”A semmiből egy új, más világot teremtettem.”

Bolyai János

Geometriai modellezés
1. Pontok és klasszikus görbék

Szirmay-Kalos László

Cél: Euklideszi 2D és 3D világ

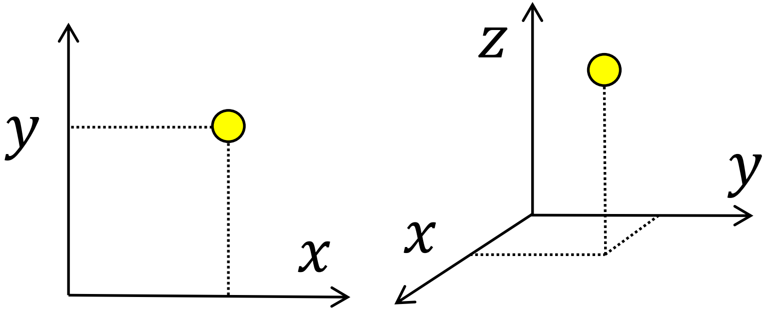
<u>2D világ:</u>

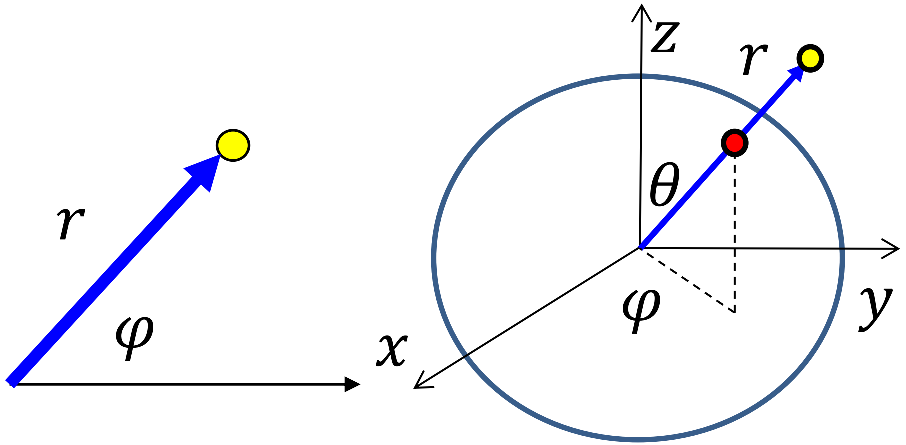
- Pont: 0D
- Síkgörbe: 1D
- Terület: 2D
- Fraktál: 0-2D

<u>3D világ:</u>

- Pont: 0D
- Térgörbe: 1D
- Felület: 2D
- Térfogat: 3D
- Fraktál: 0-3D

Pontok koordinátarendszerrel





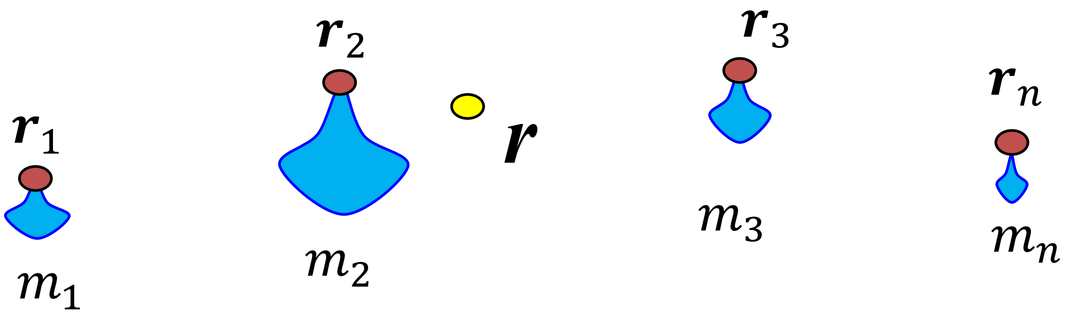
Descartes

Polár

Számokkal!

1. Koordinátarendszer (=referencia geometria)
2. Koordináták(=mérés)

Baricentrikus (homogén) koordináták

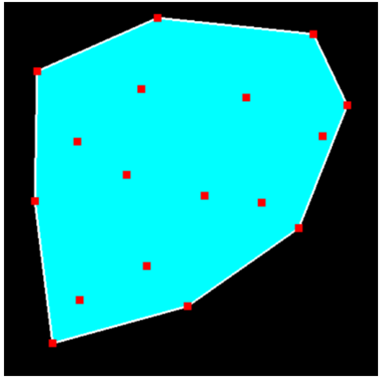


Forgatónyomaték zérus

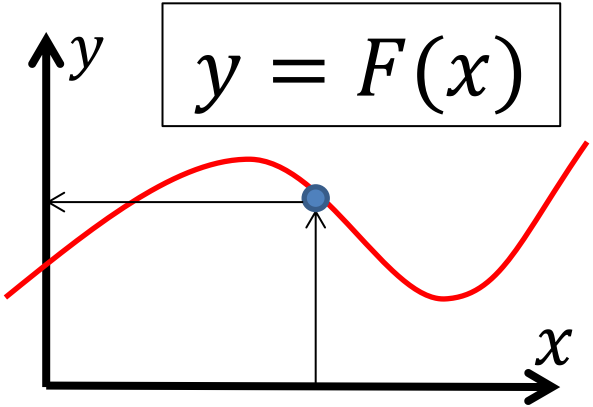
$$\sum_i (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}) \times m_i\, \boldsymbol{g} = 0$$

