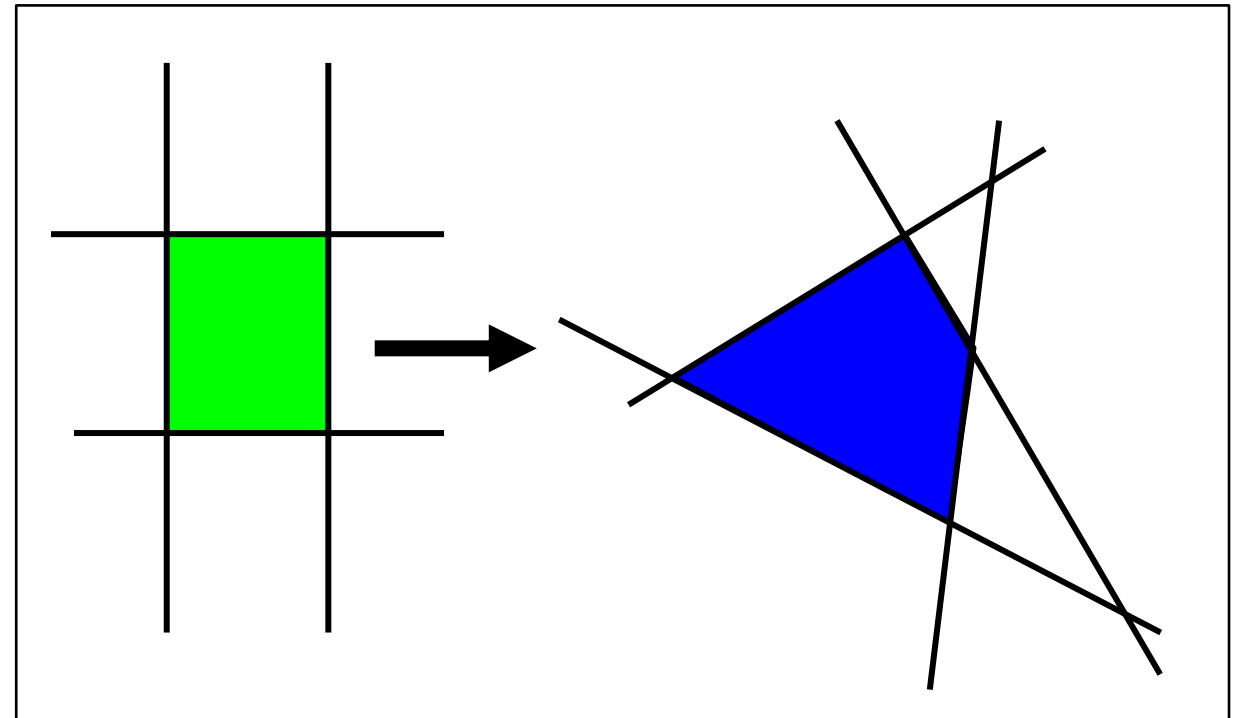




## Perspektíva

Egyenesből egyenest  
Nem párhuzamostartó

## Perspektíva



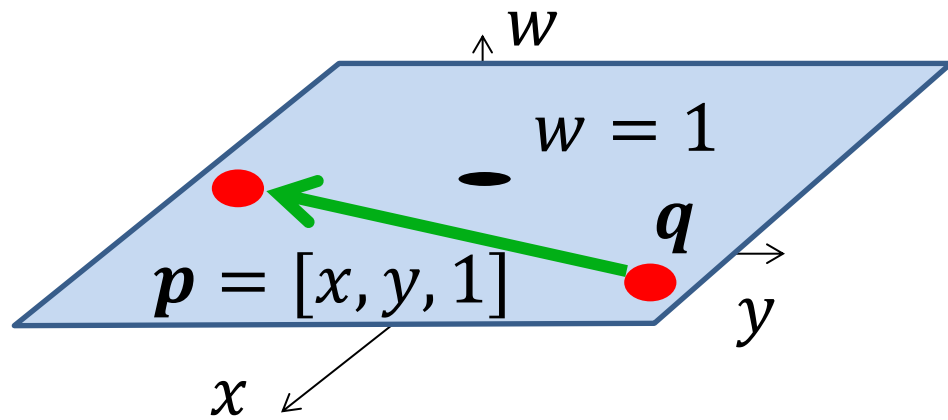
## Euklideszi geometria lyukas

Végtelen távoli pontok is kellenek  
Projektív geometria

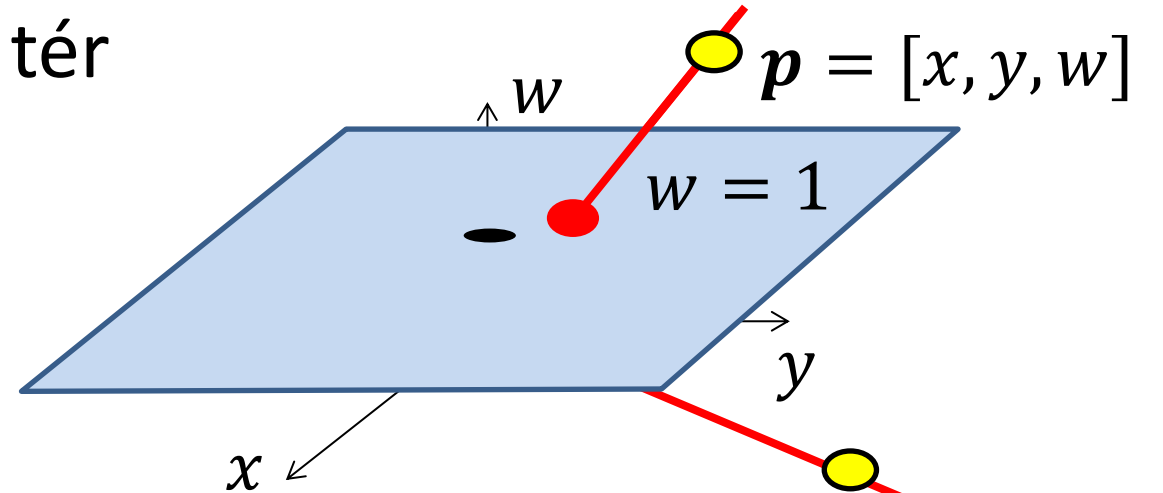


# Analitikus geometriák: külső nézet

Ambiens tér



**Euklideszi:**  $w = 1$



**Projektív**

$q = [x, y, 0]$

$$[x', y', z', 1] = [x, y, z, 1] \begin{bmatrix} \mathbf{i}'_x & \mathbf{i}'_y & \mathbf{i}'_z & 0 \\ \mathbf{j}'_x & \mathbf{j}'_y & \mathbf{j}'_z & 0 \\ \mathbf{k}'_x & \mathbf{k}'_y & \mathbf{k}'_z & 0 \\ \mathbf{o}'_x & \mathbf{o}'_y & \mathbf{o}'_z & 1 \end{bmatrix}$$

Affin transzformáció

$$[x', y', z', w'] = [x, y, z, w] \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}$$

Homogén lineáris transzformáció

# Homogén koordinátavektor szorzása mátrixszal

- Affin transzformációkat is tartalmazza
- 2D transzformáció  $3 \times 3$  mátrix:  $[X', Y', w'] = [X, Y, w] \cdot \mathbf{T}_{3 \times 3}$
