

*"A semmiből egy új, más
világot teremtettem."*

Bolyai János

Geometriai modellezés

1. Pontok és klasszikus görbék

Szirmay-Kalos László

Cél: Euklideszi 2D és 3D világ

2D világ:

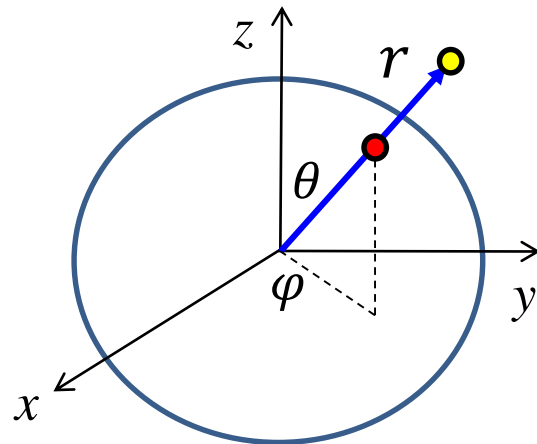
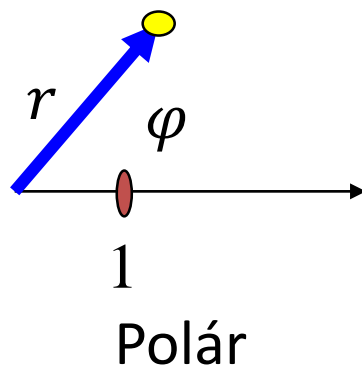
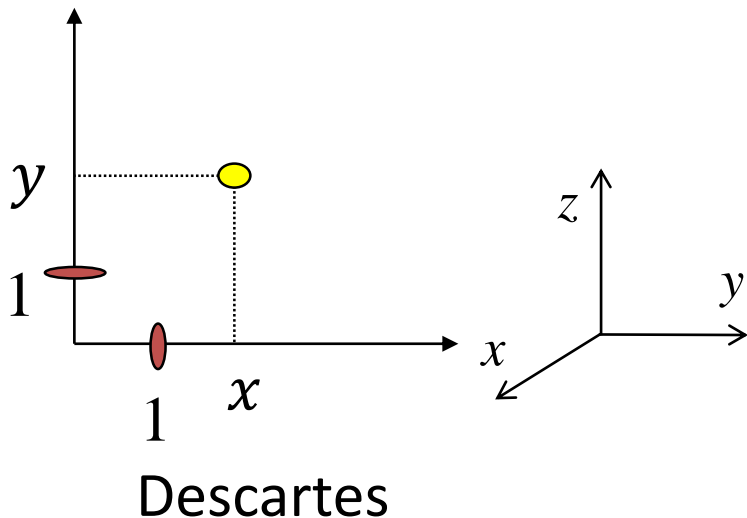
- Pont: 0D
- Síkgörbe: 1D
- Terület: 2D
- Fraktál: 0-2D

3D világ:

- Pont: 0D
- Térgörbe: 1D
- Felület: 2D
- Térfogat: 3D
- Fraktál: 0-3D



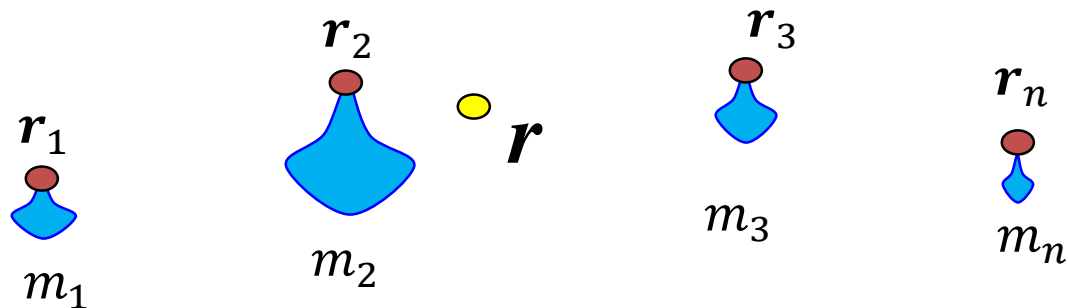
Pontok koordinátarendszerrel



Számokkal!

1. Koordinátarendszer (=referencia geometria)
2. Koordináták(=mérés)

Baricentrikus (homogén) koordináták



Forgatónyomaték zérus

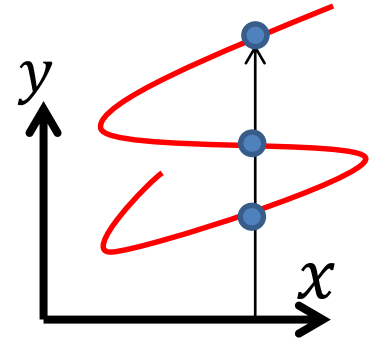
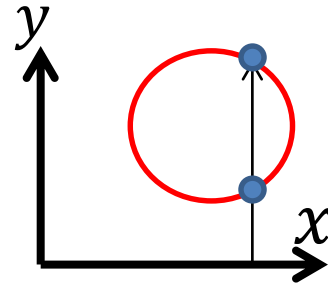
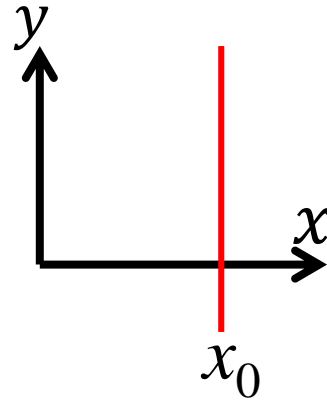
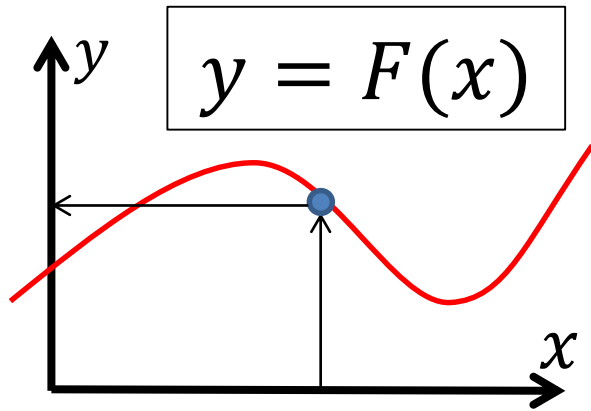
$$\sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) \times m_i \mathbf{g} = 0$$

$$\mathbf{r} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \sum_i \alpha_i \mathbf{r}_i$$

- \mathbf{r} az $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ pontok kombinációja
- Ha a súlyok nem negatívak: konvex kombináció
- Konvex kombináció a konvex burkon belül van
- Egyenes (szakasz) = két pont (konvex) kombinációja
- Sík (háromszög) = három pont (konvex) kombinációja



Görbék (1D): Explicit egyenlet



2D egyenes:

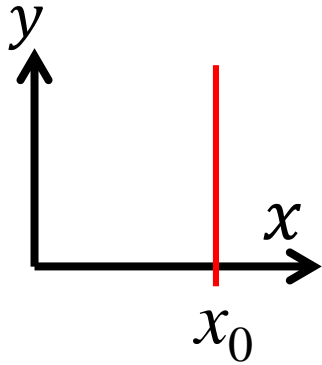
$$y = mx + b$$

Nem jó:

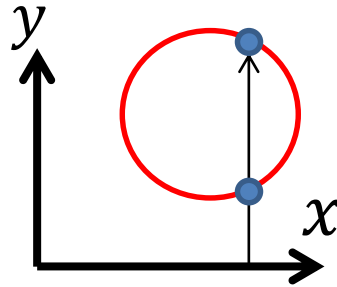
Egy x -hez nem pontosan egy y

Görbe: Implicit egyenlet

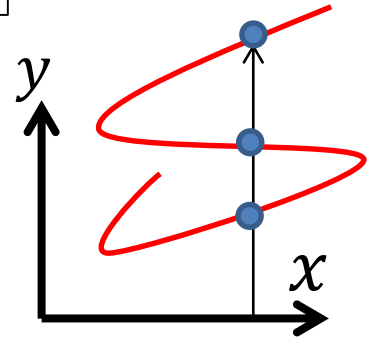
$$f(x, y) = 0 \text{ vagy } f(\mathbf{r}) = 0$$



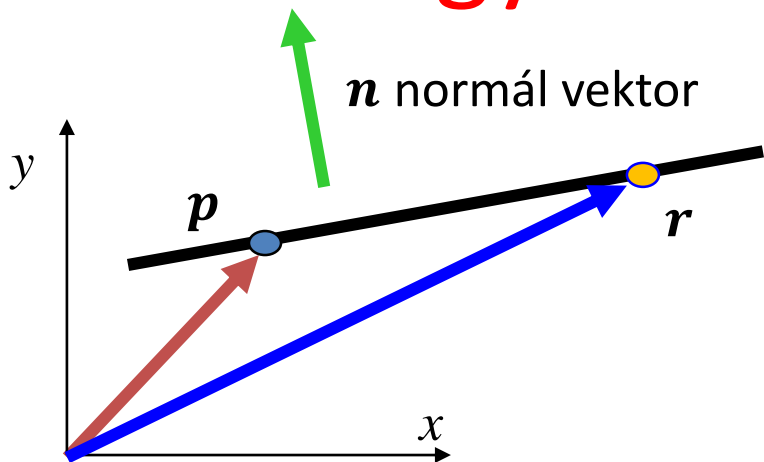
$$x - x_0 = 0$$



$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 - R^2 = 0$$



2D egyenes implicit egyenlete



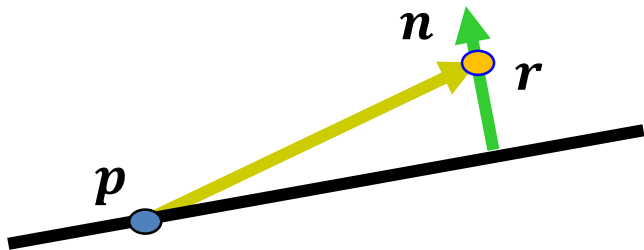
$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{p}) = 0$$

$$n_x(x - p_x) + n_y(y - p_y) = 0$$

$$ax + by + c = 0$$

Ez is: $(ax + by + c)^2 = 0$

2D egyenestől mért távolság:



$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{p}) = \text{Vetület } \mathbf{n}\text{-re} \times \text{az } \mathbf{n} \text{ hossza}$$

Ha \mathbf{n} egységvektor:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{p}) = \text{az előjeles távolság!}$$

Kvadratikus görbék

- **Kör:** Azon $\mathbf{r}(x,y)$ pontok, amelyek a $\mathbf{c}(c_x,c_y)$ középponttól R távolságra vannak:
$$|\mathbf{r} - \mathbf{c}| = R \Leftrightarrow (\mathbf{r} - \mathbf{c})^2 - R^2 = 0 \Leftrightarrow (x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 - R^2 = 0$$
- **Ellipszis:** Azon \mathbf{r} pontok, amelyek a \mathbf{f}_1 és \mathbf{f}_2 fókuszpontoktól mért távolság összege állandó C : $|\mathbf{r} - \mathbf{f}_1| + |\mathbf{r} - \mathbf{f}_2| = C$
- **Hiperbola:** Azon \mathbf{r} pontok, amelyek a \mathbf{f}_1 és \mathbf{f}_2 fókuszpontoktól mért távolság különbsége állandó C : $|\mathbf{r} - \mathbf{f}_1| - |\mathbf{r} - \mathbf{f}_2| = C$
- **Parabola:** Azon \mathbf{r} pontok halmaza, amelyek az \mathbf{f} fókuszponttól mért távolsága megegyezik az \mathbf{n} normálvektorú és \mathbf{p} helyvektorú egyenestől mért távolsággal:
$$|\mathbf{r} - \mathbf{f}| = |\mathbf{n}^0 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{p})|$$

Kvadratikus görbék = kvadratikus alak

- Implicit függvény négyzetgyökök nélkül:

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

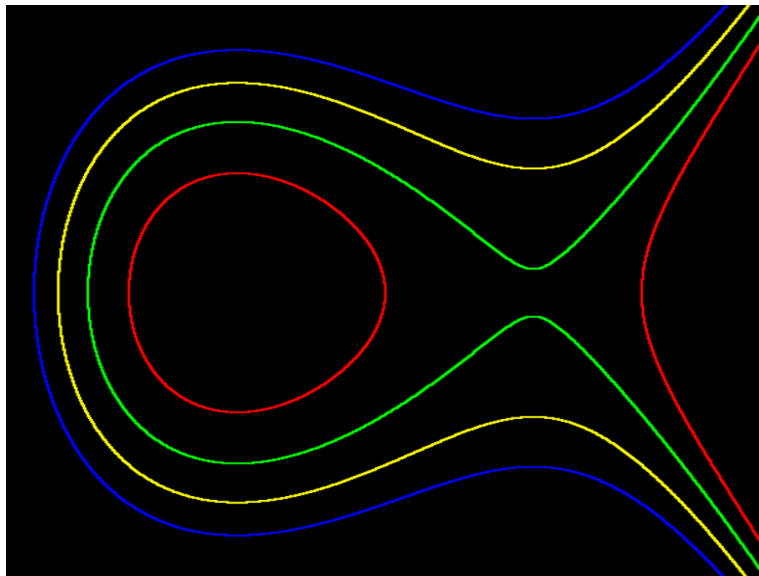
- Mátrixszal:

$$f(x, y) = [x, y, 1] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

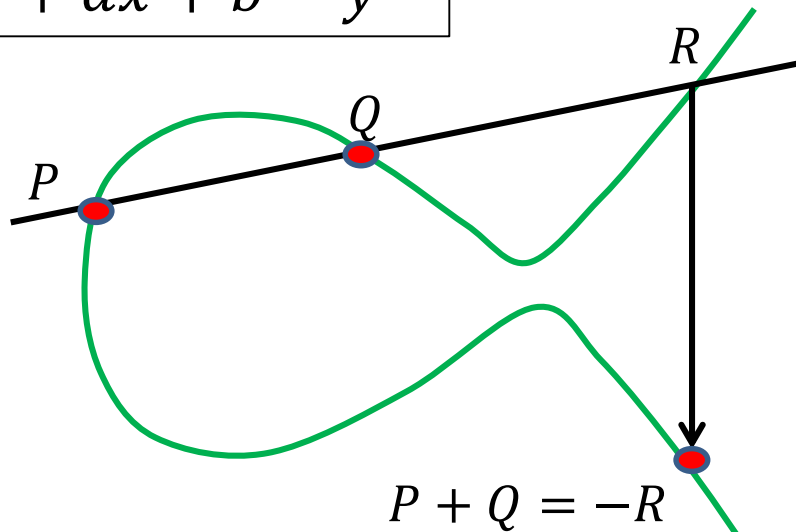


Elliptikus görbék

$$f(x, y) = x^3 + ax + b - y^2$$



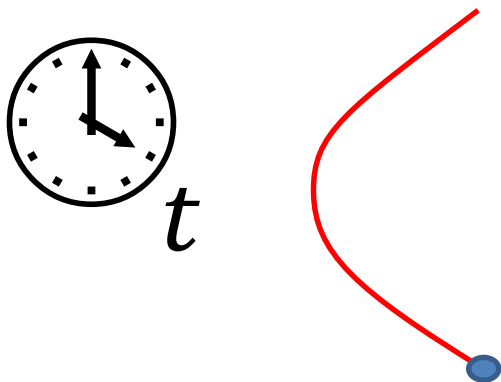
$$a = -1, b = 0, \dots, 1.6$$



Ezzel az összeadással **csoport**,
Nem vezet ki a racionális számokból

Alkalmazás: Kriptográfia, számelmélet (Fermat tétel bizonyítás)

