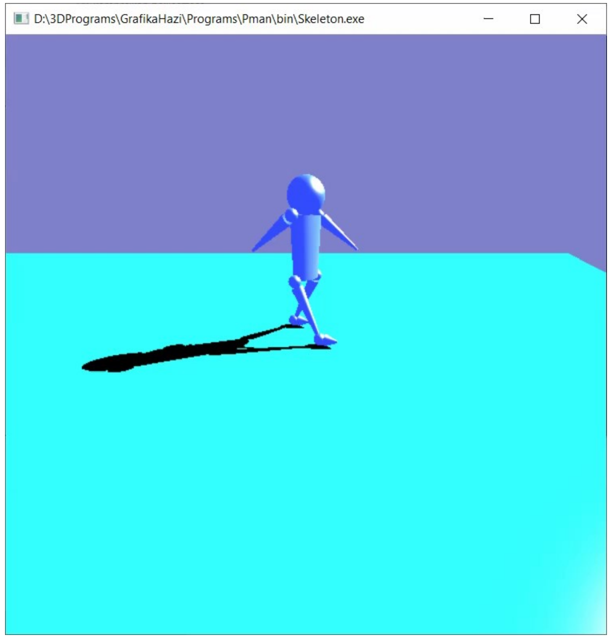
”τὰ πάντα ῥεῖ καὶ οὐδὲν μένει.”
Ἡράκλειτος

Affin transzformációk

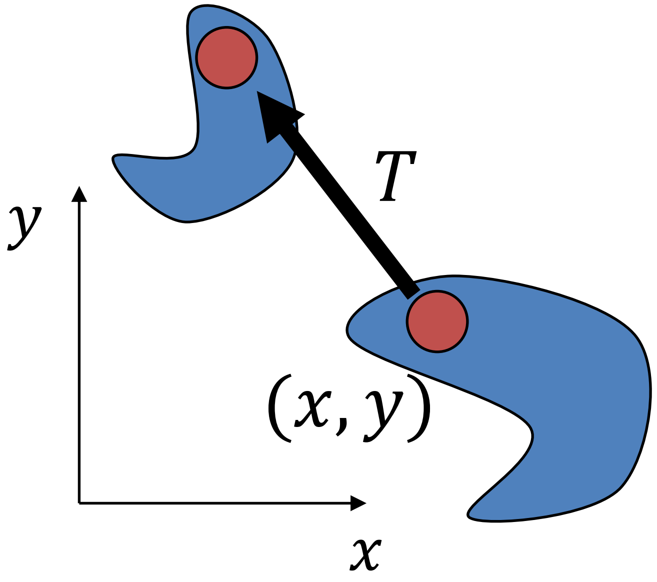
Szirmay-Kalos László



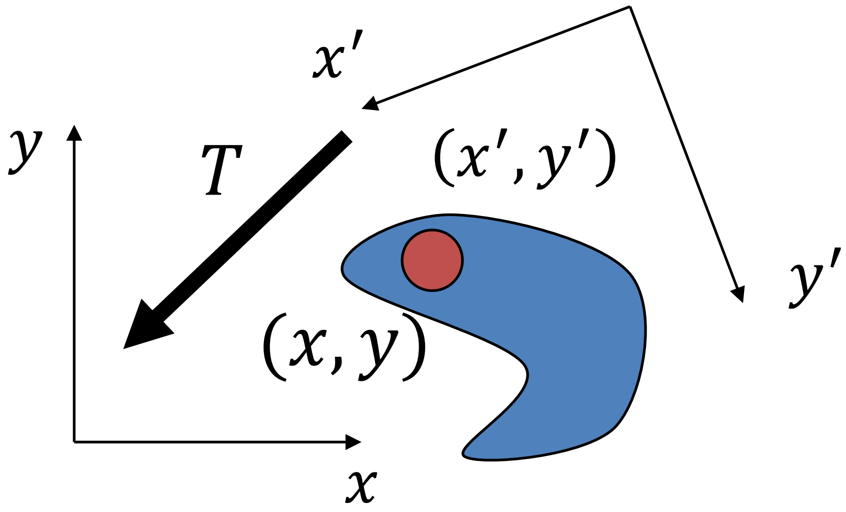
Transzformációk (Euklideszi geometria, Descartes koordináták)