- 3D transzformáció  $4 \times 4$  mátrix:  $[X', Y', Z', w'] = [X, Y, Z, w] \cdot \mathbf{T}_{4 \times 4}$
- Transzformációk konkatenációja: Asszociatív

$$\begin{aligned} [X', Y', Z', w'] &= (\dots ([X, Y, Z, w] \cdot \mathbf{T}_1) \cdot \mathbf{T}_2) \dots \cdot \mathbf{T}_n \\ &= [X, Y, Z, w] \cdot (\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \dots \cdot \mathbf{T}_n) \\ &= [X, Y, Z, w] \cdot \mathbf{T} \end{aligned}$$

# Homogén lineáris transzformációk tulajdonságai

- Egyenest egyenesbe, szakaszt szakaszba, síkot síkba  
háromszöget háromszögbe, kombinációkat kombinációkba,  
konvex kombinációkat konvex kombinációkba
- Ha nem invertálható, akkor elfajulás lehetséges

**Egyenestartó** ( $t \in (-\infty, +\infty)$ ); **Szakasztartó** ( $t \in [0,1]$ )

$$[X(t), Y(t), Z(t), w(t)] = [X_1, Y_1, Z_1, w_1]t + [X_2, Y_2, Z_2, w_2](1 - t)$$

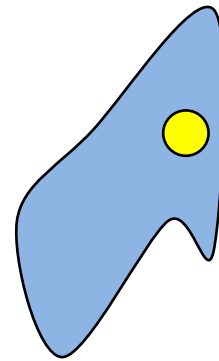
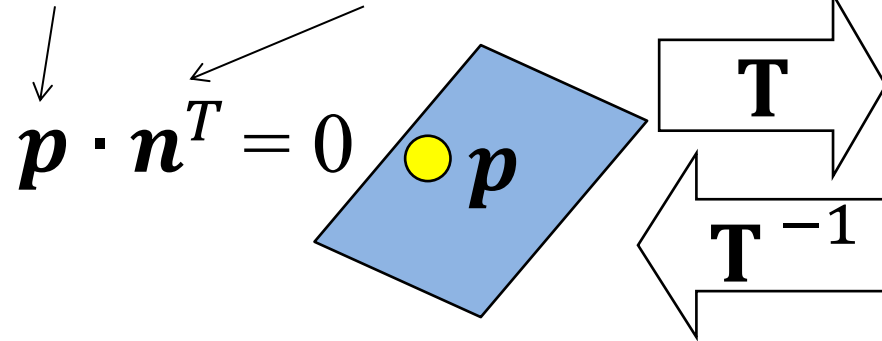
$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_1 t + \mathbf{p}_2 (1 - t) \quad // \cdot \mathbf{T}$$