Görbe: Paraméteres egyenlet



$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

vagy $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$

3D egyenes:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + v_x t \\y(t) &= y_0 + v_y t \\z(t) &= z_0 + v_z t \\t &\in (-\infty, +\infty)\end{aligned}$$

Kör:

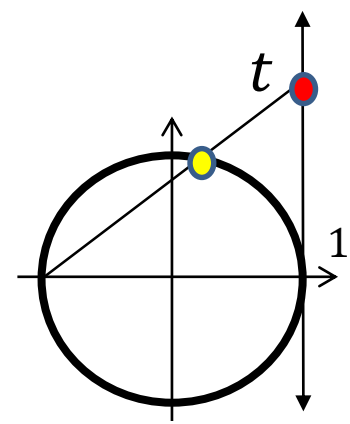
$$\begin{aligned}x(t) &= c_x + R \cos(t) \\y(t) &= c_y + R \sin(t) \\t &\in [0, 2\pi)\end{aligned}$$

Klasszikus görbék

- Kör:

$$x(t) = \frac{4-t^2}{4+t^2}$$
$$y(t) = \frac{4t}{4+t^2}$$

$t \in (-\infty, +\infty)$
Pitagoraszi
számhármások



- Cikloisz:

$$x(t) = t - \sin t$$
$$y(t) = 1 - \cos t$$



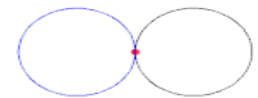
- Tractrix:

$$x(t) = \operatorname{sech} t$$
$$y(t) = t - \tanh t$$



- Kardioid:

$$x(t) = (1 - \cos t) \cos t$$
$$y(t) = (1 - \cos t) \sin t$$



Pontok és klasszikus görbék

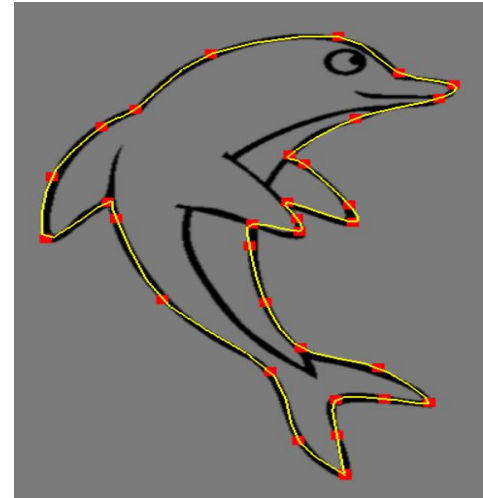
- Ponthoz koordinátarendszer kell
 - Descartes, Baricentrikus
- Görbéhez egyenlet kell
 - Az explicit ritkán használható
 - Az implicit feltételeket fogalmaz meg a pontokra
 - Azon pontok halmaza, amelyekben
 - ... pontok távolsága ($|\mathbf{p} - \mathbf{q}|$), ... merőleges ($\mathbf{d} \cdot \mathbf{v} = 0$),
 - ... párhuzamos ($\mathbf{d} \times \mathbf{v} = 0$), ... vetülete ($\mathbf{v}^0 \cdot \mathbf{r}$).
 - A paraméteres mozgásként fogalmazza meg a görbét



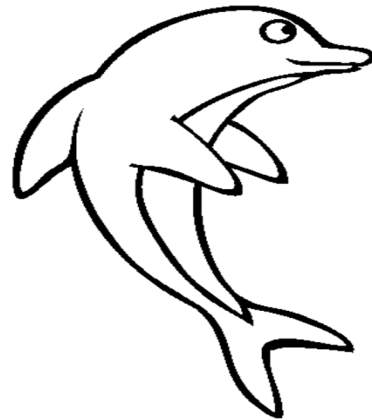
Geometriai modellezés

2. Szabadformájú görbék

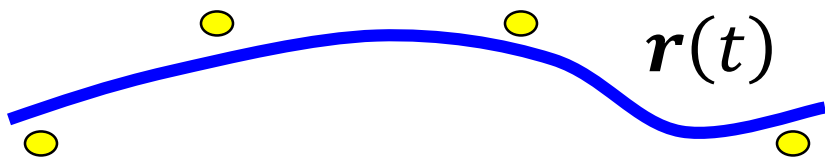
Szirmay-Kalos László



Szabadformájú görbék



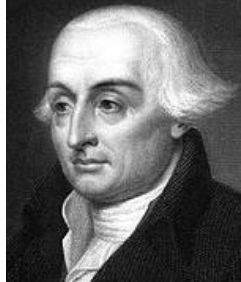
- Definíció vezérlőpontokkal



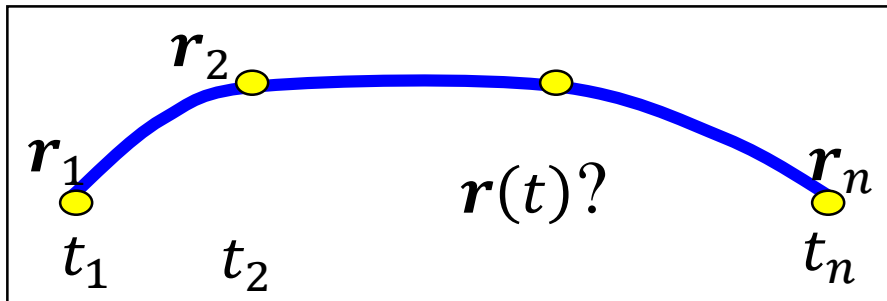
- Polinom: $x(t) = \sum_i a_i t^i, y(t) = \sum_i b_i t^i, z(t) = \dots$

- Polinom együtthatók:

- Kövesse a vezérlőpontokat: **Interpoláció/Approximáció**
- **Természetesség**: C^2 folytonosság
- **Szépség**: kis görbületváltozás indokolatlan hullámzás nélkül
- Független legyen a koordinátarendszertől (súlypont)
- Lokális vezérelhetőség



(Giuseppe) Lagrange interpoláció



- Keresd: $\mathbf{r}(t) = (\sum_i a_i t^i, \sum_i b_i t^i, \sum_i c_i t^i)$, amelyre
 $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1, \mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}(t_n) = \mathbf{r}_n$
- Hányad fokú a polinom? $n - 1$

$$\mathbf{r}(t) = \sum_i L_i(t) \mathbf{r}_i \quad \longrightarrow \quad \mathbf{r}(t_k) = \sum_i L_i(t_k) \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_k$$

$$L_i(t) = \frac{\prod_{j \neq i} (t - t_j)}{\prod_{j \neq i} (t_i - t_j)}$$

$$L_i(t_k) = \frac{\prod_{j \neq i} (t_k - t_j)}{\prod_{j \neq i} (t_i - t_j)} \begin{cases} 1 \text{ ha } i = k \\ 0 \text{ ha } i \neq k \end{cases}$$


```

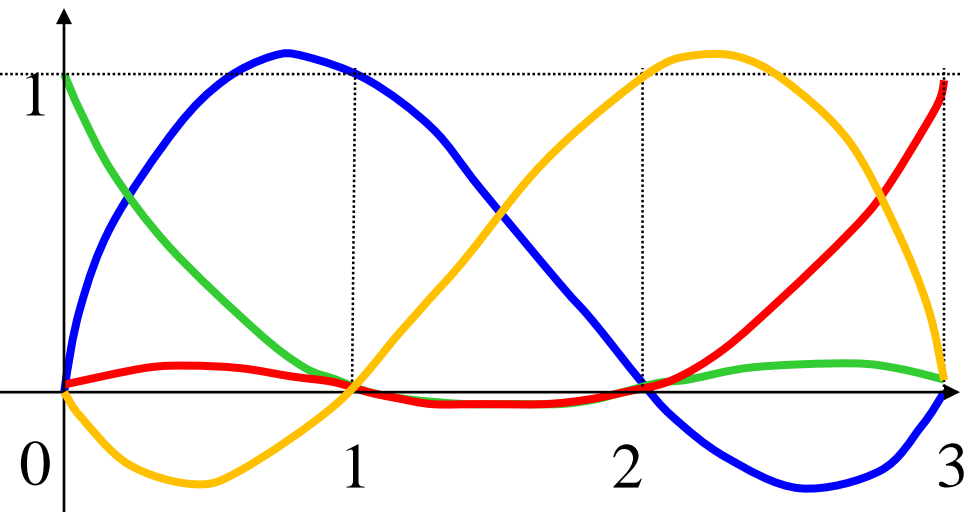
class LagrangeCurve {
    vector<vec3>  cps; // control pts
    vector<float> ts; // knots
    float L(int i, float t) {
        float Li = 1.0f;
        for(int j = 0; j < cps.size(); j++)
            if (j != i) Li *= (t - ts[j]) / (ts[i] - ts[j]);
        return Li;
    }
public:
    void AddControlPoint(vec3 cp) {
        float ti = cps.size(); // or something better
        cps.push_back(cp); ts.push_back(ti);
    }
    vec3 r(float t) {
        vec3 rt(0, 0, 0);
        for(int i = 0; i < cps.size(); i++) rt += cps[i] * L(i,t);
        return rt;
    }
};

```

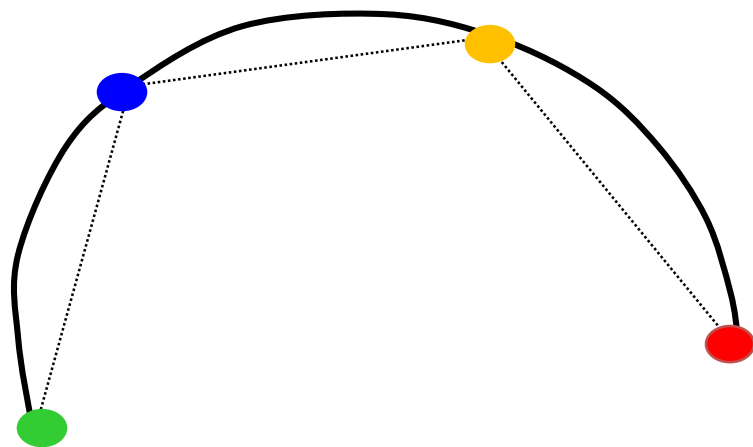
$$L_i(t) = \frac{\prod_{j \neq i} (t - t_j)}{\prod_{j \neq i} (t_i - t_j)}$$

$$\mathbf{r}(t) = \sum_i L_i(t) \mathbf{r}_i$$

Lagrange interpoláció bázisfüggvényei



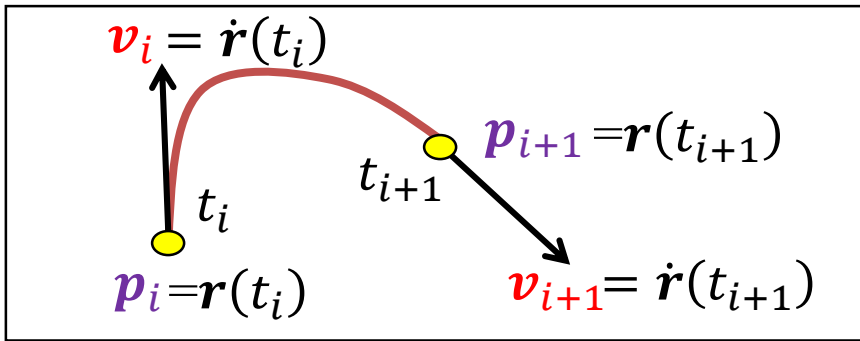
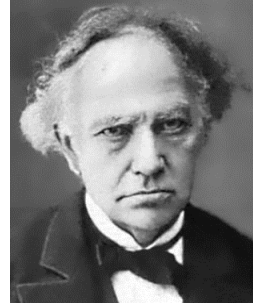
$$L_i(t) = \frac{\prod_{j \neq i} (t - t_j)}{\prod_{j \neq i} (t_i - t_j)}$$



$$\mathbf{r}(t) = \sum_i L_i(t) \mathbf{r}_i$$



(Charles) Hermite interpoláció



$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{p}_i$$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{3(\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i)}{(t_{i+1} - t_i)^2} - \frac{(\mathbf{v}_{i+1} + 2\mathbf{v}_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

$$\mathbf{a}_3 = \frac{2(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)^3} + \frac{(\mathbf{v}_{i+1} + \mathbf{v}_i)}{(t_{i+1} - t_i)^2}$$