Ponthoz pontot (koordinátákhoz koordinátákat) rendel

$$(x', y') = T(x, y)$$

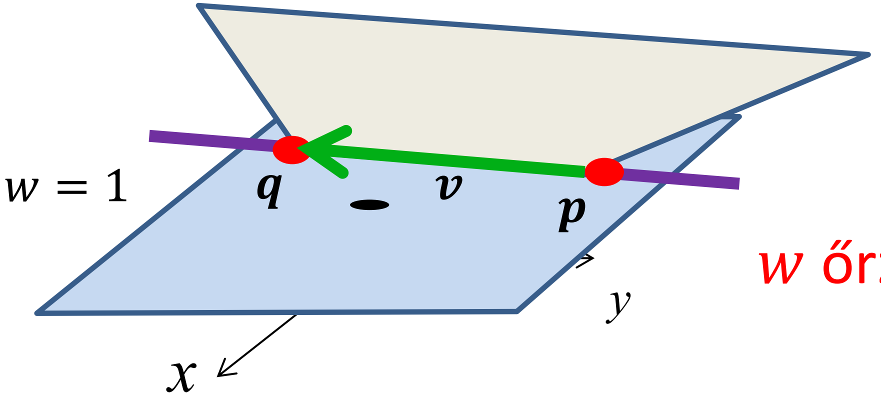


$$(x', y') = T(x, y)$$



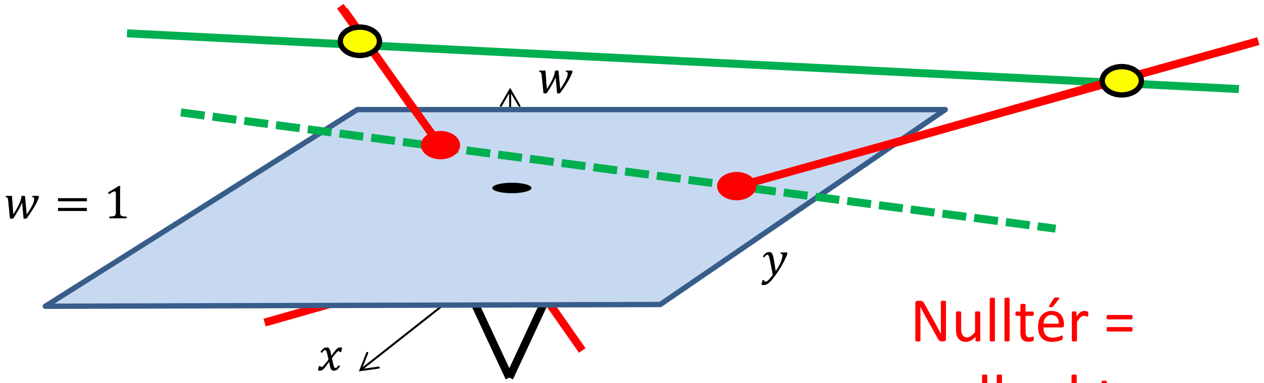
Tönkre tehetik reprezentációt és az egyenletet!
Legalább az egyenes (sík) maradjon meg.

Külső nézet: pontot pontba, egyenest egyenesbe



Euklideszi: $w = 1$

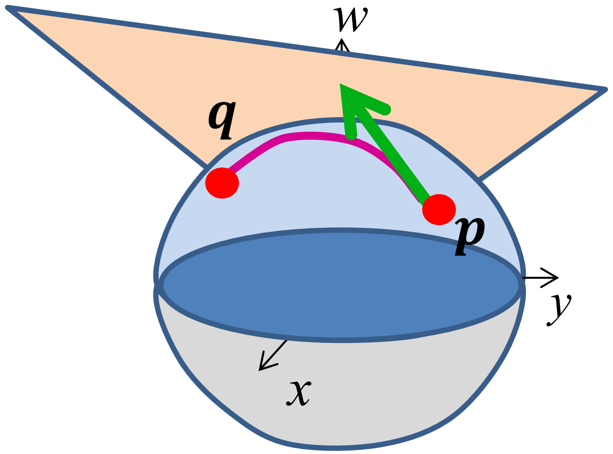
w őrzés



Projektív: origón kívüli

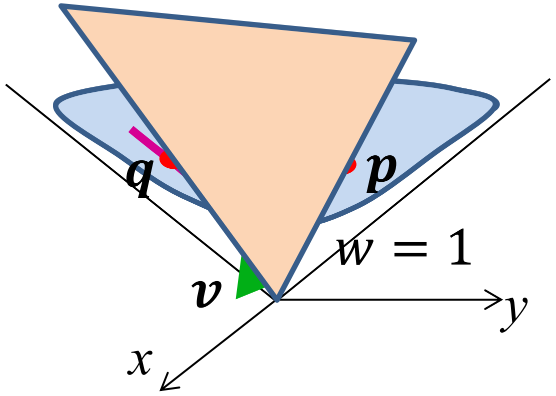
Nulltér =
nullvektor

Altér altérbe:
Lineáris transzformáció
Mátrixszorzás



Elliptikus: $x^2 + y^2 + w^2 = 1$

Skaláris szorzat
őrzés



Hiperbolikus: $x^2 + y^2 - w^2 = -1$

Skaláris (Lorentz)
szorzat őrzés

Szeretjük a mátrixokat, mert szorzásuk asszociatív

- Transzformációk konkatenációja: Asszociatív

$$
\begin{aligned}
[x', y', z', w'] &= (\dots([x, y, z, w] \cdot \boldsymbol{T}_1) \cdot \boldsymbol{T}_2) \dots \cdot \boldsymbol{T}_n \\
&= [x, y, z, w] \cdot (\boldsymbol{T}_1 \cdot \boldsymbol{T}_2 \cdot \ \dots \cdot \boldsymbol{T}_n) \\
&= [x, y, z, w] \cdot \boldsymbol{T}
\end{aligned}
$$

- Invertálható transzformációk <u>csoportot</u> alkotnak

mat4 osztály

```
struct mat4 { // row-major matrix 4x4
   vec4 rows[4];
   mat4(vec4& it, vec4& jt, vec4& kt, vec4& ot) {
       rows[0] = it; rows[1] = jt; rows[2] = kt; rows[3] = ot;
   }
   vec4& operator[](int i) { return rows[i]; }
};

inline vec4 operator*(vec4& v, mat4& m) {
   return v.x * m[0] + v.y * m[1] + v.z * m[2] + v.w * m[3];
}

inline mat4 operator*(mat4& ml, mat4& mr) {
   mat4 res;
   for (int i = 0; i < 4; i++) res.rows[i] = ml.rows[i] * mr;
   return res;
}

void GPUProgram::setUniform(const mat4& mat, char * name) {
   int location = getLocation(name);
   if (location >= 0) glUniformMatrix4fv(location, 1, GL_TRUE, mat);
}
```