$$\mathbf{p}^*(t) = (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{T})t + (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{T})(1 - t)$$

$$\mathbf{p}^*(t) = \mathbf{p}_1^* t + \mathbf{p}_2^* (1 - t)$$

# Invertálható homogén lineáris transzformációk: síkot síkba

$$[X, Y, Z, w] \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \\ d \end{bmatrix} = 0$$



$$\mathbf{p}^* = \mathbf{p} \cdot \mathbf{T}$$

$$\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{p}$$

$$(\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{T}^{-1}) \cdot \mathbf{n}^T = 0$$

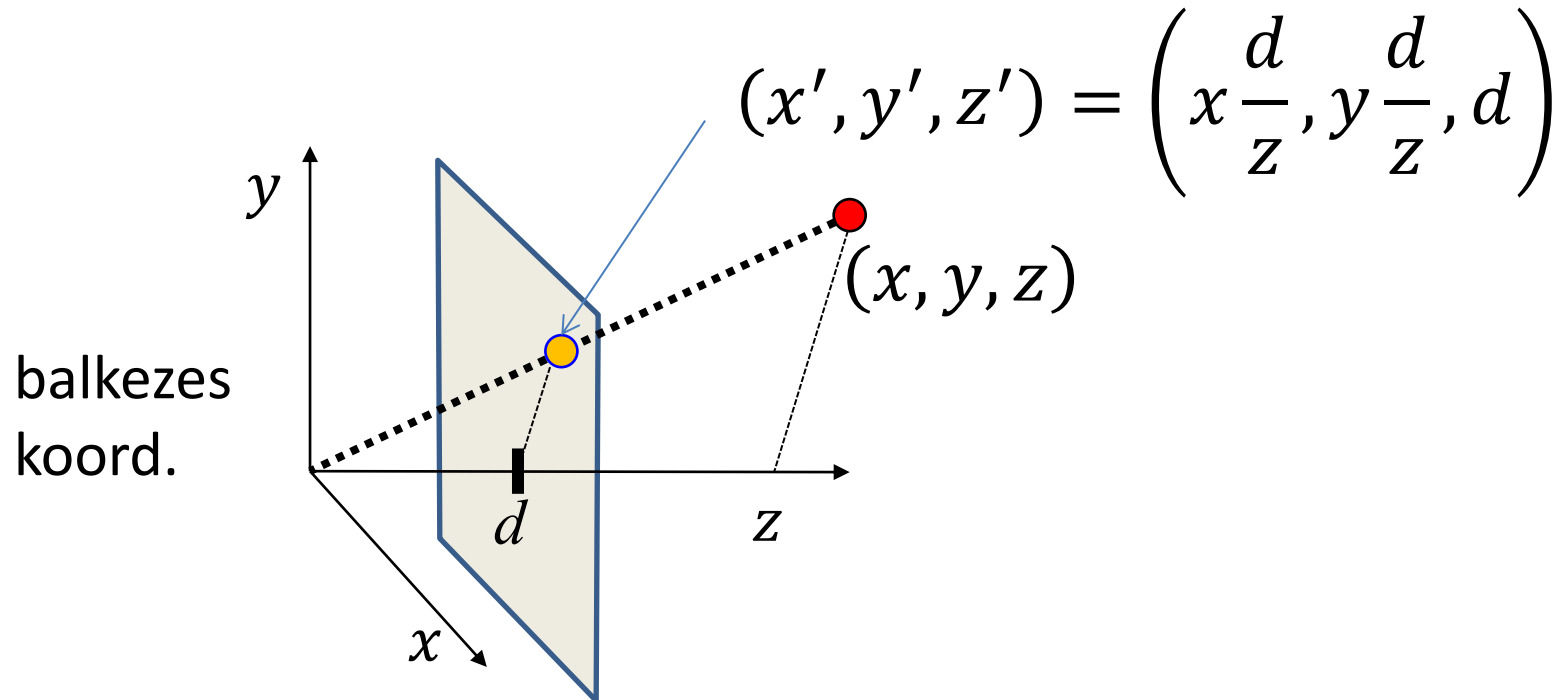
$$\mathbf{p}^* \cdot (\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{n}^T) = 0$$

$$\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{n}^{*T} = 0$$

Sík transzformáltja:

$$\mathbf{n}^{*T} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{n}^T$$

# Középpontos vetítés (projekció)

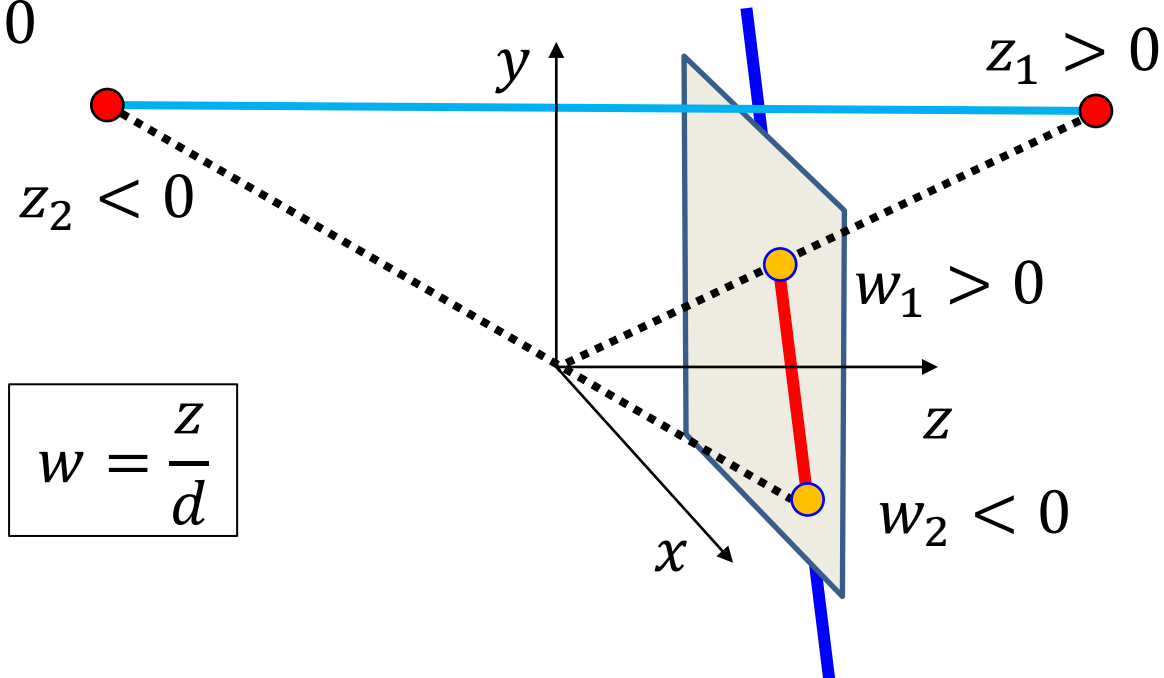
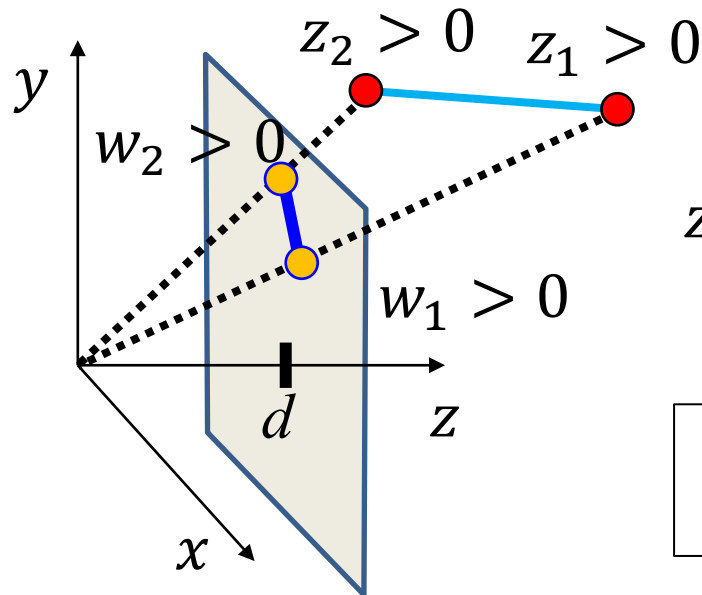


$$[x', y', z', 1] = \left[ x \frac{d}{z}, y \frac{d}{z}, d, 1 \right] \sim \left[ x, y, z, \frac{z}{d} \right]$$

$$[x, y, z, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[ x, y, z, \frac{z}{d} \right] \sim [x', y', z', 1]$$

# Átfordulási probléma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$w = \frac{z}{d}$$

Projektív egyenes (topológia)

$$[X(t), Y(t), Z(t), w(t)] = [X_1, Y_1, Z_1, w_1]t + [X_2, Y_2, Z_2, w_2](1 - t)$$