- $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}_3(t - t_i)^3 + \mathbf{a}_2(t - t_i)^2 + \mathbf{a}_1(t - t_i) + \mathbf{a}_0$
- $\dot{\mathbf{r}}(t) = 3\mathbf{a}_3(t - t_i)^2 + 2\mathbf{a}_2(t - t_i) + \mathbf{a}_1$

$$\mathbf{r}(t_i) = \mathbf{a}_0 = \mathbf{p}_i$$

$$\mathbf{r}(t_{i+1}) = \mathbf{a}_3(t_{i+1} - t_i)^3 + \mathbf{a}_2(t_{i+1} - t_i)^2 + \mathbf{a}_1(t_{i+1} - t_i) + \mathbf{a}_0 = \mathbf{p}_{i+1}$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t_i) = \mathbf{a}_1 = \mathbf{v}_i$$

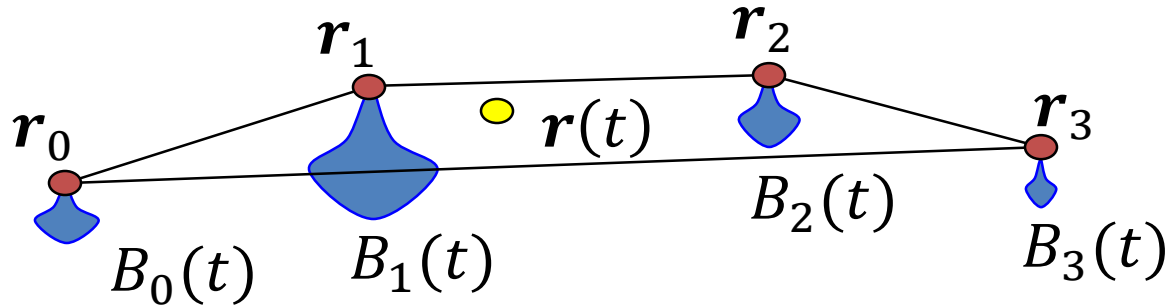
$$\dot{\mathbf{r}}(t_{i+1}) = 3\mathbf{a}_3(t_{i+1} - t_i)^2 + 2\mathbf{a}_2(t_{i+1} - t_i) + \mathbf{a}_1 = \mathbf{v}_{i+1}$$

(Pierre) Bézier approximáció



Keresd: $\mathbf{r}(t) = \sum_i B_i(t) \mathbf{r}_i$

- $B_i(t)$: ne oszcilláljon
- Konvex burok tulajdonság
- $B_i(t) \geq 0$, $\sum_i B_i(t) = 1$



(Сергей Натанович) Bernstein polinomok



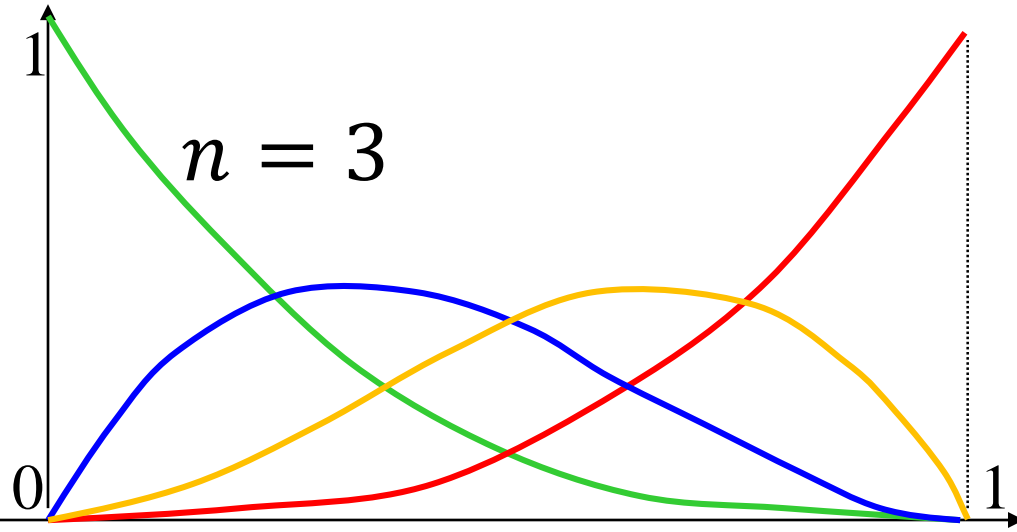
Newton binomiális tétel

$$1^n = (t + (1 - t))^n = \sum_{i=0}^n \boxed{\binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i}}$$

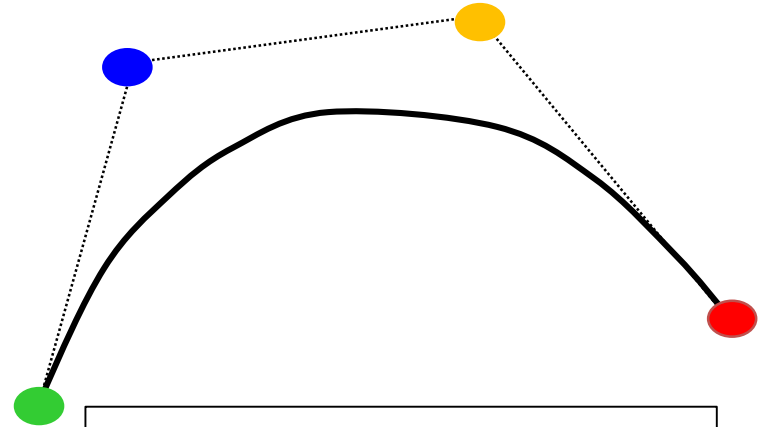
$B_i(t)$

$$B_i(t) \geq 0, \sum_i B_i(t) = 1 : \text{OK}$$

Bézier approximáció



$$B_i(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$



$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n B_i(t) \mathbf{r}_i$$

BezierCurve

```
class BezierCurve {  
    vector<vec3> cps;    // control pts  
  
    float B(int i, float t) {  
        int n = cps.size()-1; // n+1 pts!  
        float choose = 1;  
        for(int j = 1; j <= i; j++) choose *= (float)(n-j+1)/j;  
        return choose * pow(t, i) * pow(1-t, n-i);  
    }  
public:  
    void AddControlPoint(vec3 cp) { cps.push_back(cp); }  
    vec3 r(float t) {  
        vec3 rt(0, 0, 0);  
        for(int i=0; i < cps.size(); i++) rt += cps[i] * B(i,t);  
        return rt;  
    }  
};
```

$$B_i(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

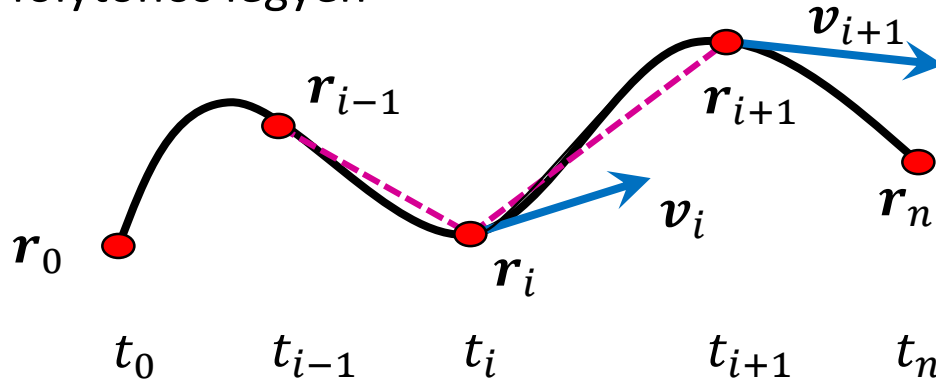
$$r(t) = \sum_{i=0}^n B_i(t) r_i$$



Catmull-Rom spline



- Minden két vezérlőpont közé egy Hermite
- C^1 simaság: a sebesség is legyen közös két egymás utánira
- Közelítő C^2 simaság: A közös sebességet úgy válaszd meg, hogy a gyorsulás is közelítőleg folytonos legyen



$$v_i = \frac{1 - \tau}{2} \left(\frac{r_{i+1} - r_i}{t_{i+1} - t_i} + \frac{r_i - r_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right)$$

Általánosítás:
Tenzió, Bias

CatmullRom

```
class CatmullRom {  
    vector<vec3> cps; // control points  
    vector<float> ts; // parameter (knot) values  
    vec3 Hermite(vec3 p0, vec3 v0, float t0, vec3 p1, vec3 v1, float t1,  
                float t) {
```

$$r(t) = a_3(t - t_0)^3 + a_2(t - t_0)^2 + a_1(t - t_0) + a_0$$

```
    }  
public:  
    void AddControlPoint(vec3 cp, float t) { ... }
```

```
    vec3 r(float t) {  
        for(int i = 0; i < cps.size() - 1; i++)  
            if (ts[i] <= t && t <= ts[i+1]) {  
                vec3 v0 = ..., v1 = ...;  
                return Hermite(cps[i], v0, ts[i], cps[i+1], v1, ts[i+1], t);  
            }  
    }
```

$$\begin{aligned} a_0 &= p_i, \quad a_1 = v_i \\ a_2 &= \frac{3(p_{i+1} - p_i)}{(t_{i+1} - t_i)^2} - \frac{(v_{i+1} + 2v_i)}{t_{i+1} - t_i} \\ a_3 &= \frac{2(p_i - p_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)^3} + \frac{(v_{i+1} + v_i)}{(t_{i+1} - t_i)^2} \end{aligned}$$

$$v_i = \frac{1}{2} \left(\frac{r_{i+1} - r_i}{t_{i+1} - t_i} + \frac{r_i - r_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right)$$

```
};
```



Szabadformájú görbék

- Paraméteres egyenlet (mozgás), polinomok
- Kontrollpontokkal definiáljuk (approximációs, interpolációs)
- Görbe = kontrollpontok kombinációja (súlypont)
- Görbe tulajdonságait a súlyfüggvények határozzák meg
 - Folytonosság (C^0, C^1, C^2)
 - Konvex burok: súlyfüggvények nem negatívak
 - Lokális vezérelhetőség: súlyfüggvények a tartomány egy részében nem zérus értékűek

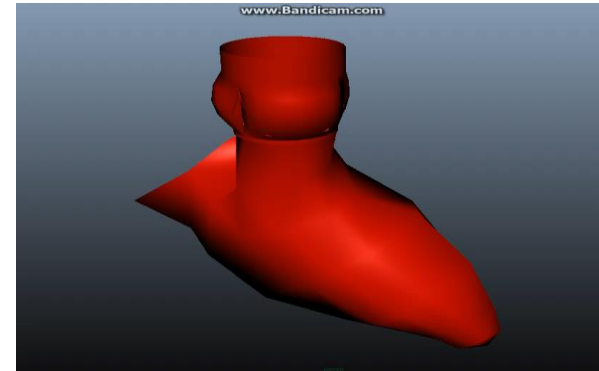
*"La semplicità è la
sostanziazione finale."*

Leonardo da Vinci

Geometriai modellezés

3. Felületek

Szirmay-Kalos László



Felület a 3D tér 2D részhalmaza:

Felületek

– **Explicit:**

$$z = h(x, y)$$

– **Implicit:**

$$f(x, y, z) = 0; \quad f(\mathbf{r}) = 0$$

– gömb: $(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 + (z - c_z)^2 - R^2 = 0$

– sík: $ax + by + cz + d = 0$

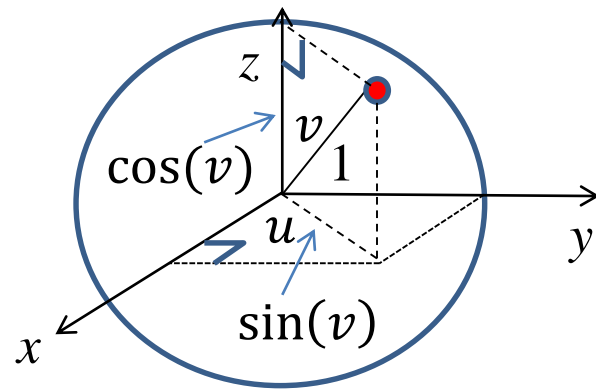
– **Parametrikus:** $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v); \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$

– gömb:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= c_x + R \cos(u) \sin(v) \\ y(u, v) &= c_y + R \sin(u) \sin(v) \\ z(u, v) &= c_z + R \cos(v) \\ u &\in [0, 2\pi), v \in [0, \pi) \end{aligned}$$

– sík:

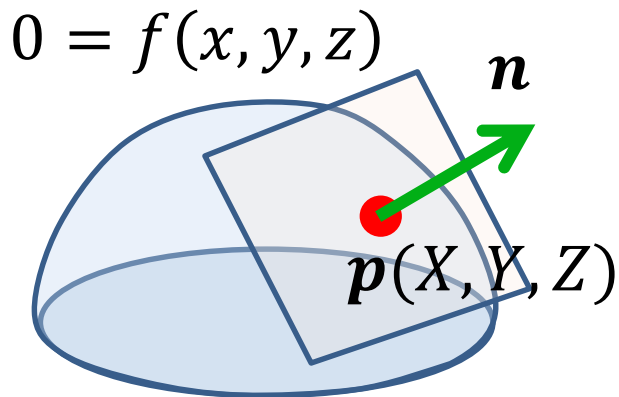
$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{p} + \mathbf{a}u + \mathbf{b}v$$



Implicit felületek normálvektora

$$\text{Normál vektor} = \text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