Affin transzformációk: Euklideszi geometria egyenes (és párhuzamosság) tartó transzformációi

$$\boxed{[x', y', w'] = [x, y, w]\begin{bmatrix} \boldsymbol{i}'_x & \boldsymbol{i}'_y & 0 \\ \boldsymbol{j}'_x & \boldsymbol{j}'_y & 0 \\ \boldsymbol{o}'_x & \boldsymbol{o}'_y & 1 \end{bmatrix}}$$

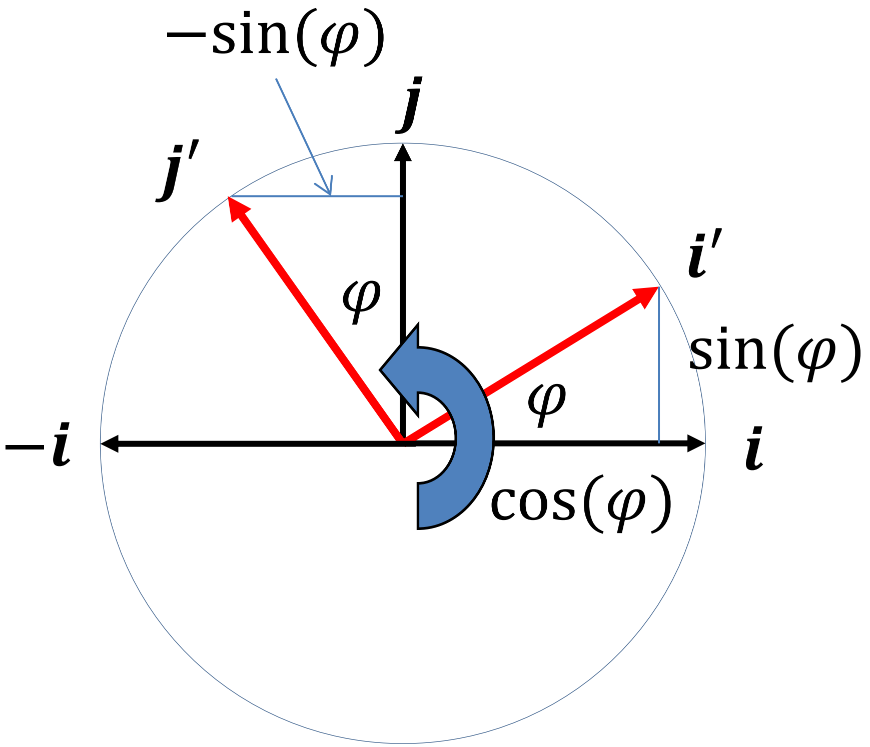
w őrzés

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= ax + by + c \\ y' &= dx + ey + f \end{aligned}}$$

Példák:

- Eltolás, elforgatás, tükrözés = egybevágóság
- Nagyítás/kicsinyítés = hasonlóság (szögtartás)
- Irányfüggő nyújtás , nyírás , …

2D forgatás

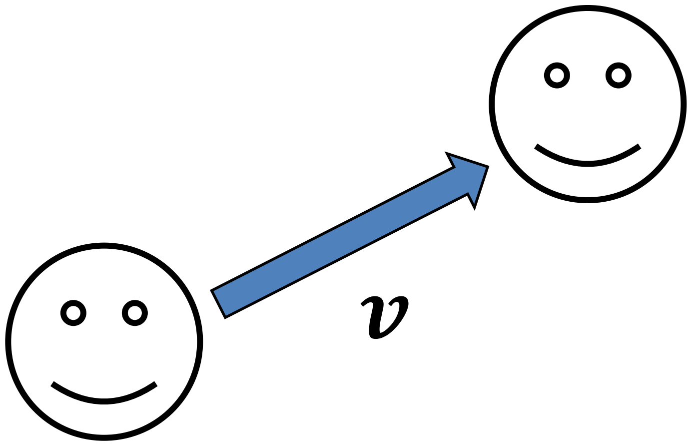


$$[x', y', 1] = [x, y, 1]\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

z tengely körüli 3D forgatás

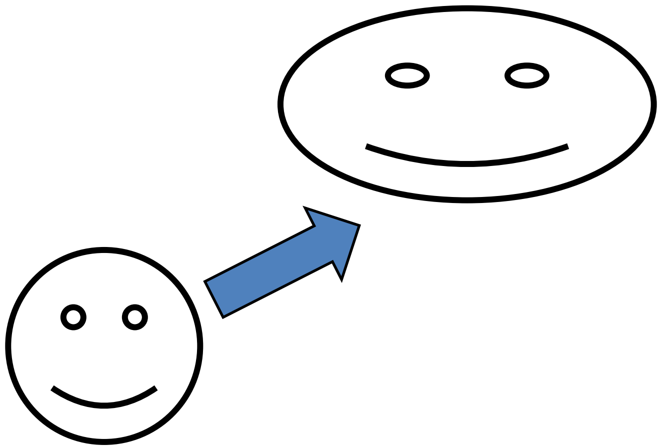
$$[x', y', z', 1] = [x, y, z, 1]\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3D eltolás