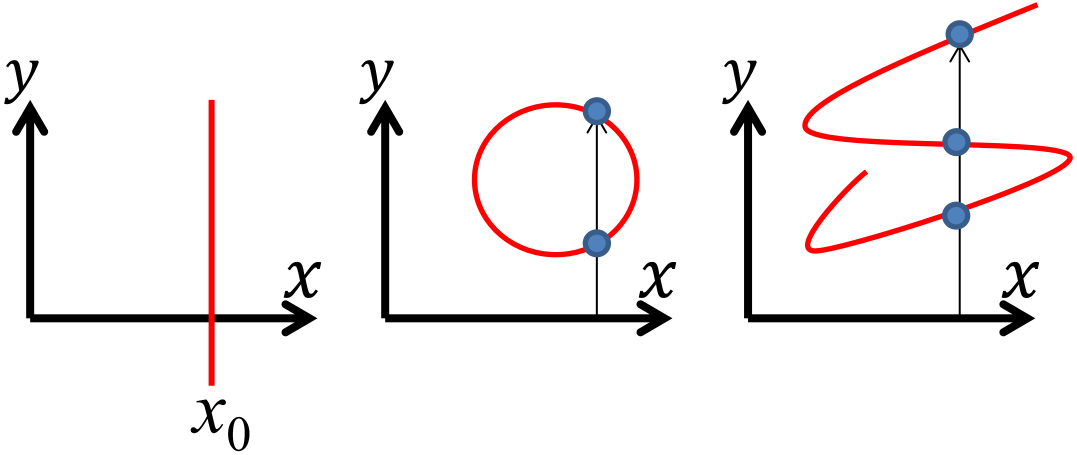
$$\boxed{\boldsymbol{r} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i} = \sum_i \alpha_i \boldsymbol{r}_i}$$

- $\boldsymbol{r}$ az $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$ **pontok kombinációja**
- Ha a súlyok nem negatívak: **konvex kombináció**
- Konvex kombináció a **konvex burkon** belül van
- Egyenes (szakasz) = két pont (konvex) kombinációja
- Sík (háromszög) = három pont (konvex) kombinációja