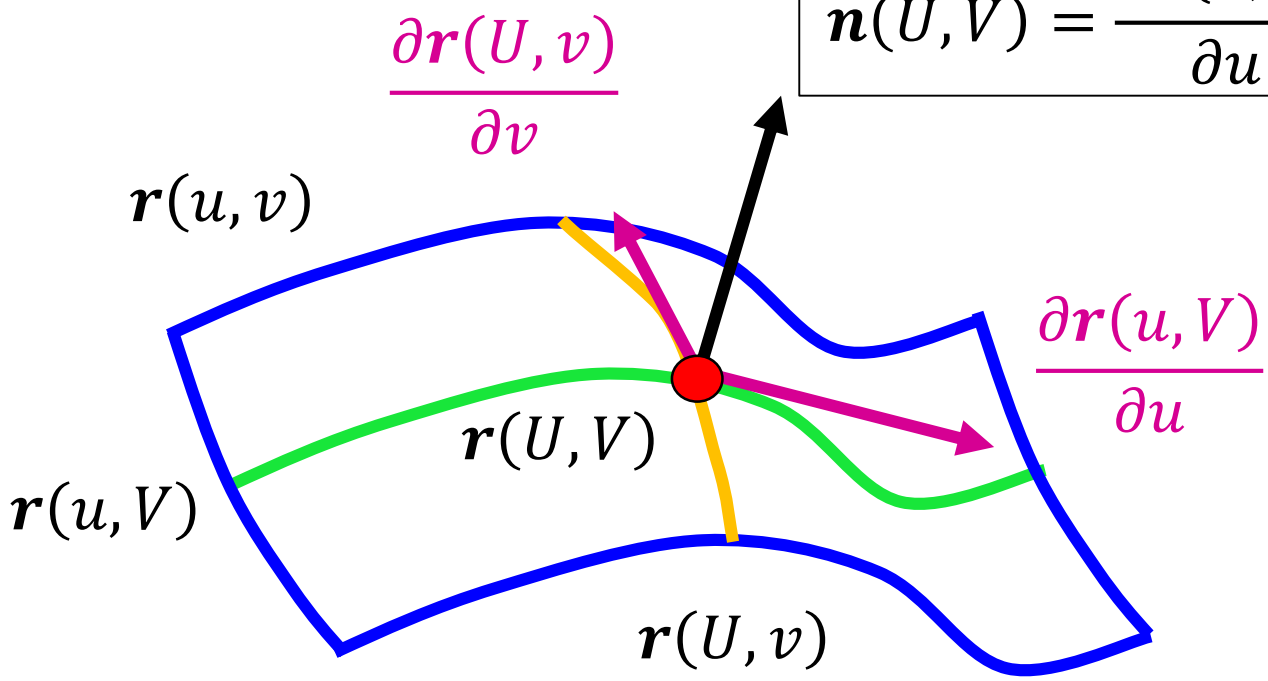
$$\begin{aligned} 0 &= f(x, y, z) \\ &= f(X + (x - X), Y + (y - Y), Z + (z - Z)) \\ &\approx f(X, Y, Z) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - X) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - Y) + \frac{\partial f}{\partial z}(z - Z) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot (x - X, y - Y, z - Z) &= 0 \end{aligned}$$



$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{p}) = 0$$

Parametrikus felületek normálvektora

$$\mathbf{n}(U, V) = \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v} \quad \begin{matrix} u = U \\ v = V \end{matrix}$$

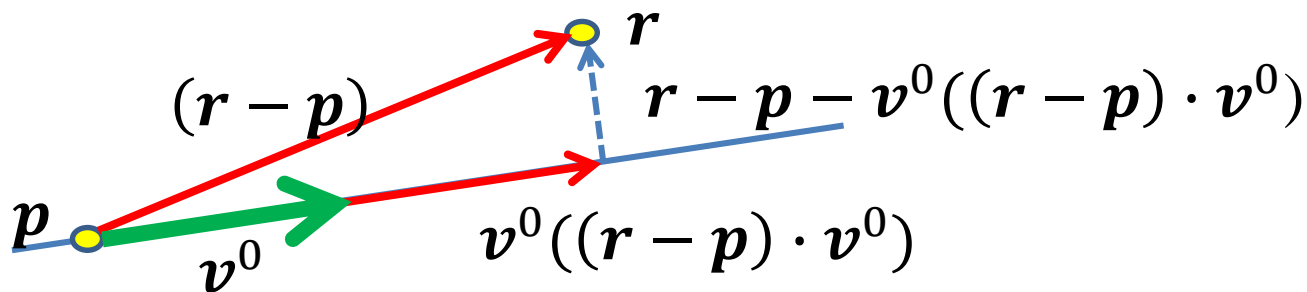


Implicit kvadratikus felületek

- **Gömb:** Azon $\mathbf{r}(x, y, z)$ pontok mértani helye, amelyek a $\mathbf{c}(c_x, c_y, c_z)$ középponttól R távolságra vannak: $|\mathbf{r} - \mathbf{c}| = R$
- **Henger:** Azon \mathbf{r} pontok, amelyek a \mathbf{v}^0 irányvektorú és \mathbf{p} helyvektorú egyenestől mért távolsága R : $|\mathbf{r} - \mathbf{p} - \mathbf{v}^0((\mathbf{r} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}^0)| = R$

Implicit kvadratikus felületek

- **Gömb:** Azon $\mathbf{r}(x, y, z)$ pontok mértani helye, amelyek a $\mathbf{c}(c_x, c_y, c_z)$ középponttól R távolságra vannak: $|\mathbf{r} - \mathbf{c}| = R$
- **Henger:** Azon \mathbf{r} pontok, amelyek a \mathbf{v}^0 irányvektorú és \mathbf{p} helyvektorú egyenestől mért távolsága R : $|\mathbf{r} - \mathbf{p} - \mathbf{v}^0((\mathbf{r} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}^0)| = R$



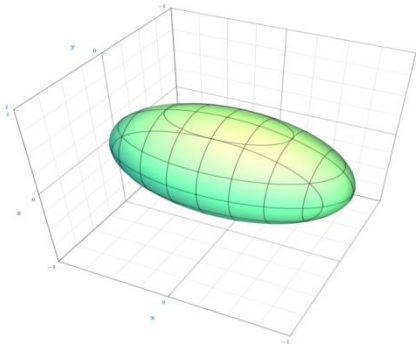
Implicit kvadratikus felületek

- **Gömb:** Azon $\mathbf{r}(x,y,z)$ pontok mértani helye, amelyek a $\mathbf{c}(c_x,c_y,c_z)$ középponttól R távolságra vannak: $|\mathbf{r} - \mathbf{c}| = R$
- **Henger:** Azon \mathbf{r} pontok, amelyek a \mathbf{v}^0 irányvektorú és \mathbf{p} helyvektorú egyenestől mért távolsága R : $|\mathbf{r} - \mathbf{p} - \mathbf{v}^0((\mathbf{r} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}^0)| = R$
- **Ellipszoid:** Azon \mathbf{r} pontok, amelyek a \mathbf{f}_1 és \mathbf{f}_2 fókuszpontoktól mért távolság összege állandó C : $|\mathbf{r} - \mathbf{f}_1| + |\mathbf{r} - \mathbf{f}_2| = C$
- **Hiperboloid:** Azon \mathbf{r} pontok, melyek a \mathbf{f}_1 és \mathbf{f}_2 fókuszpontoktól mért távolság különbsége állandó C : $|\mathbf{r} - \mathbf{f}_1| - |\mathbf{r} - \mathbf{f}_2| = C$
- **Paraboloid:** \mathbf{r} pontok, amelyek az \mathbf{f} fókuszponttól mért távolsága megegyezik az \mathbf{n} normálvektorú és \mathbf{p} helyvektorú síktól mért távolsággal: $|\mathbf{r} - \mathbf{f}| = |\mathbf{n}^0 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{p})|$

Implicit kvadratikus felületek

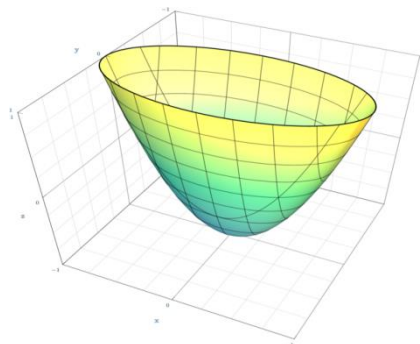
$$f(x, y, z) = [x, y, z, 1] \mathbf{Q} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Mindig felírható úgy is, hogy \mathbf{Q} szimmetrikus



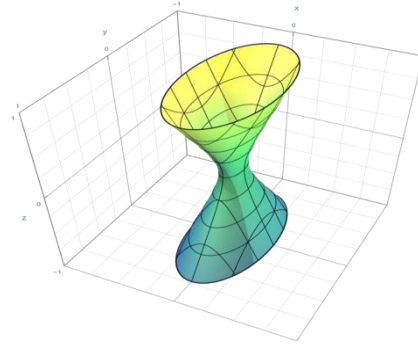
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Ellipszoid



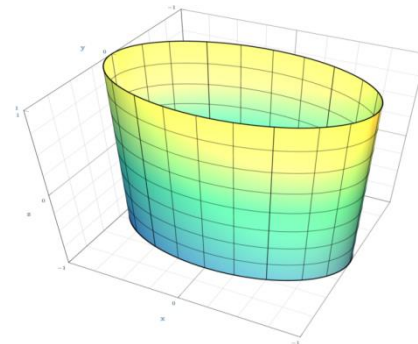
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

Paraboloid



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Hiperboloid



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

Elliptikus henger

Kvadratikus objektum

$$f(x, y, z) = [x, y, z, 1] \mathbf{Q} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
struct Quadrics {
    mat4 Q; // symmetric matrix