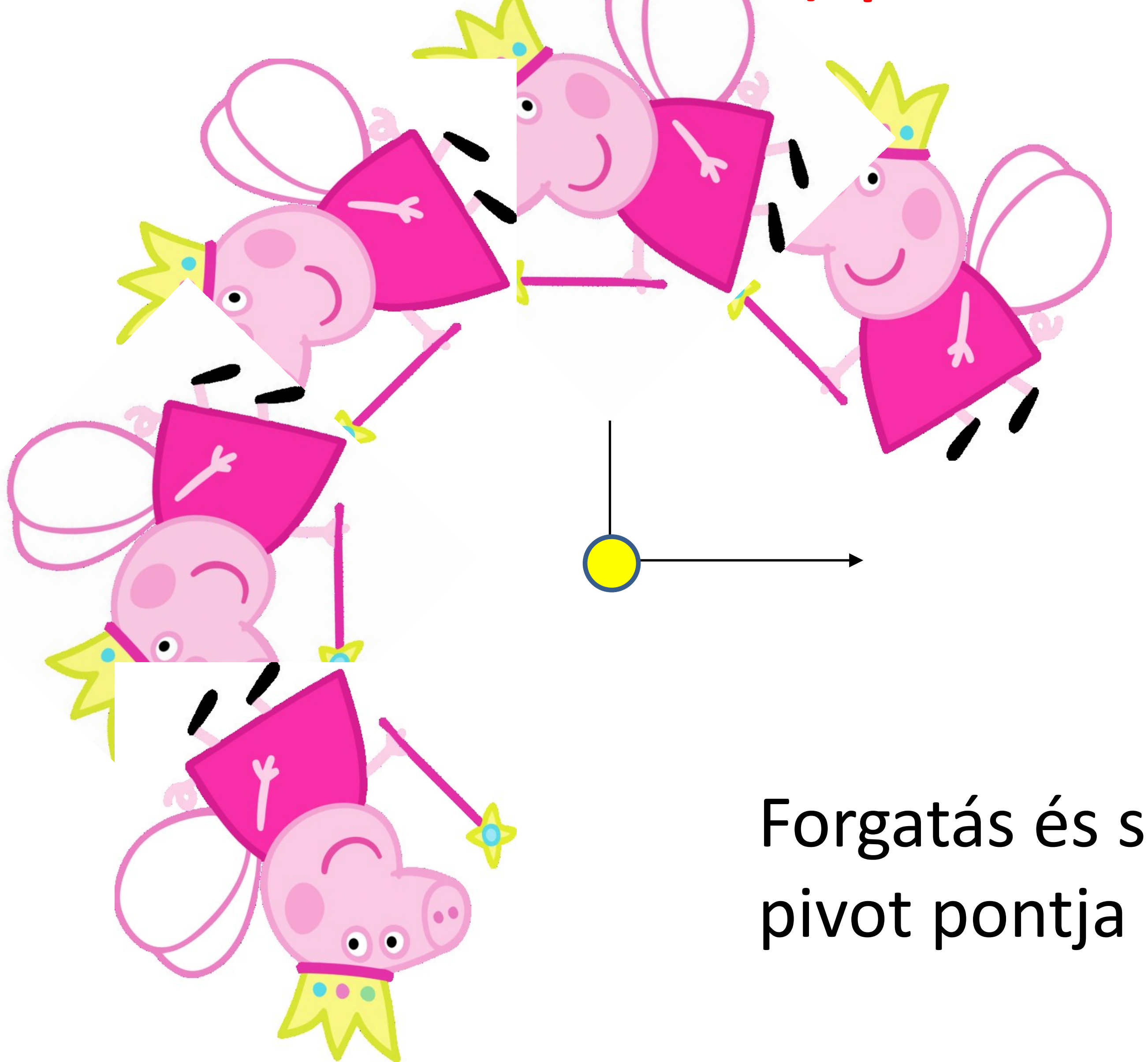
$$[x', y', z', 1] = [x, y, z, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 1 \end{bmatrix}$$

3D skálázás



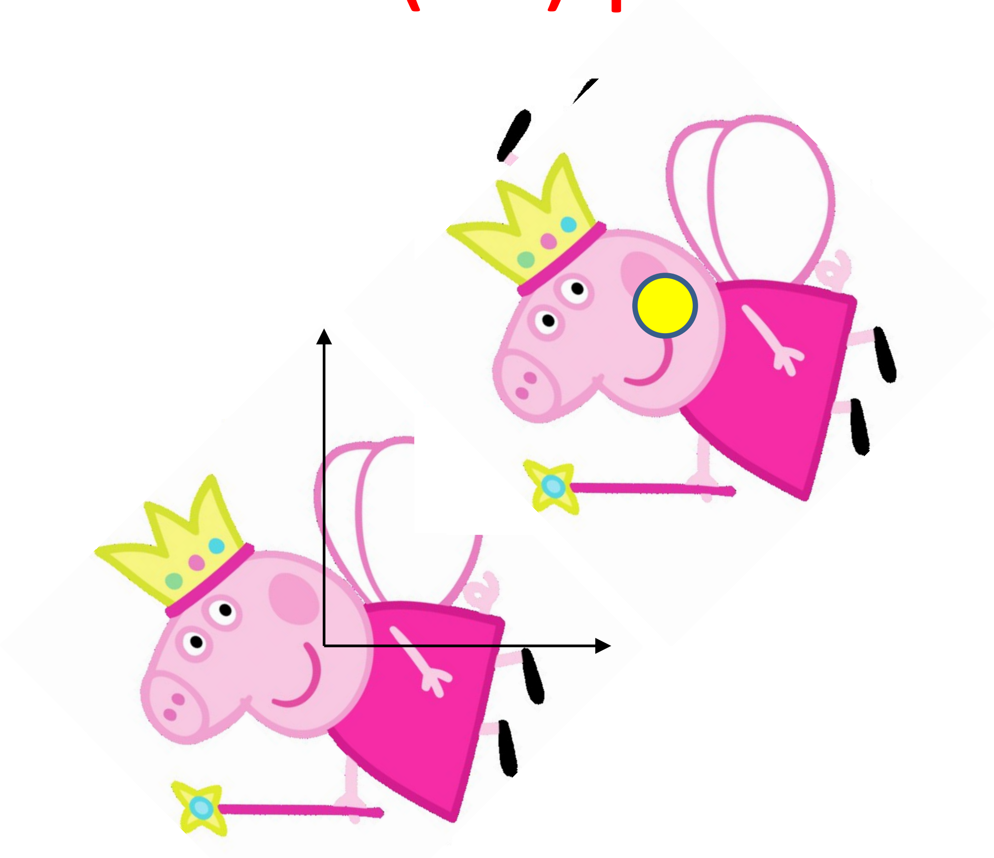
$$[x', y', z', 1] = [x, y, z, 1]\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pivot (fix) pont