Görbék (1D): Explicit egyenlet





<u>2D egyenes:</u>

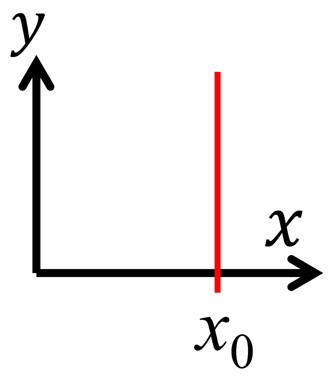
$$y = mx + b$$

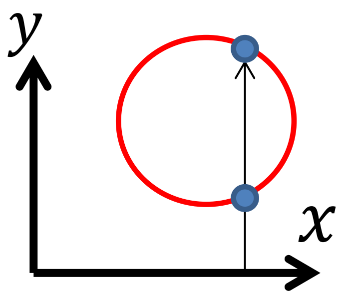
<u>Nem jó:</u>

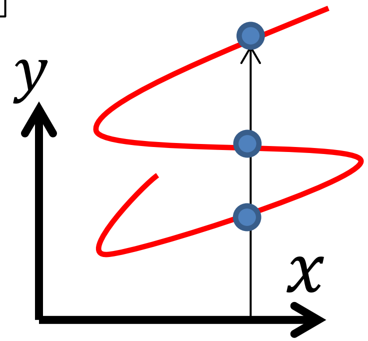
Egy x-hez nem pontosan egy y

Görbe: Implicit egyenlet

$$\boxed{f(x, y) = 0 \text{ vagy } f(\boldsymbol{r}) = 0}$$



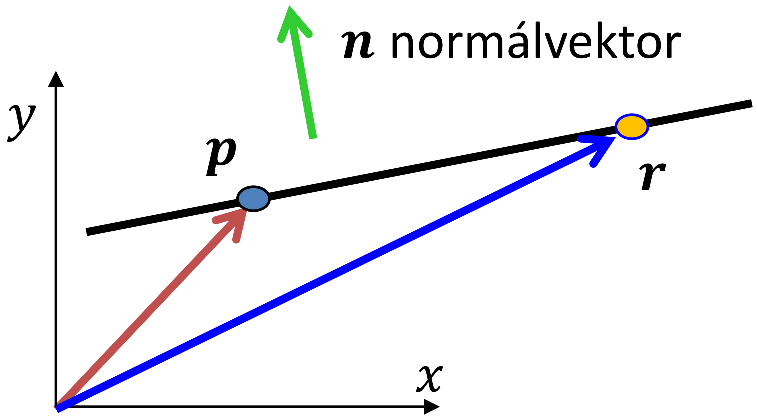




$$x - x_0 = 0$$

$$(x - c_x)^2 + \left(y - c_y\right)^2 - R^2 = 0$$

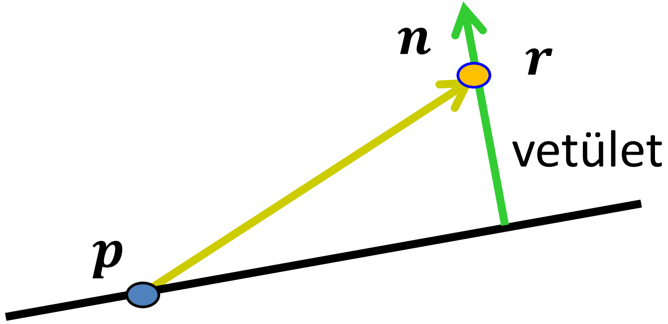
2D egyenes implicit egyenlete



$$\boxed{\begin{aligned}&\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p})=0\\&n_x(x-p_x)+n_y(y-p_y)=0\\&ax+by+c=0\end{aligned}}$$

Ez is: $(ax+by+c)^2=0$

<u>2D egyenestől mért távolság:</u>



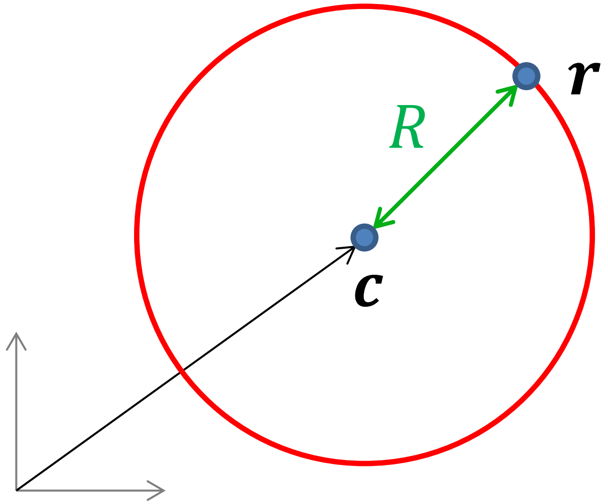
$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p})=$ Vetület $\boldsymbol{n}$-re $\times$ az $\boldsymbol{n}$ hossza

Ha $\boldsymbol{n}$ egységvektor:
$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p})=$ az előjeles távolság!

Kvadratikus görbék: Kör

Azon $\boldsymbol{r}(x,y)$ pontok, amelyek a $\boldsymbol{c}(c_x,c_y)$ középponttól R távolságra vannak:

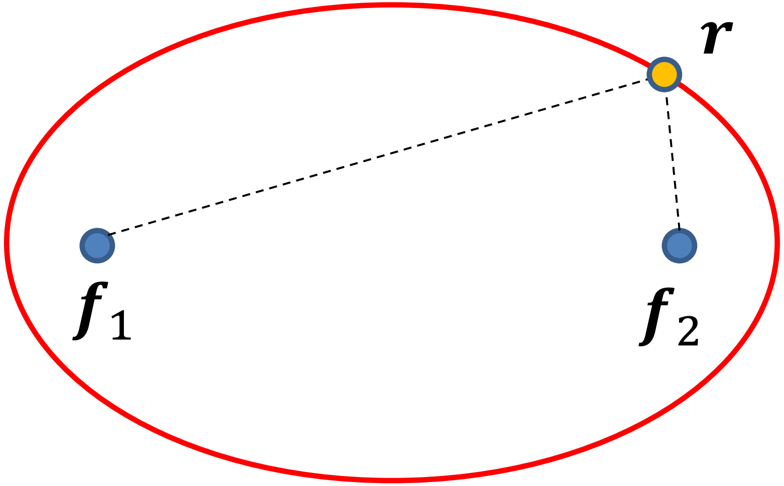
$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{c}| = R \leftrightarrow (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{c})^2 - R^2 = 0 \leftrightarrow (x-c_x)^2 + \left(y-c_y\right)^2 - R^2 = 0$$



Kvadratikus görbék: Ellipszis

Azon $\boldsymbol{r}$ pontok, amelyek a $\boldsymbol{f}_1$ és $\boldsymbol{f}_2$ fókuszpontoktól mért távolság összege állandó C:

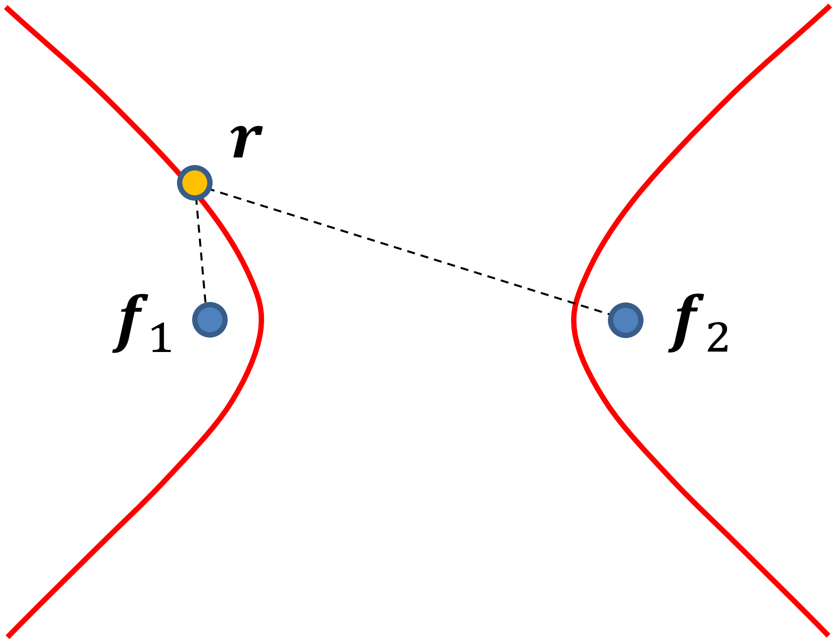
$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{f}_1| + |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{f}_2| = C$$



Kvadratikus görbék: Hiperbola

Azon $\boldsymbol{r}$ pontok, amelyek a $\boldsymbol{f}_1$és $\boldsymbol{f}_2$ fókuszpontoktól mért távolság különbsége állandó C:

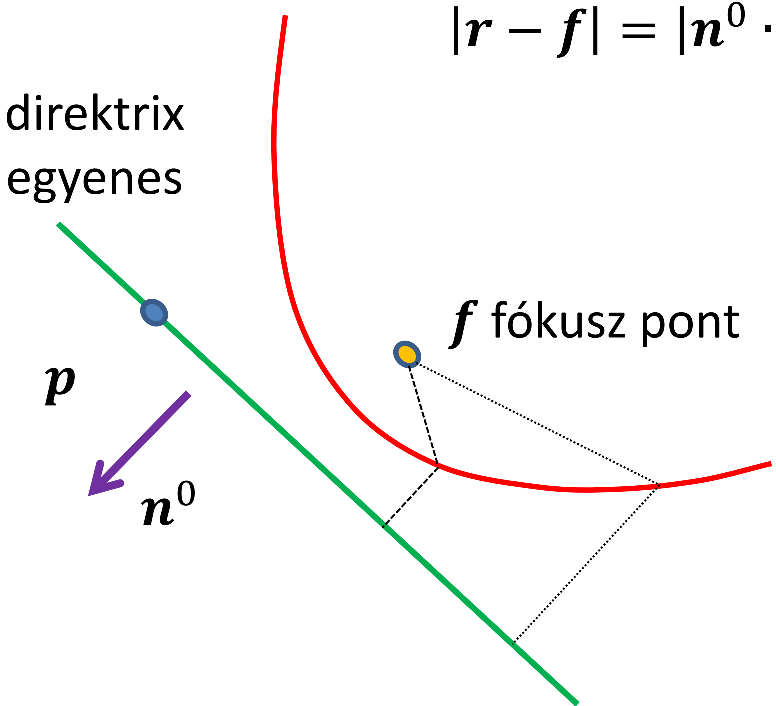
$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{f}_1|-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{f}_2|=C$$



Kvadratikus görbék: Parabola

Azon $\boldsymbol{r}$ pontok halmaza, amelyek az $\boldsymbol{f}$ fókuszponttól mért távolsága megegyezik az $\boldsymbol{n}$ normálvektorú és $\boldsymbol{p}$ helyvektorú egyenestől mért távolsággal:

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{f}| = |\boldsymbol{n}^0 \cdot (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p})|$$



Kvadratikus görbék = kvadratikus alak

- Implicit függvény négyzetgyökök nélkül:

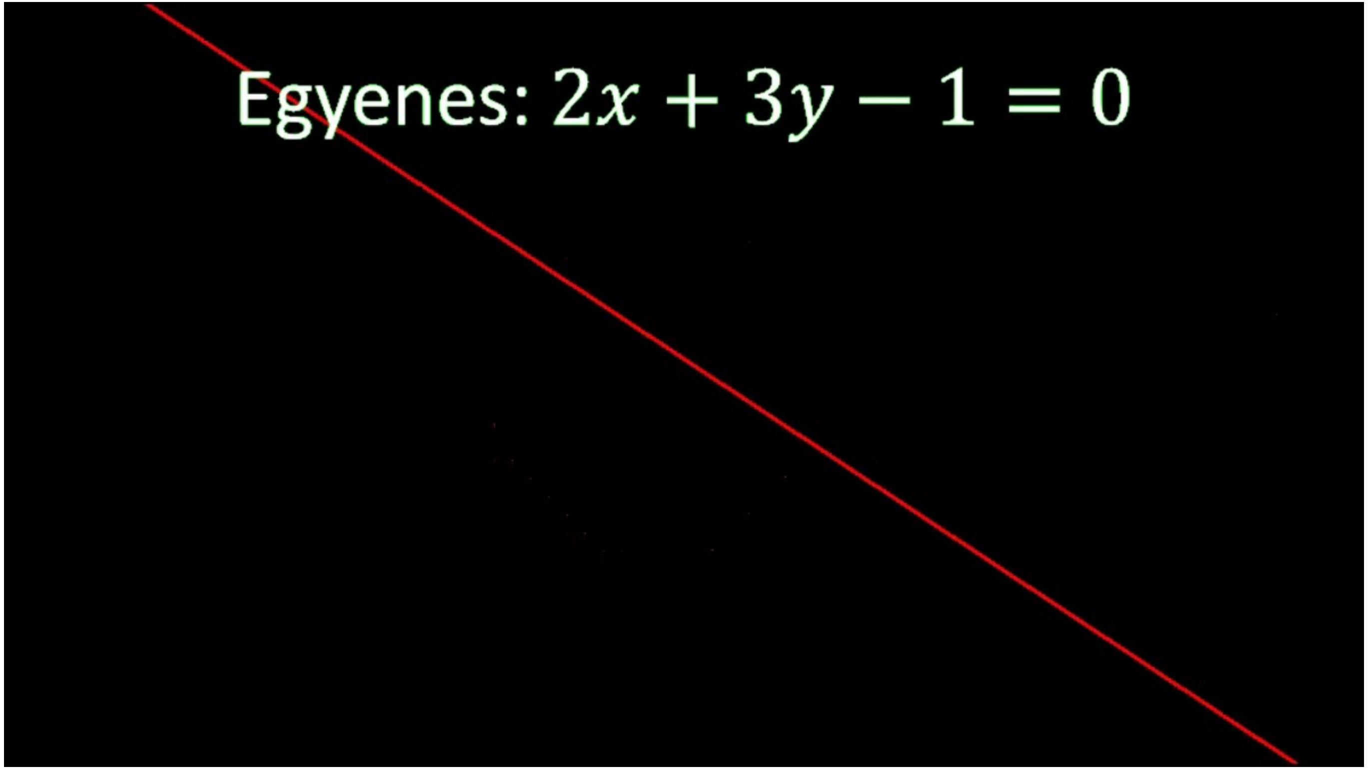
$$f(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

- Mátrixszal:

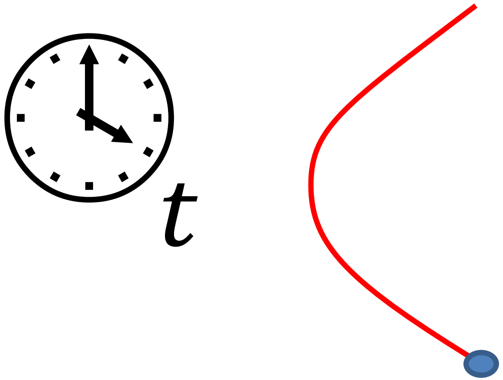
$$\boxed{f(x, y) = [x, y, 1] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0}$$

- Bármely tengelyű ésnbármely típusú kvadratikus görbe $\rightarrow$ 3x3-as mátrix (Visszafelé???)