    float f(vec4 r) { // r.w = 1
        return dot(r * Q, r);
    }

    vec3 gradf(vec4 r) { // r.w = 1
        vec4 g = r * Q * 2;
        return vec3(g.x, g.y, g.z);
    }
};
```

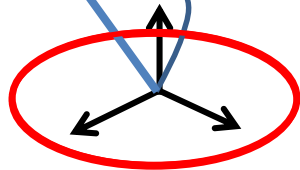
$$\frac{\partial f}{\partial x} = [1, 0, 0, 0] \mathbf{Q} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} + [x, y, z, 1] \mathbf{Q} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= [x, y, z, 1] \mathbf{Q} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Parametrikus felületek: Kihúzás

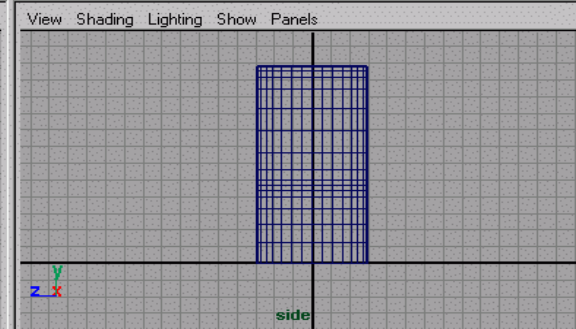
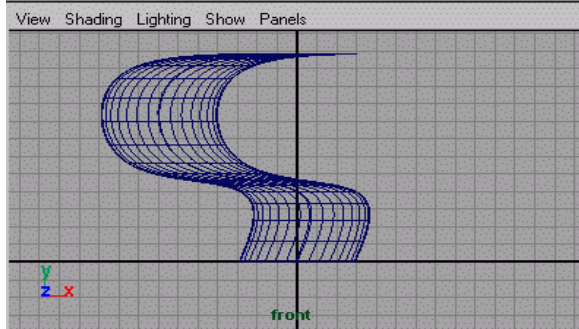
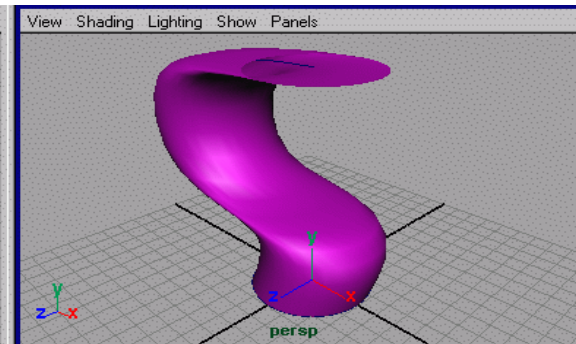
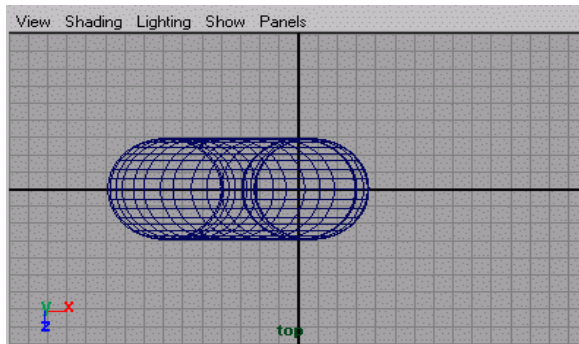


$s(v)$: gerinc

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{s}(v) + \mathbf{b}(u)$$

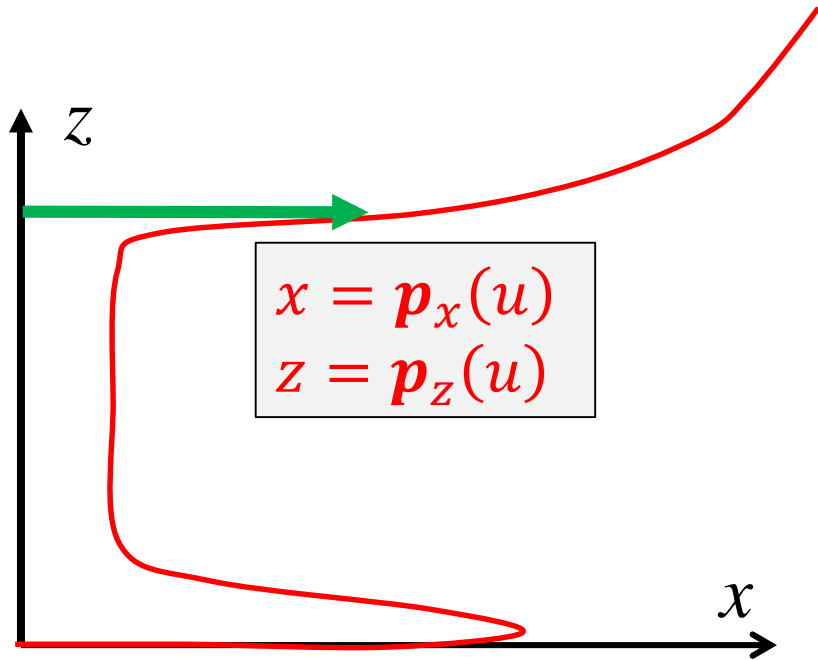


$\mathbf{b}(u)$: profil

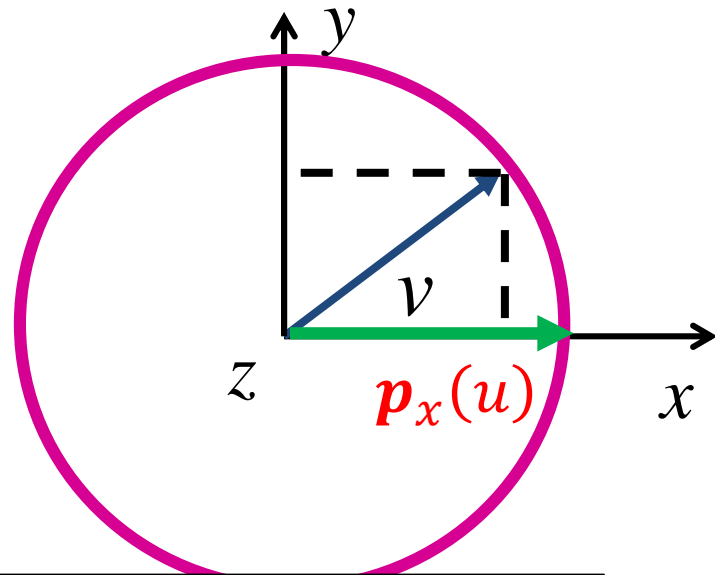


Parametrikus felületek: Forgatás

Oldalnézet

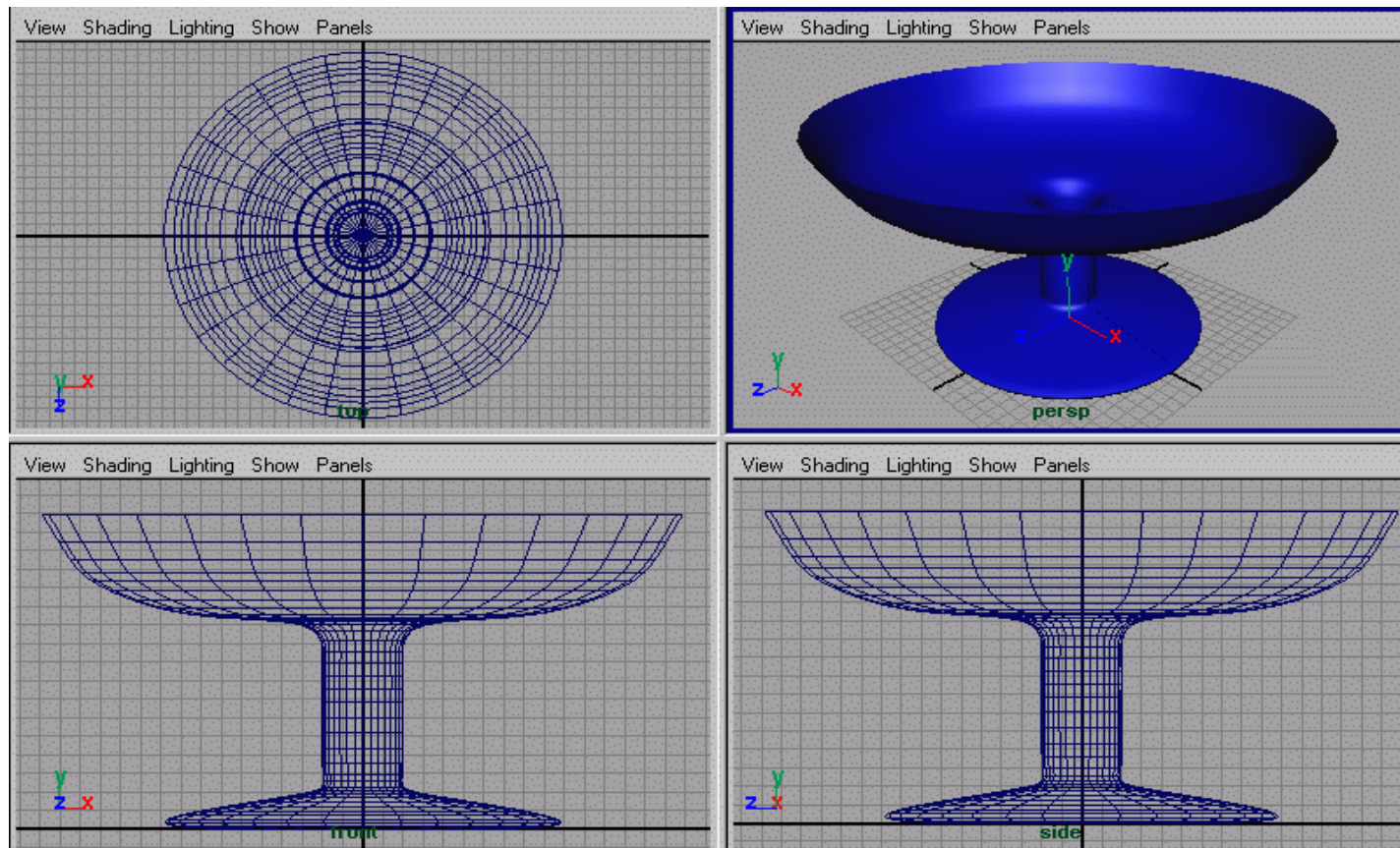


Felülnézet

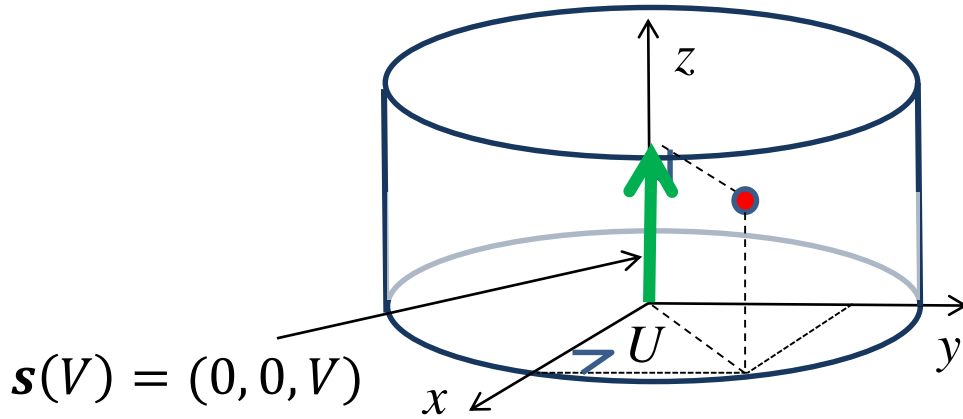


$$\begin{aligned}x &= p_x(u) \cos(v) \\ y &= p_x(u) \sin(v) \\ z &= p_z(u)\end{aligned}$$

Forgatás



Henger