Forgatás és skálázás
pivot pontja az origó

Pivot (fix) pont



1. Pivot az origóba
2. Forgatás vagy skálázás az origó körül
3. Origó vissza

mat4 „konstruktorok”

```
inline mat4 TranslateMatrix(vec3 t) {
      return mat4(vec4(1,   0,   0,   0),
                  vec4(0,   1,   0,   0),
                  vec4(0,   0,   1,   0),
                  vec4(t.x, t.y, t.y, 1));
}

inline mat4 ScaleMatrix(vec3 s) {
      return mat4(vec4(s.x, 0,   0,   0),
                  vec4(0,   s.y, 0,   0),
                  vec4(0,   0,   s.z, 0),
                  vec4(0,   0,   0,   1));
}

inline mat4 RotationXYMatrix(float fi) {
      return mat4(vec4( cos(fi), sin(fi), 0,  0),
                  vec4(-sin(fi), cos(fi), 0,  0),
                  vec4(0,        0,       1,  0),
                  vec4(0,        0,       0,  1));
}
```

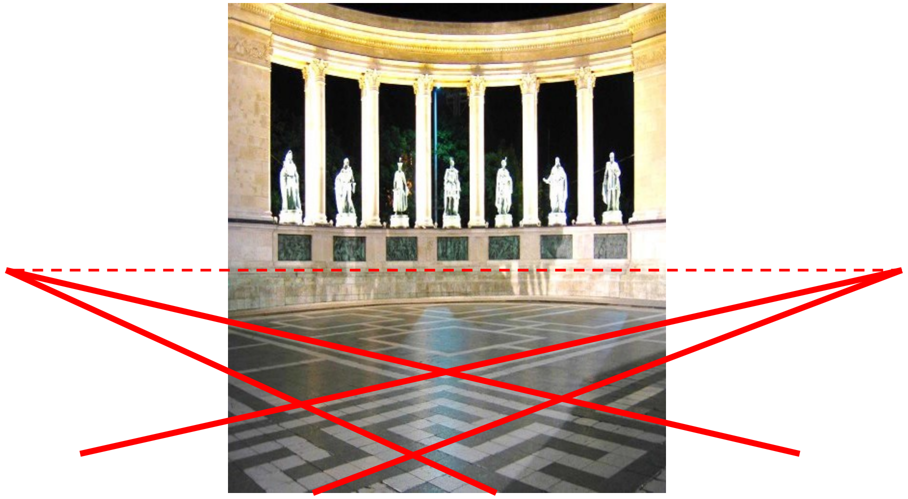
”μὴ εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπί γεωμετρίαν”