Állatkert



Görbe: Paraméteres egyenlet



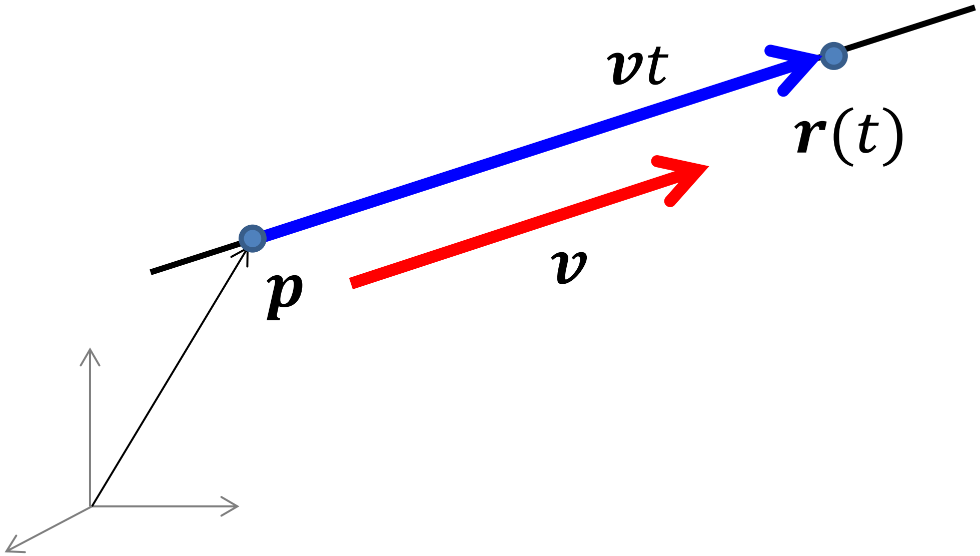
t

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

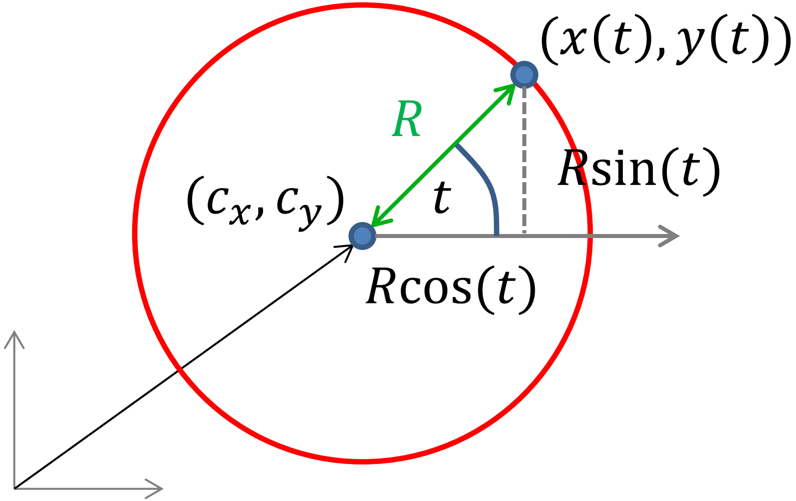
vagy $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$

Egyenes

$$x(t) = x_0 + v_x t$$
$$y(t) = y_0 + v_y t$$
$$z(t) = z_0 + v_z t$$
$$t \in (-\infty, +\infty)$$



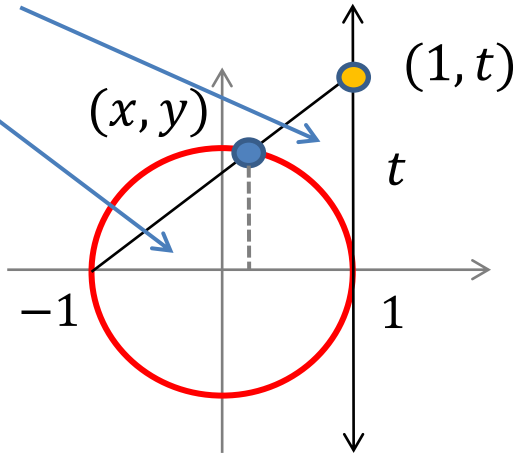
Kör



Hasonló
háromszögek,
arány: λ

$x = -1 + 2\lambda$

$y = \lambda t$



$$x(t) = c_x + R\cos(t)$$
$$y(t) = c_y + R\sin(t)$$
$$t \in [0, 2\pi)$$

$$x(t) = \frac{(4-t^2)}{(4+t^2)}$$
$$y(t) = \frac{4t}{(4+t^2)}$$

Klasszikus görbék

- **Cikloisz:**

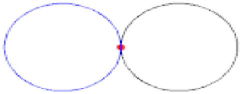
$$x(t) = t - \sin t$$
$$y(t) = 1 - \cos t$$

- **Tractrix:**

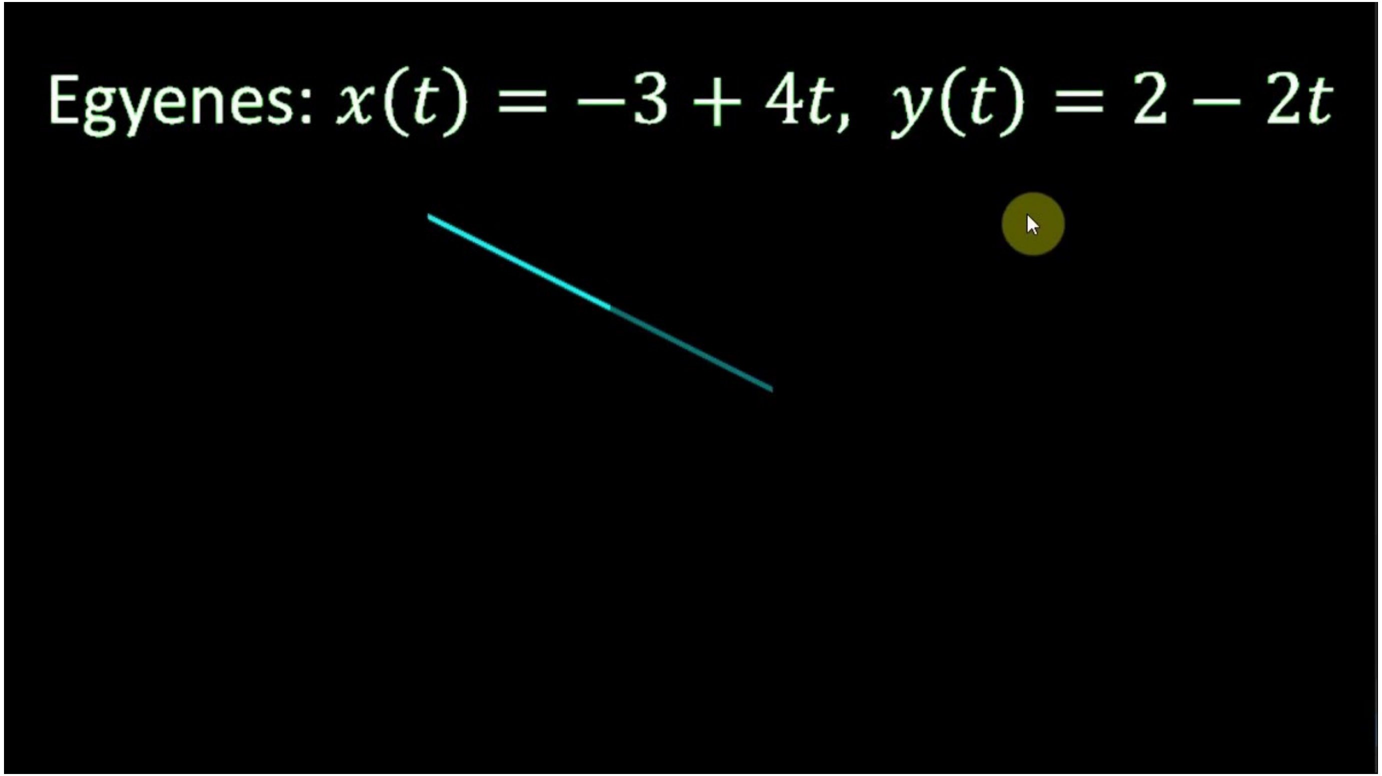
$$x(t) = \operatorname{sech} t$$
$$y(t) = t - \tanh t$$