$$\mathbf{b}(U) = (r \cos(U), r \sin(U), 0)$$

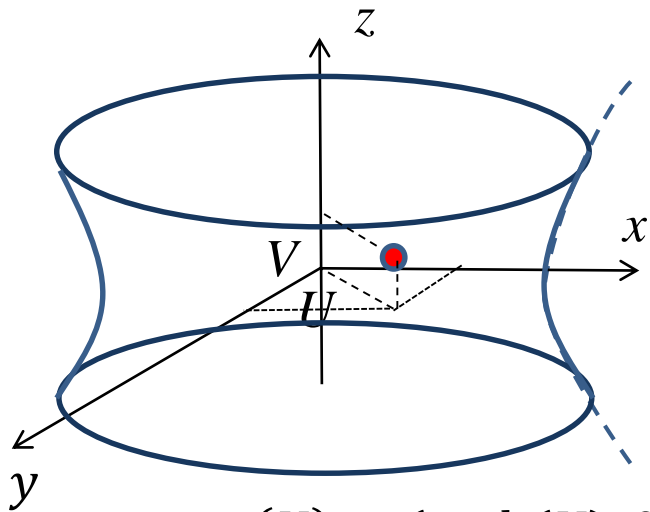
$$x(U, V) = r \cos(U)$$

$$y(U, V) = r \sin(U)$$

$$z(U, V) = V$$

$$U \in [0, 2\pi], \quad V \in [0, h]$$

(egyköpenyű) Hiperboloid



$$\mathbf{p}(U) = (\cosh(U), 0, \sinh(U))$$

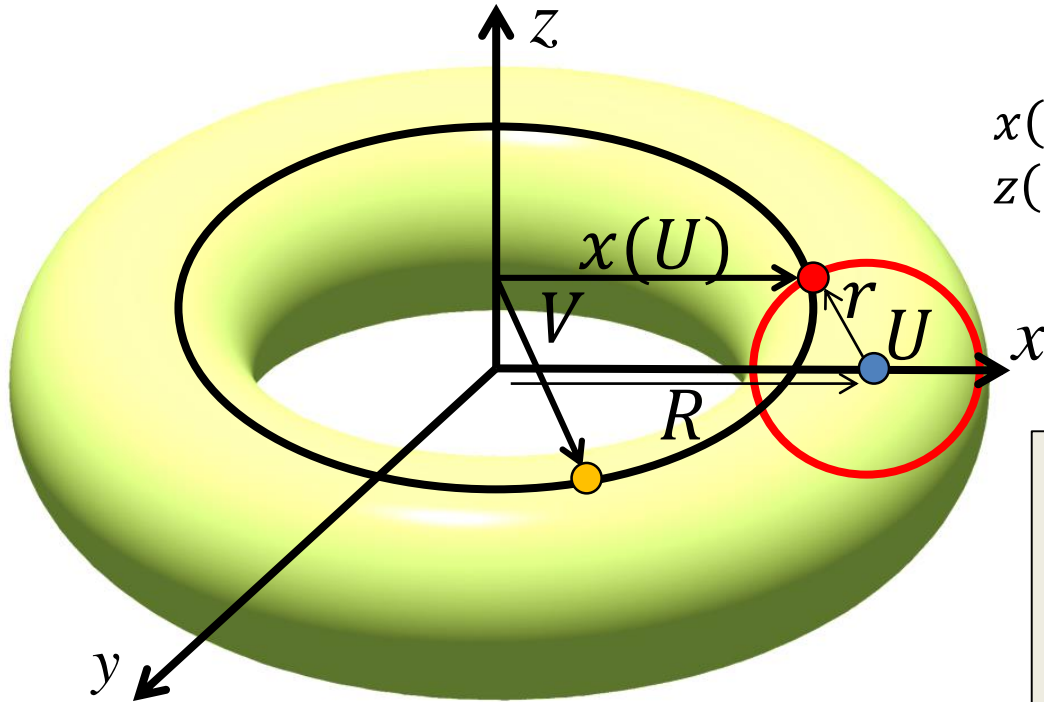
$$x(U, V) = \cosh(U)\cos(V)$$

$$y(U, V) = \cosh(U)\sin(V)$$

$$z(U, V) = \sinh(U)$$

$$V \in [0, 2\pi], \quad U \in [-h/2, h/2]$$

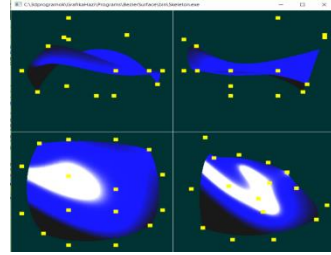
Tórusz



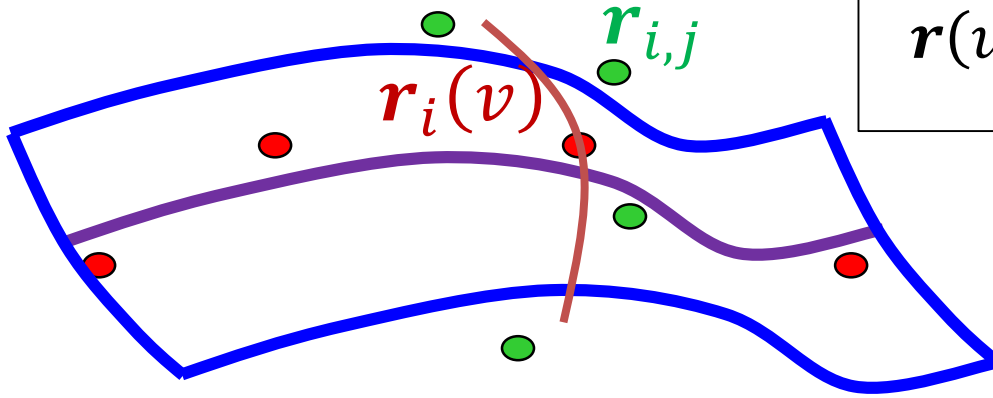
$$x(U) = R + r \cos(U)$$
$$z(U) = r \sin(U)$$

$$x(U, V) = (R + r \cos(U)) \cos(V)$$
$$y(U, V) = (R + r \cos(U)) \sin(V)$$
$$z(U, V) = r \sin(U)$$
$$U \in [0, 2\pi], \quad V \in [0, 2\pi]$$

Szabadformájú felület



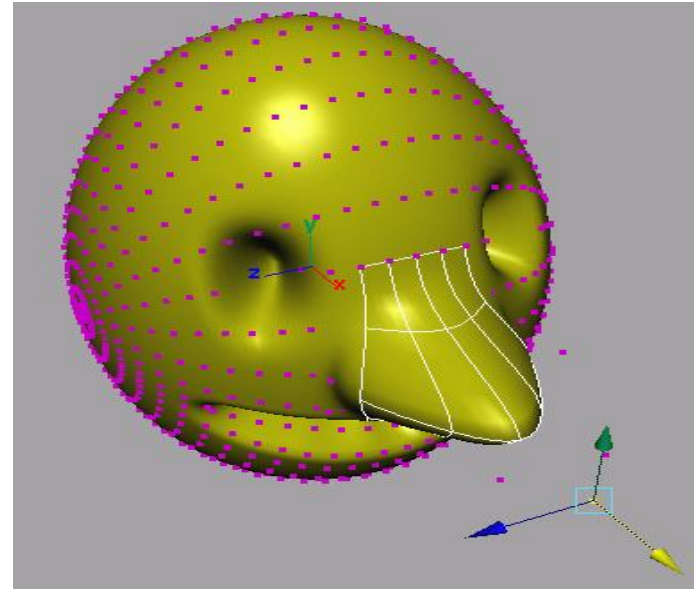
Definíció kontroll pontokkal:



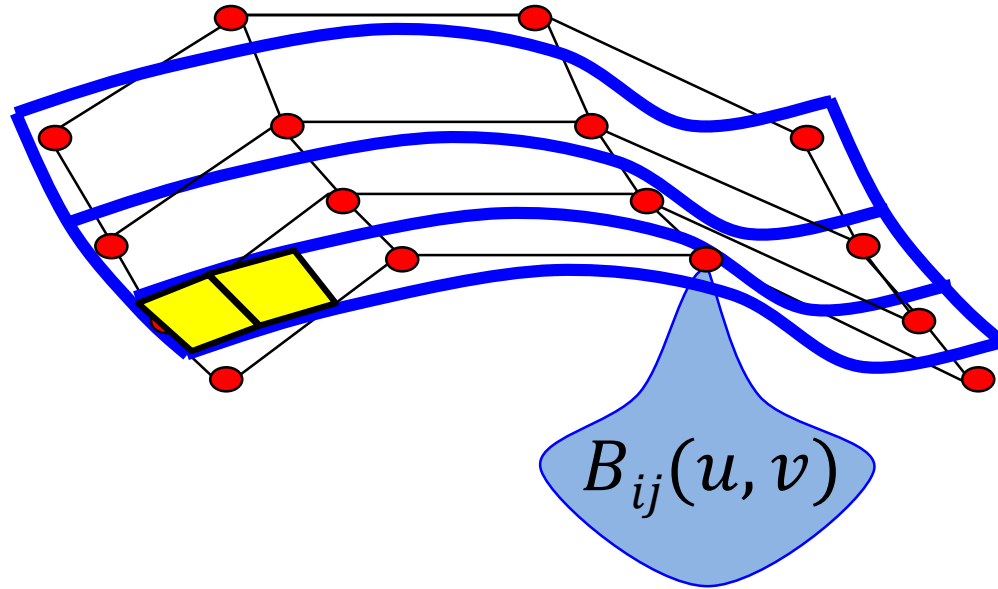
$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_i \sum_j B_j(v) B_i(u) \mathbf{r}_{i,j}$$

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_v(u) = \sum_i B_i(u) \mathbf{r}_i(v)$$

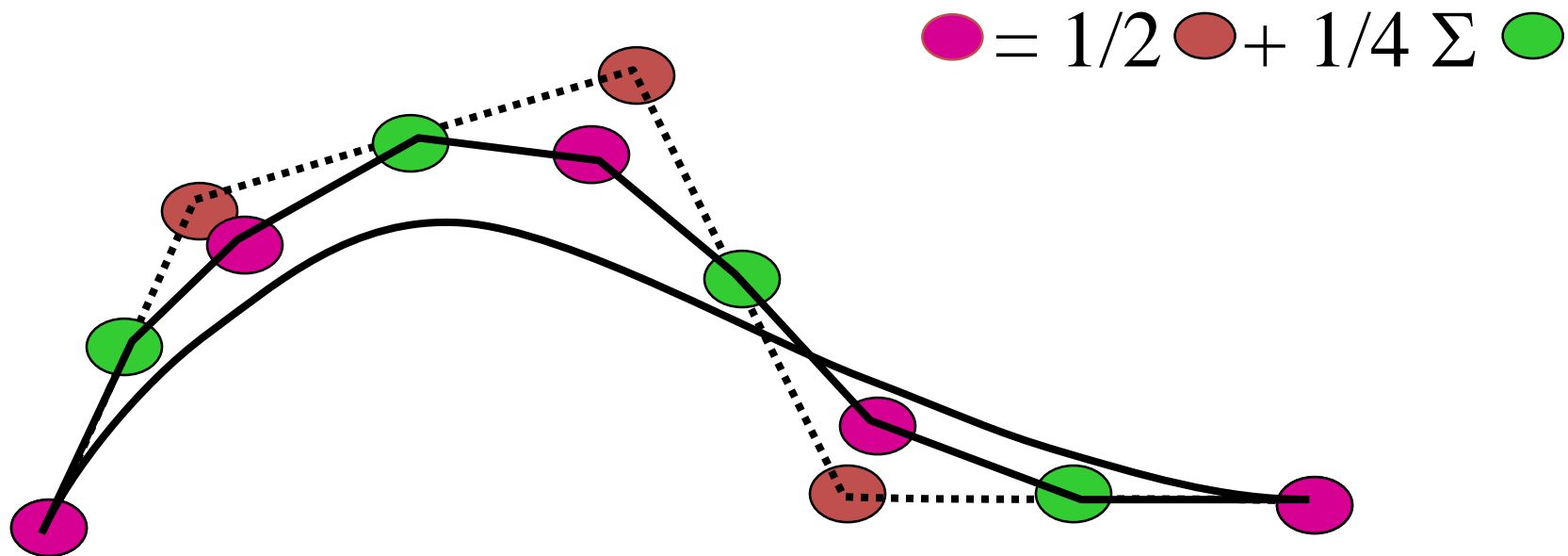
$$\mathbf{r}_i(v) = \sum_j B_j(v) \mathbf{r}_{i,j}$$



Poligonháló finomítása