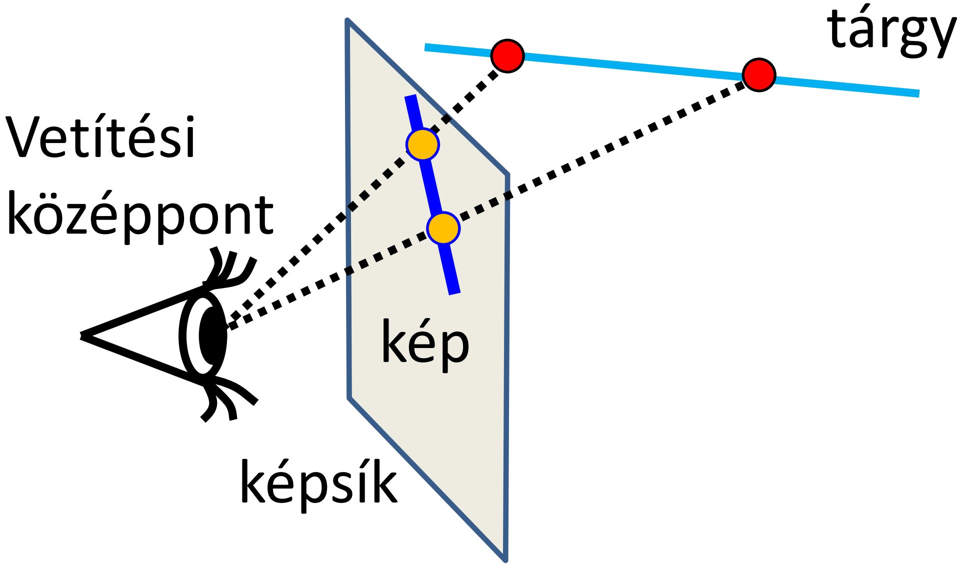
Εὐκλείδης

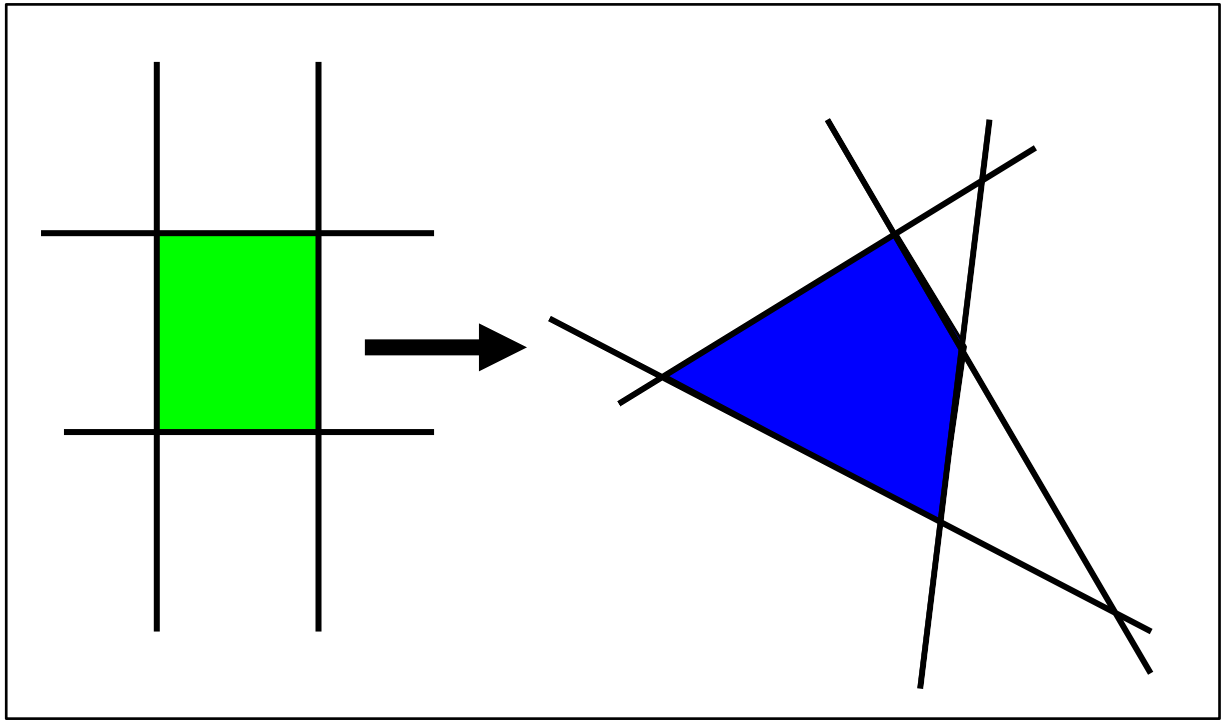
Homogén lineáris transzformációk

Szirmay-Kalos László

Perspektíva







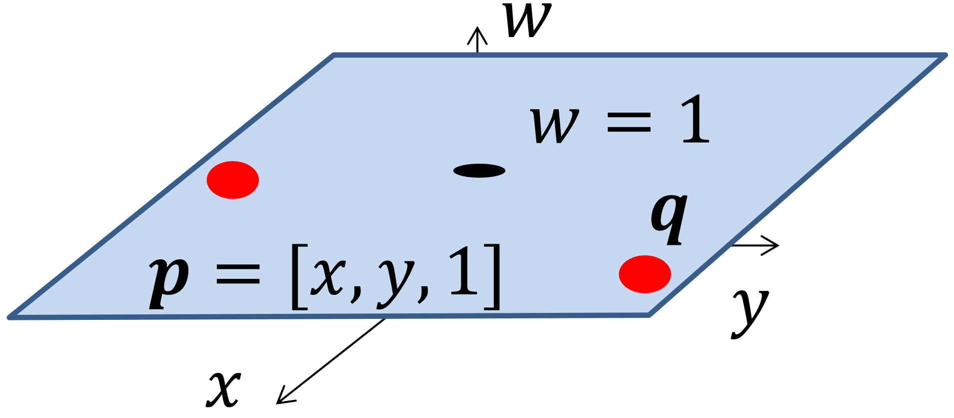
<u>Perspektíva</u>

Egyenesből egyenest
Nem párhuzamostartó

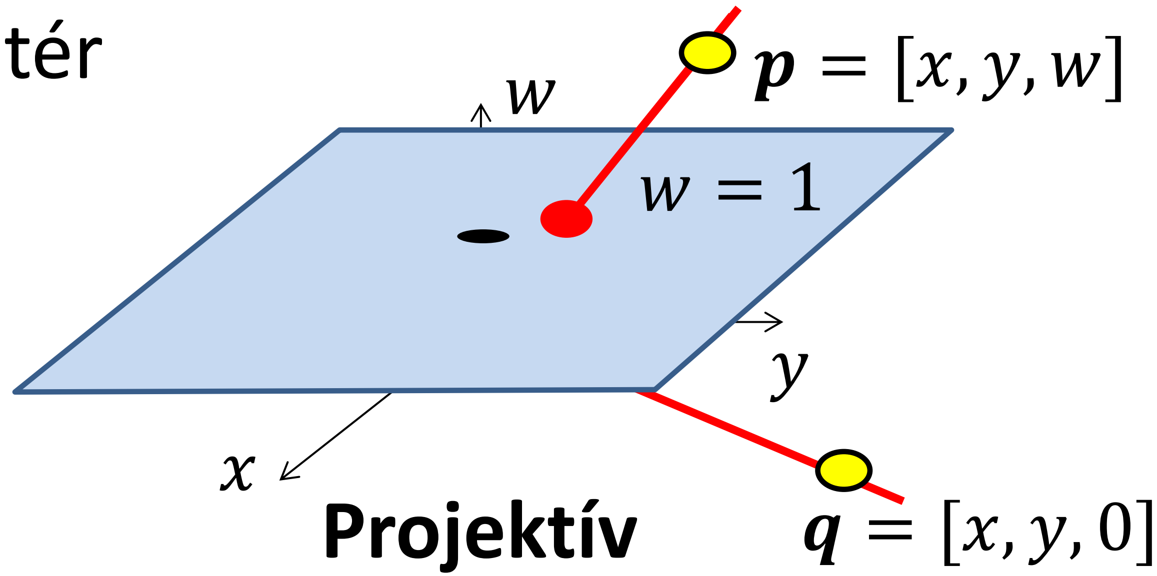
<u>Euklideszi geometria lyukas</u>

Végtelen távoli pontok is kellenek
Projektív geometria

Analitikus geometriák: külső nézet



Ambiens tér



Euklideszi: $w = 1$

Projektív

$$[x', y', z', 1] = [x, y, z, 1]\begin{bmatrix} \boldsymbol{i}'_x & \boldsymbol{i}'_y & \boldsymbol{i}'_z & 0 \\ \boldsymbol{j}'_x & \boldsymbol{j}'_y & \boldsymbol{j}'_z & 0 \\ \boldsymbol{k}'_x & \boldsymbol{k}'_y & \boldsymbol{k}'_z & 0 \\ \boldsymbol{o}'_x & \boldsymbol{o}'_y & \boldsymbol{o}'_z & 1 \end{bmatrix}$$

$$[x', y', z', w'] = [x, y, z, w]\begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_{11} & \boldsymbol{m}_{12} & \boldsymbol{m}_{13} & \boldsymbol{m}_{14} \\ \boldsymbol{m}_{21} & \boldsymbol{m}_{22} & \boldsymbol{m}_{23} & \boldsymbol{m}_{24} \\ \boldsymbol{m}_{31} & \boldsymbol{m}_{32} & \boldsymbol{m}_{33} & \boldsymbol{m}_{34} \\ \boldsymbol{m}_{41} & \boldsymbol{m}_{42} & \boldsymbol{m}_{43} & \boldsymbol{m}_{44} \end{bmatrix}$$

Affin transzformáció