- **Kardioid:**

$$x(t) = (1 - \cos t)\cos t$$
$$y(t) = (1 - \cos t)\sin t$$



Állatkert

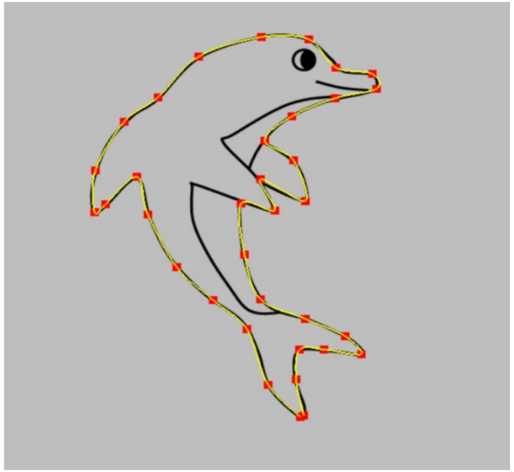


Pontok és klasszikus görbék

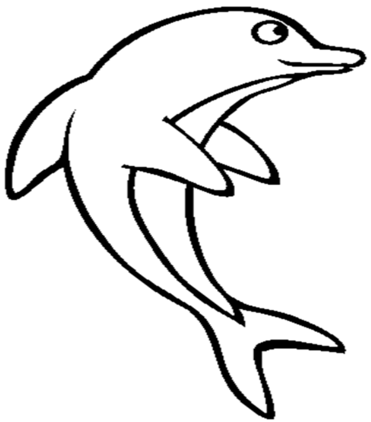
- Ponthoz koordinátarendszer kell
  - Descartes, Baricentrikus
- Görbéhez egyenlet kell
  - Az explicit ritkán használható
  - Az implicit feltételeket fogalmaz meg a pontokra
    - Azon pontok halmaza, amelyekben
      … pontok távolsága ($|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}|$), … merőleges ($\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{v} = 0$), … párhuzamos ($\boldsymbol{d} \times \boldsymbol{v} = 0$), … vetülete ($\boldsymbol{v}^0 \cdot \boldsymbol{r}$).
  - A paraméteres mozgásként fogalmazza meg a görbét

Geometriai modellezés
2. Szabadformájú görbék

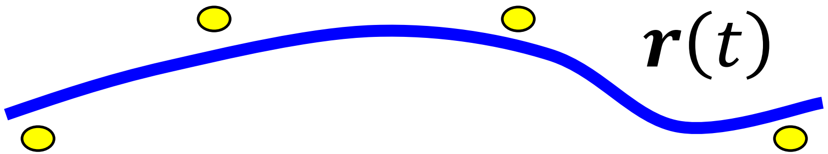
Szirmay-Kalos László



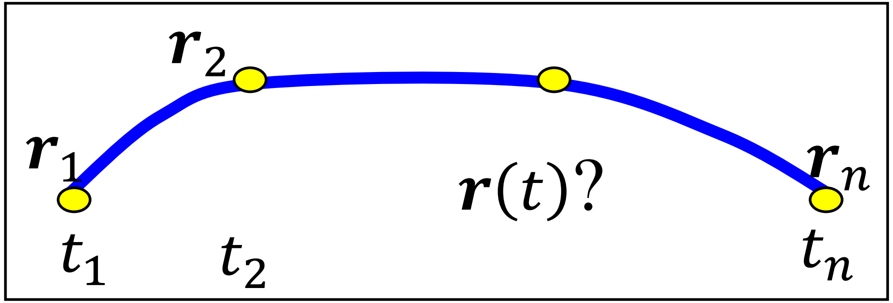
Szabadformájú görbék



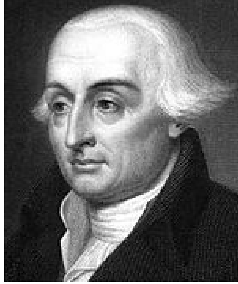
- Definíció vezérlőpontokkal



- Polinom: $\boxed{x(t) = \sum_i a_i t^i, y(t) = \sum_i b_i t^i, z(t) = \cdots}$
- Polinom együtthatók:
  - Kövesse a vezérlőpontokat: **Interpoláció/Approximáció**
  - **Természetesség:** C^2 folytonosság
  - **Szépség**: kis görbületváltozás indokolatlan hullámzás nélkül
  - Független legyen a koordinátarendszertől (súlypont)
  - Lokális vezérelhetőség