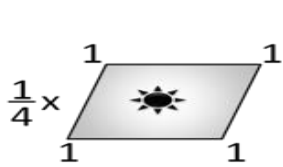
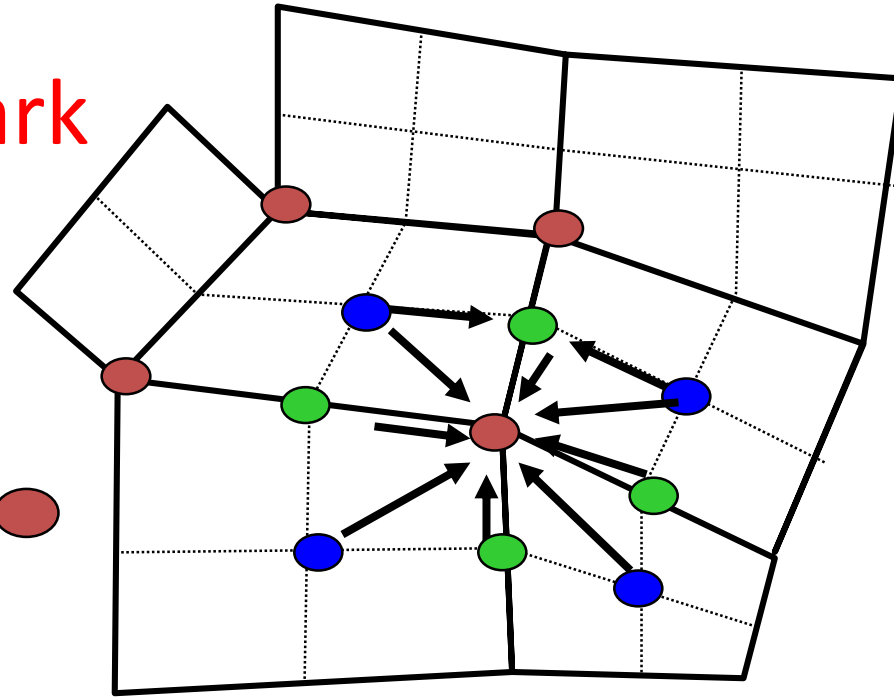
Subdivision görbék



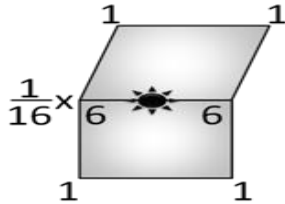


(Edwin) Catmull- (James) Clark subdivision felület

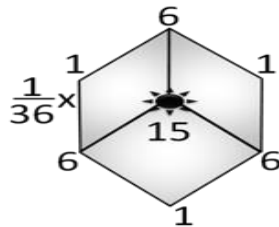
- = $1/4\Sigma$
- = $1/2\Sigma$
- = $1/v^2\Sigma$ + $2/v^2\Sigma$ + $(v-3)/v$
- = $1/4\Sigma$ + $1/2$



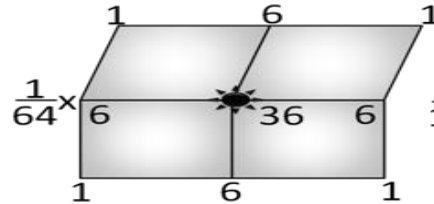
Face Point



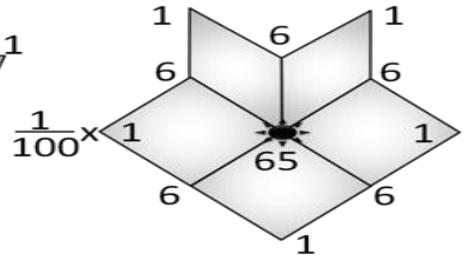
Edge Point



Valence 3 Vertex

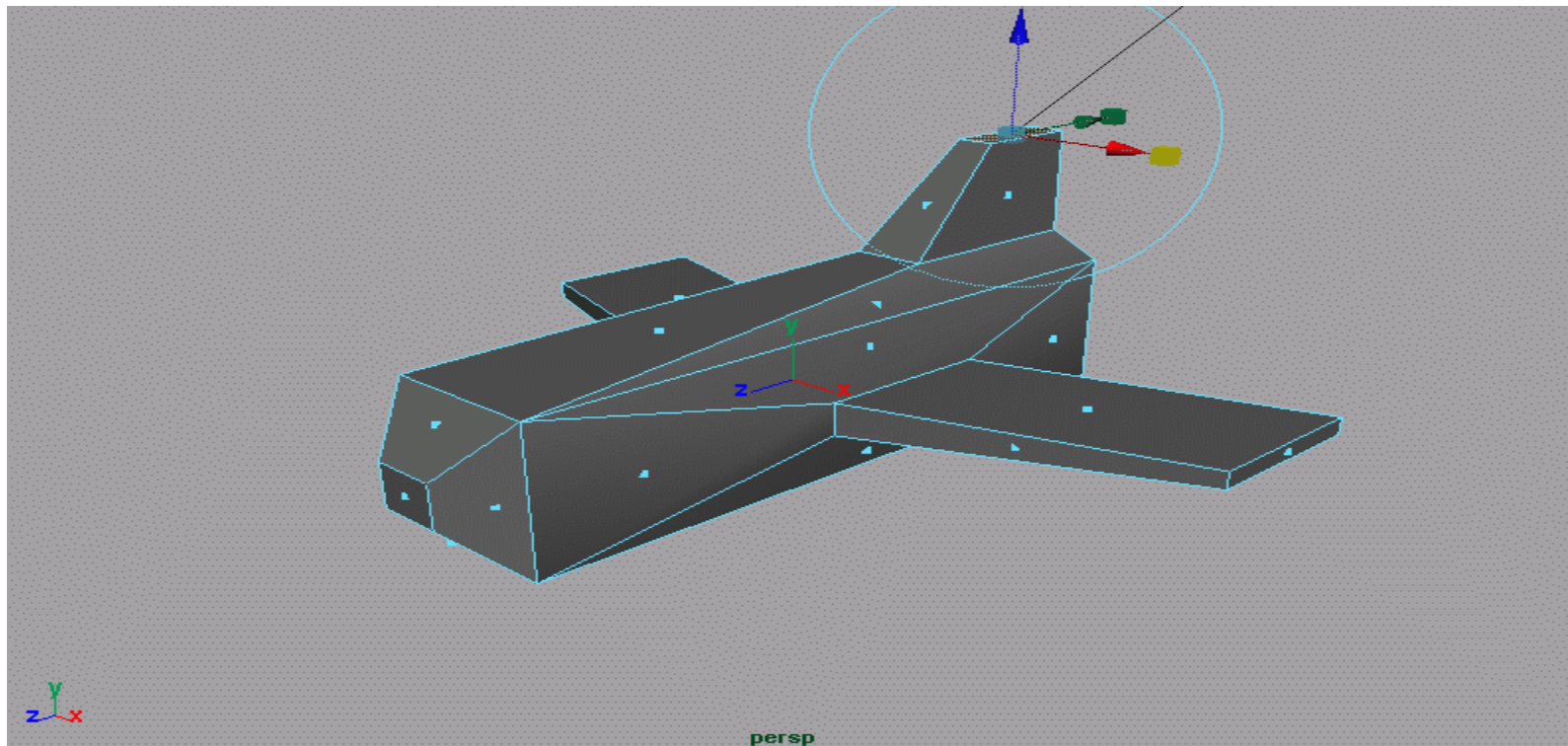


Valence 4 Vertex

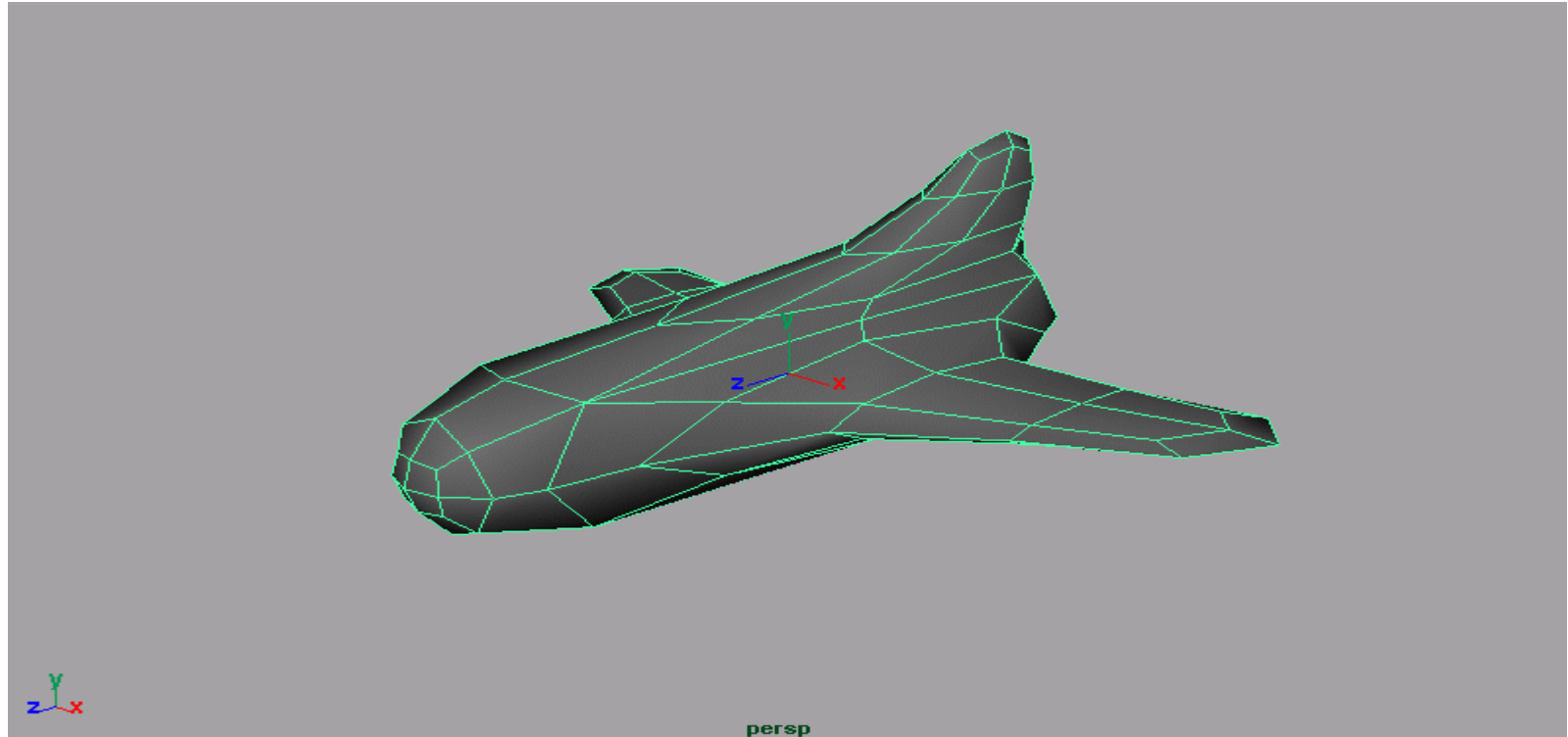


Valence 5 Vertex

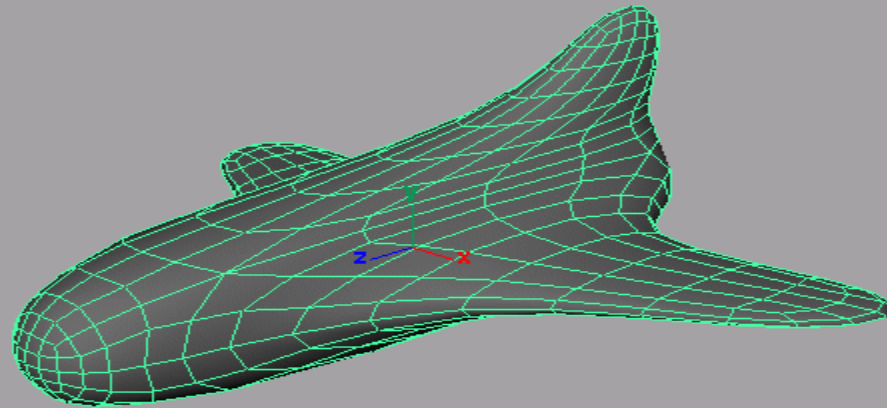
Durva poligon modell



Subdivision 1



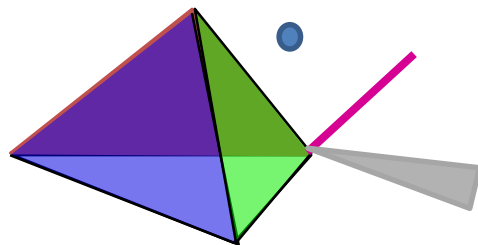
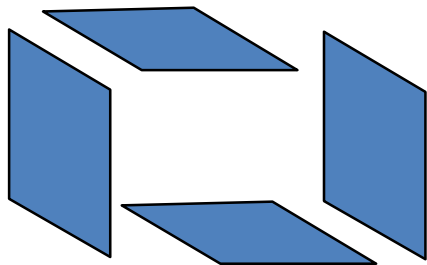
Subdivision 2



persp

B-rep: határfelületek megadása

- Test = érvényes (létrehozható): ne legyenek alacsonyabb dimenziós elfajuló részek: minden határpont környezetében kell belső pontnak is lennie.



- Topológiai érvényesség:
 - Élek (2,3,...) csúcspontban találkoznak
 - Egy él két lapot választ el, és nem metsz élt
 - Egy lapot él és csúcs sorozat határol
 - A felület nem metszi saját magát
 - **Euler-Poincaré tétel:**