Homogén lineáris transzformáció

Homogén lineáris transzformációk tulajdonságai

- Egyenest egyenesbe, szakaszt szakaszba, síkot síkba háromszöget háromszögbe, kombinációkat kombinációkba, konvex kombinációkat konvex kombinációkba

Egyenestartó $(t \in (-\infty, +\infty))$; **Szakasztartó** $(t \in [0,1])$

$$[X(t), Y(t), Z(t), w(t)] = [X_1, Y_1, Z_1, w_1]t + [X_2, Y_2, Z_2, w_2](1-t)$$

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}_1 t + \boldsymbol{p}_2(1-t) \qquad // \cdot \mathbf{T}$$

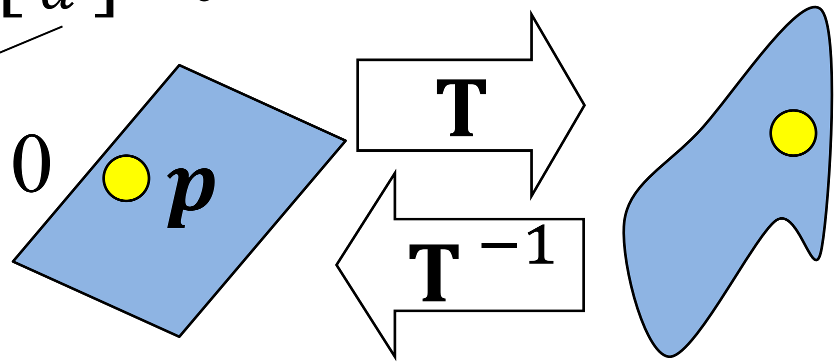
$$\boldsymbol{p}^*(t) = (\boldsymbol{p}_1 \cdot \mathbf{T})t + (\boldsymbol{p}_2 \cdot \mathbf{T})(1-t)$$

$$\boldsymbol{p}^*(t) = \boldsymbol{p}_1^* t + \boldsymbol{p}_2^*(1-t)$$

Homogén lineáris transzformációk: síkot síkba

$$[X,Y,Z,w]\begin{bmatrix}n_x\\ n_y\\ n_z\\ d\end{bmatrix}=0$$

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{n}^T=0$$



$$\boldsymbol{p}^*=\boldsymbol{p}\cdot\mathbf{T}$$

$$\boldsymbol{p}^*\cdot\mathbf{T}^{-1}=\boldsymbol{p}$$

$$(\boldsymbol{p}^*\cdot\mathbf{T}^{-1})\cdot\boldsymbol{n}^T=0$$

$$\boldsymbol{p}^*\cdot(\mathbf{T}^{-1}\cdot\boldsymbol{n}^T)=0$$

$$\boldsymbol{p}^*\cdot\boldsymbol{n}^{*T}=0$$

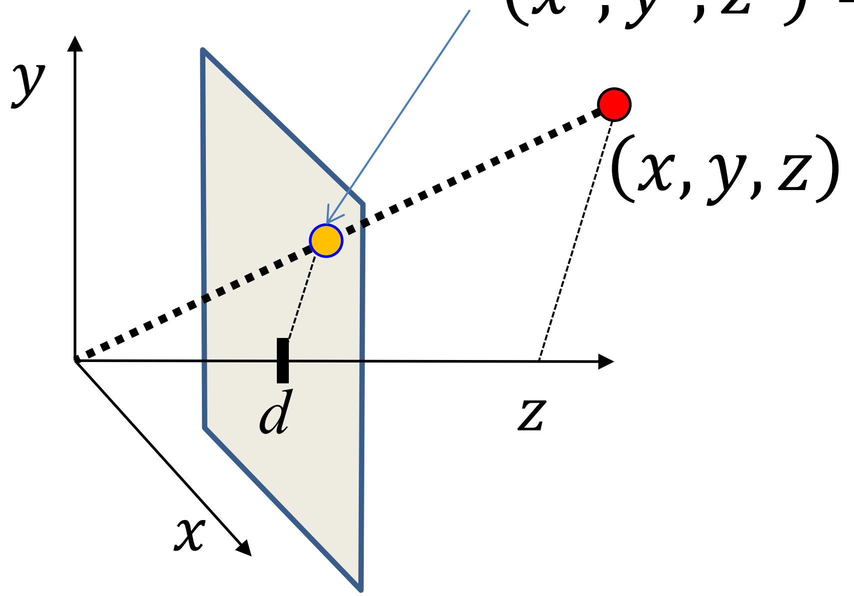
Sík transzformáltja:

$$\boxed{\boldsymbol{n}^{*T}=\mathbf{T}^{-1}\cdot\boldsymbol{n}^T}$$

Középpontos vetítés (projekció)

$$(x',y',z') = \left(x\frac{d}{z}, y\frac{d}{z}, d\right)$$

balkezes koord.

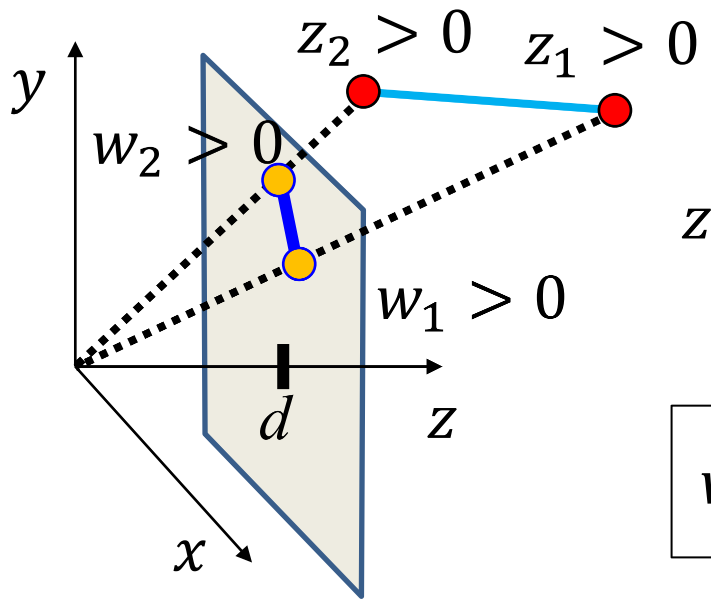


$$[x',y',z',1] = \left[x\frac{d}{z}, y\frac{d}{z}, d, 1\right] \sim \left[x, y, z, \frac{z}{d}\right]$$

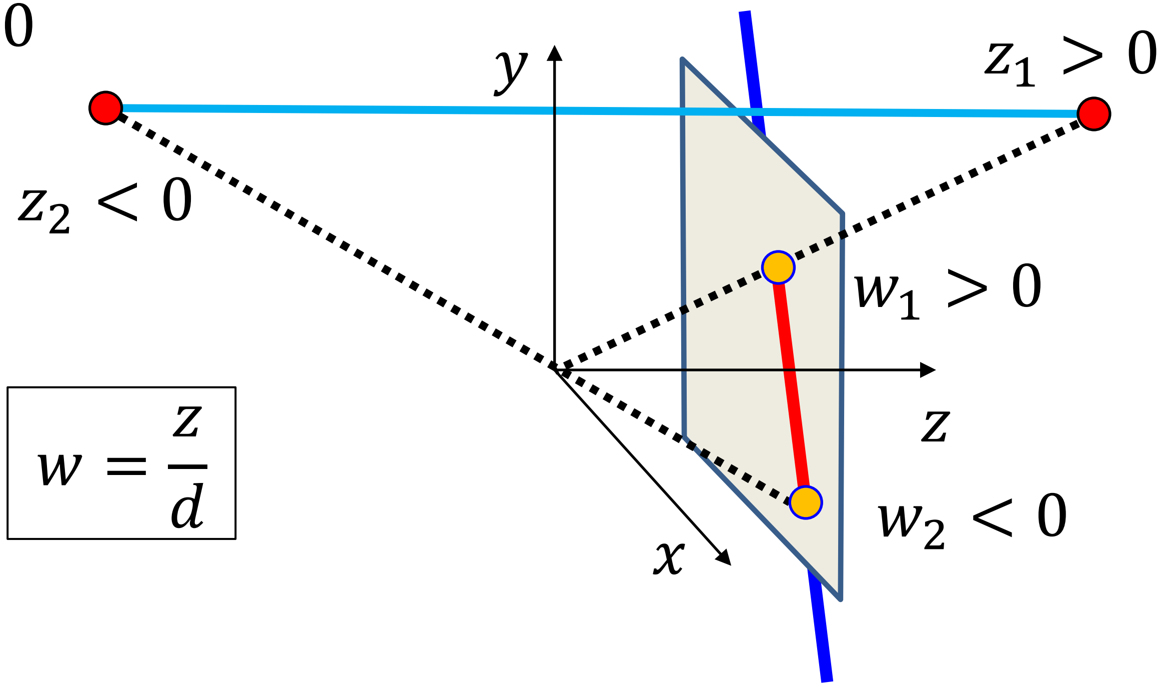
$$[x,y,z,1]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1/d\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \left[x, y, z, \frac{z}{d}\right] \sim [x',y',z',1]$$

Átfordulási probléma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$w = \frac{z}{d}$$



<u>Projektív egyenes (topológia)</u>

$$[X(t), Y(t), Z(t), w(t)] = [X_1, Y_1, Z_1, w_1]t + [X_2, Y_2, Z_2, w_2](1-t)$$