$$\text{csúcs} - \text{él} + \text{lap} = 2(\text{db-lyuk})$$

(Leonhard) Euler operátorok

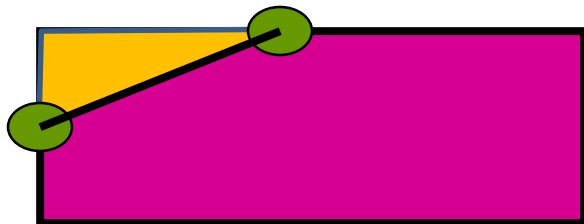
- Lap kihúzás



Csúcsok Lapok Élek

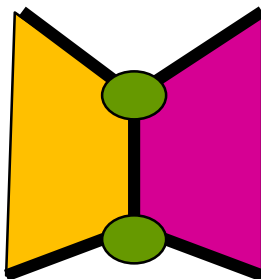
$$+4 \quad +4 \quad = \quad +8$$

- Lap felvágás



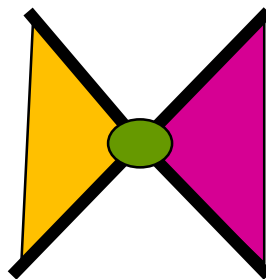
$$+2 \quad +1 \quad = \quad +3$$

- Él törlés



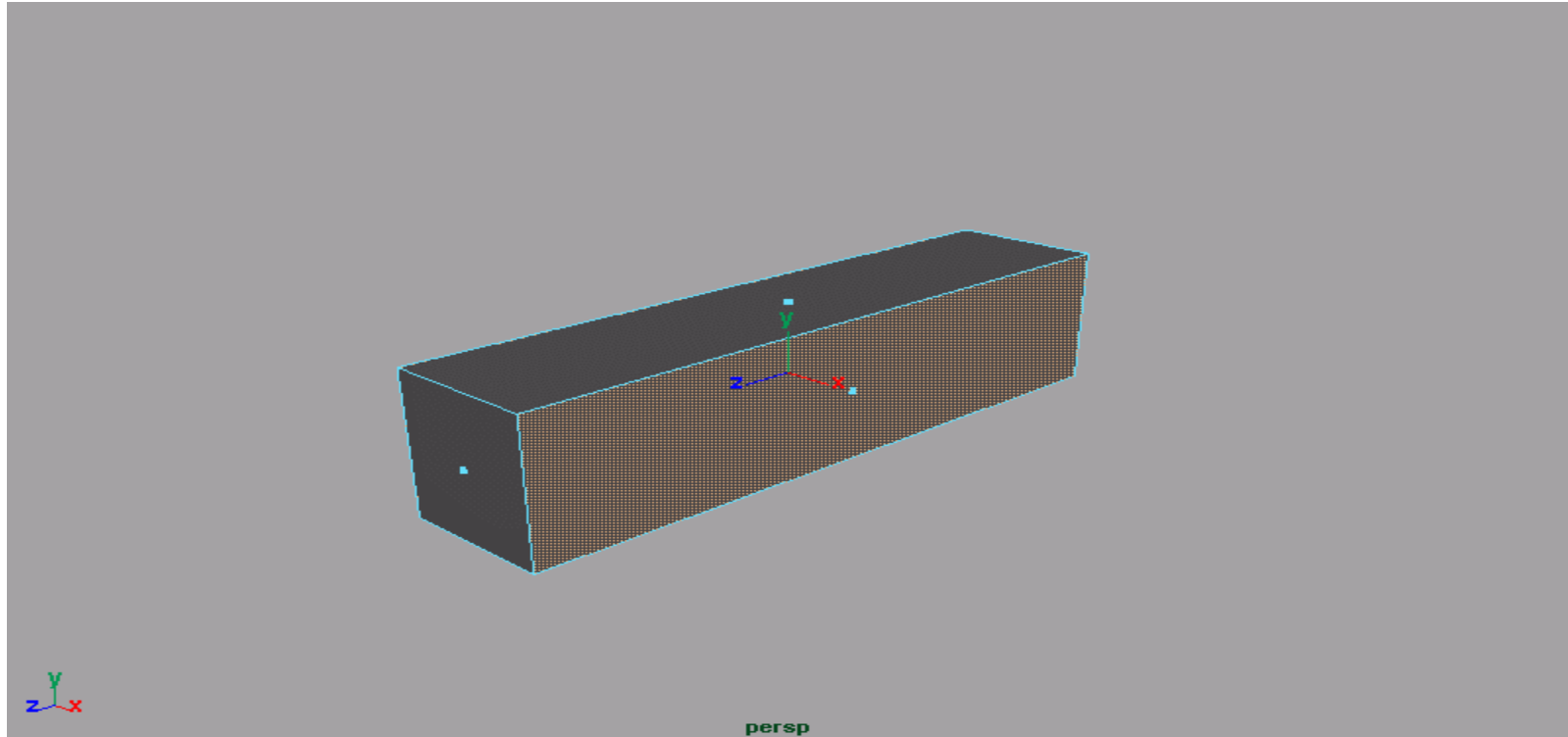
$$-1 \quad 0 \quad = \quad -1$$

- Csúcs szétvágás

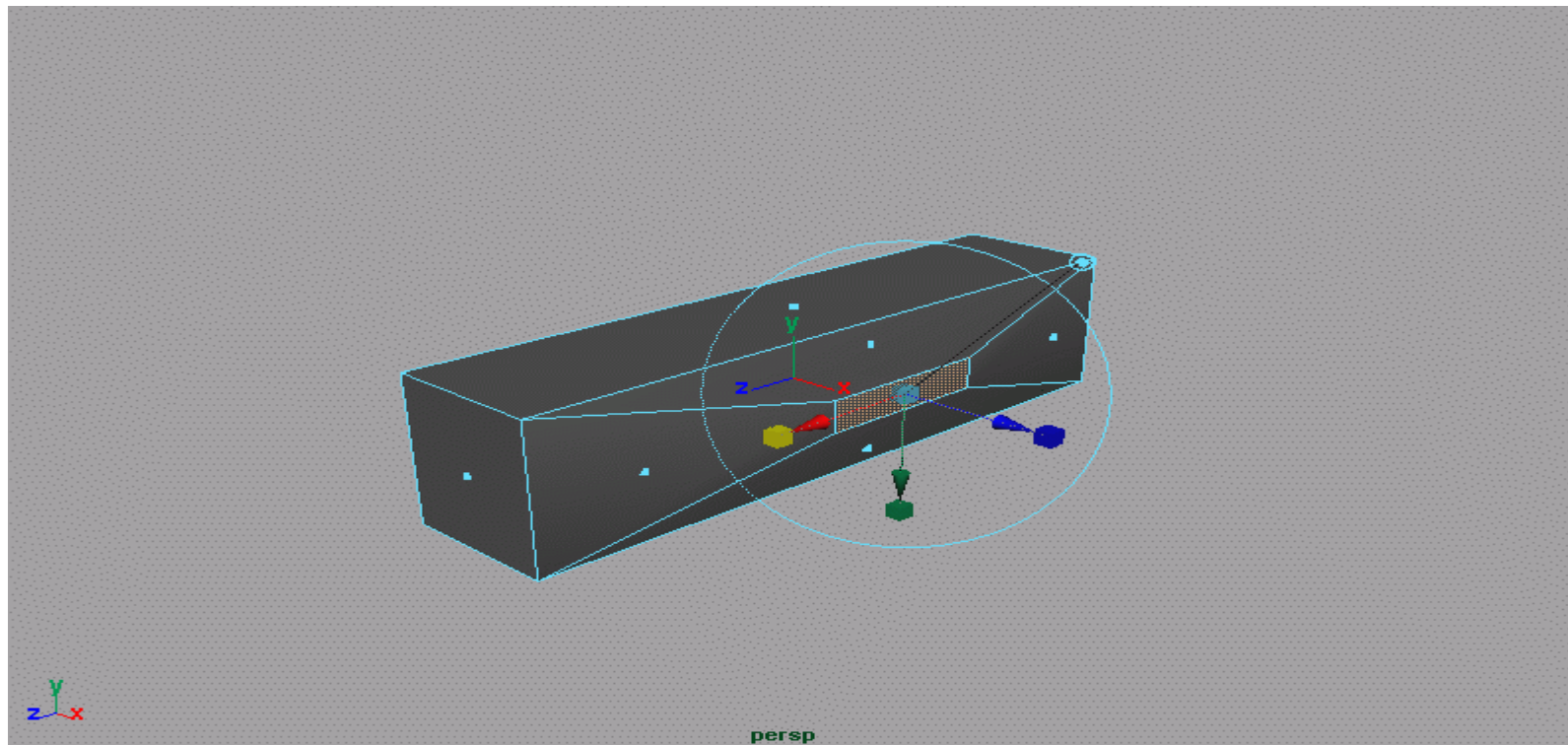


$$+1 \quad 0 \quad = \quad +1$$

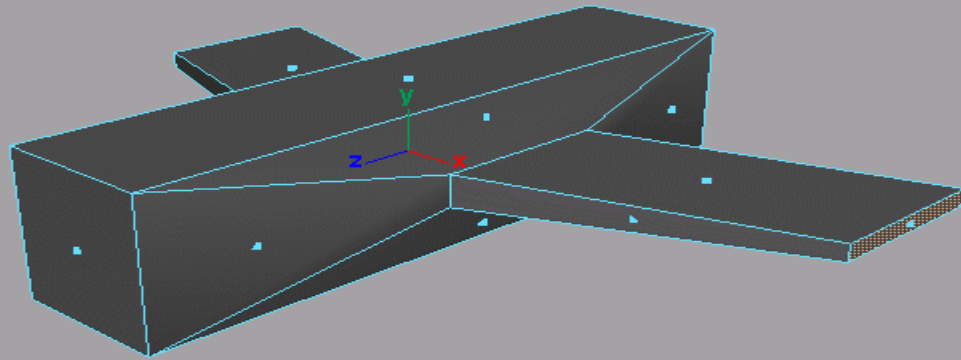
Kezdet: érvényes téglatest



Lap kihúzás

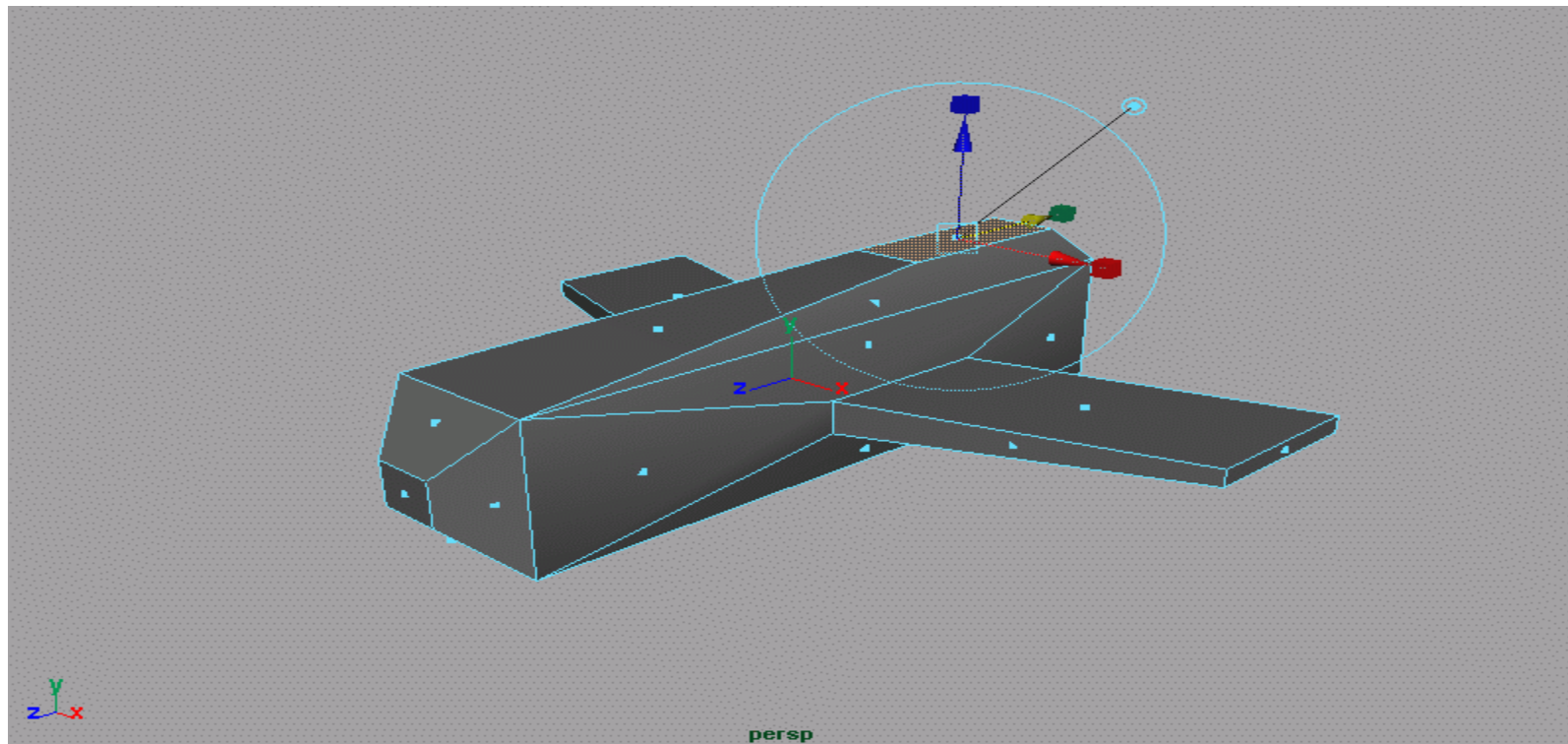


Lap kihúzás

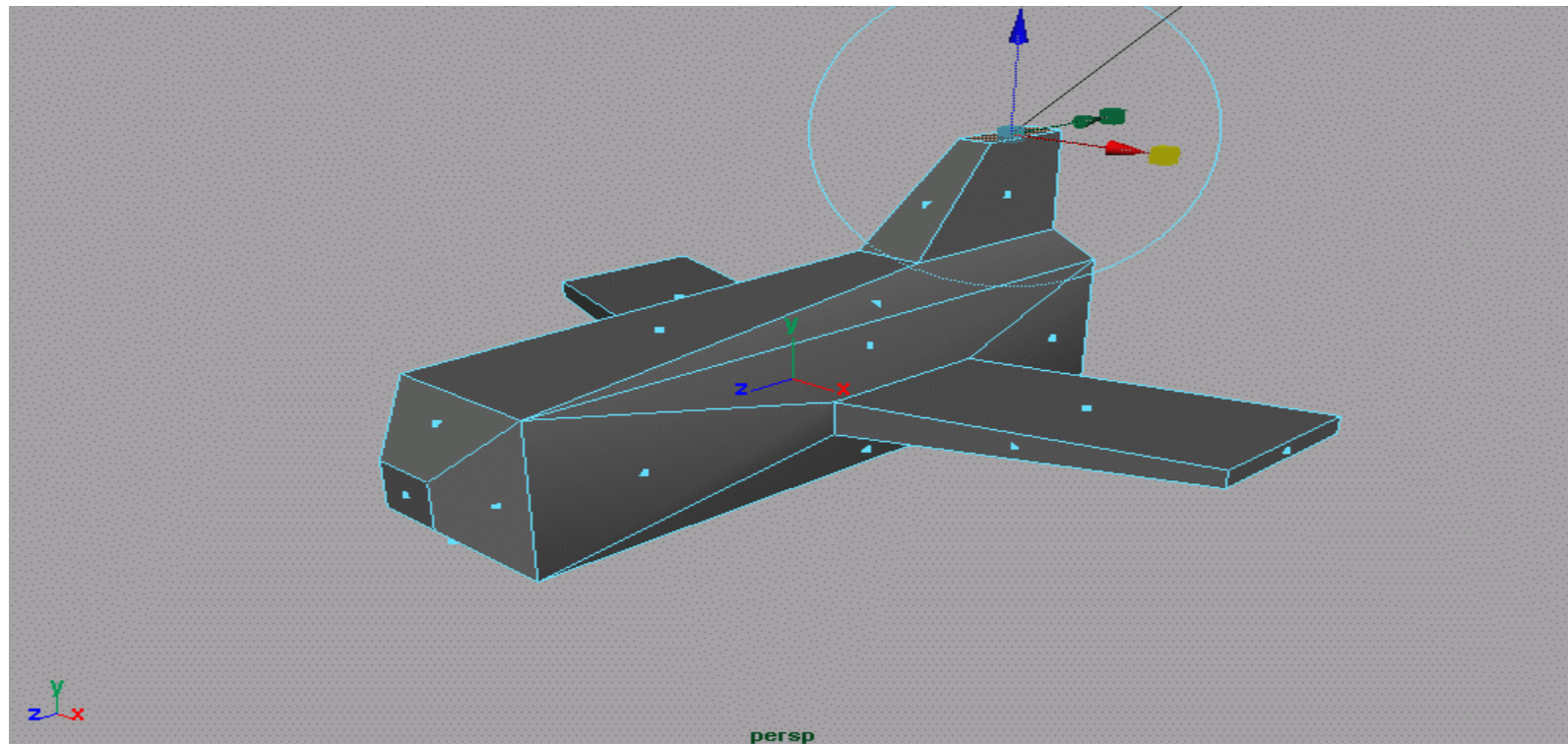


persp

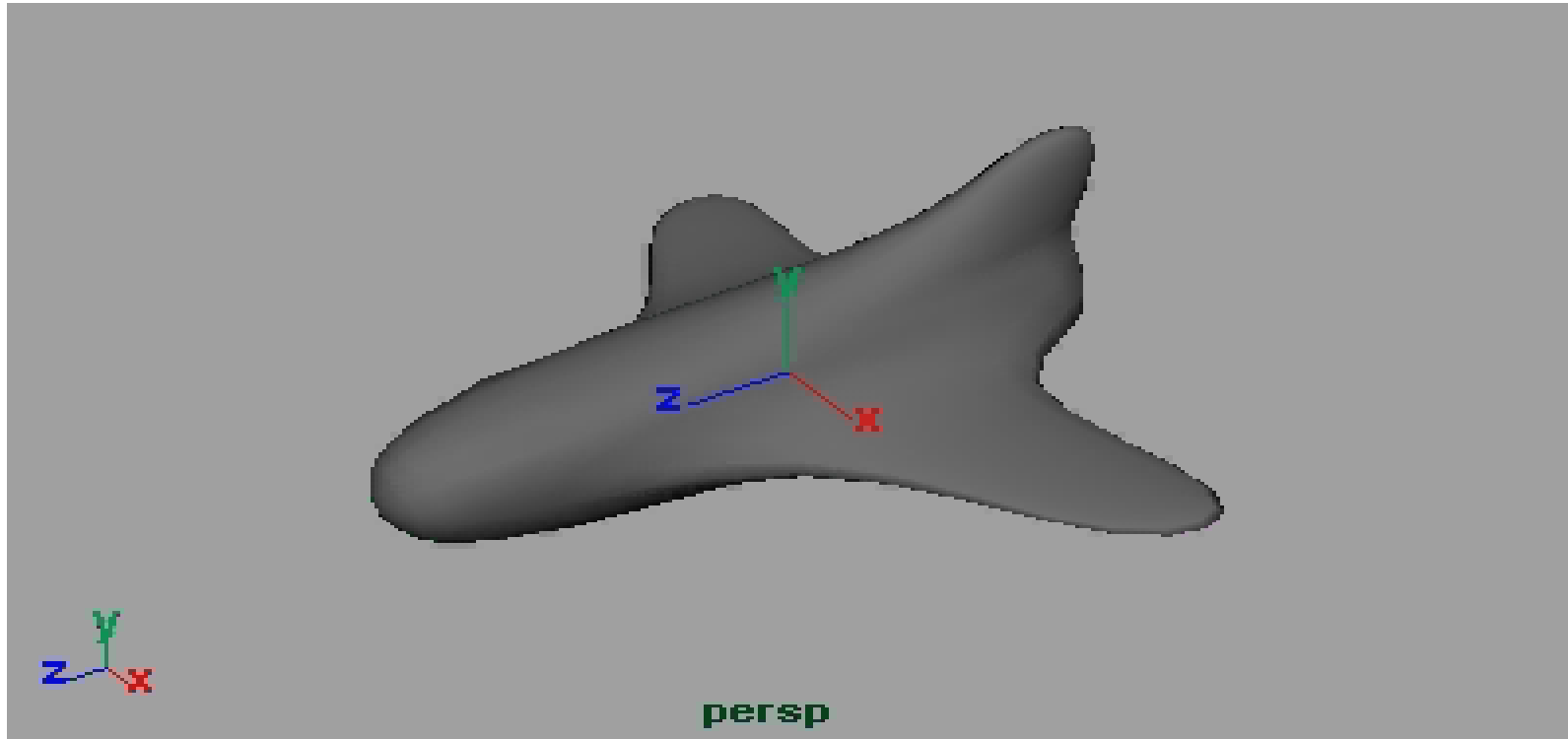
Lap kihúzás



Lap kihúzás



Subdivision simítás



Felület modellezés

- Explicit = magasságmező ritkán használható
- Implicit: geometriai definíció vektoralgebrai fordítása
 - Implicit felület normálvektor = gradiens
- Paraméteres: paraméteres görbékre vagy a súlypont analógiára vezetjük vissza
 - Paraméteres felület normálvektora = parciális deriváltak vektoriális szorzata
- Felosztott: háromszögháló