(Giuseppe) Lagrange interpoláció



- Keresd: $\boldsymbol{r}(t) = \left(\sum_i a_i t^i,\ \sum_i b_i t^i,\ \sum_i c_i t^i\right)$, amelyre

$$\boldsymbol{r}(t_1) = \boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}(t_2) = \boldsymbol{r}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{r}(t_n) = \boldsymbol{r}_n$$

- Hányad fokú a polinom? $n-1$

$$\boldsymbol{r}(t) = \sum_i L_i(t)\boldsymbol{r}_i \qquad \boldsymbol{r}(t_k) = \sum_i L_i(t_k)\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_k$$

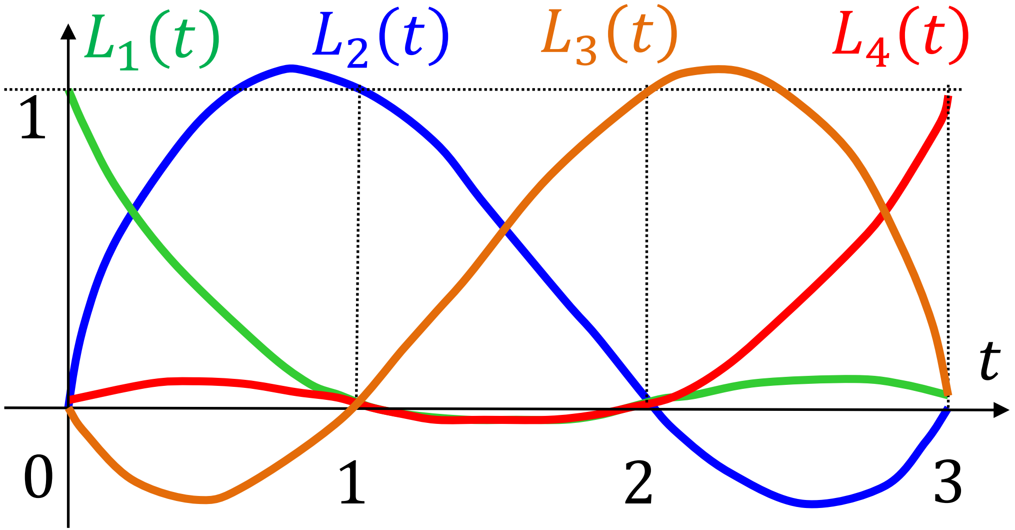
$$\boxed{L_i(t) = \frac{\prod_{j\neq i}(t - t_j)}{\prod_{j\neq i}(t_i - t_j)}} \qquad \boxed{L_i(t_k) = \frac{\prod_{j\neq i}(t_k - t_j)}{\prod_{j\neq i}(t_i - t_j)}} \begin{cases} 1 \text{ ha } i = k \\ 0 \text{ ha } i \neq k \end{cases}$$

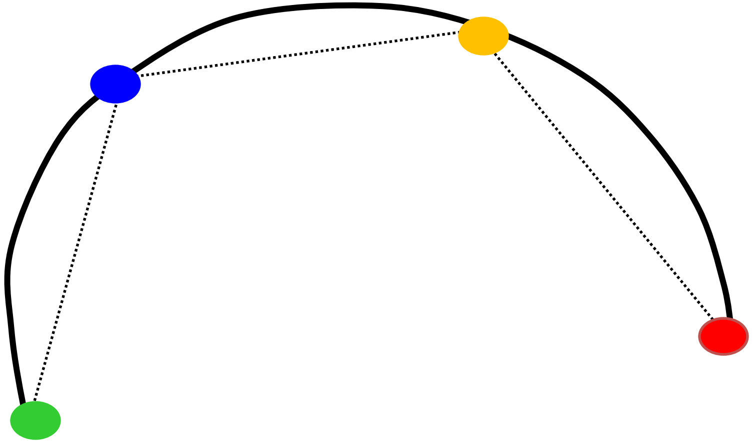
```
class LagrangeCurve {
   vector<vec3>  cps; // control pts
   vector<float> ts;  // knots
   float L(int i, float t) {
      float Li = 1.0f;
      for(int j = 0; j < cps.size(); j++)
         if (j != i) Li *= (t - ts[j])/(ts[i] - ts[j]);
      return Li;
   }
public:
   void AddControlPoint(vec3 cp) {
      float ti = cps.size(); // or something better
      cps.push_back(cp); ts.push_back(ti);
   }
   vec3 r(float t) {
        vec3 rt(0, 0, 0);
        for(int i = 0; i < cps.size(); i++) rt += cps[i] * L(i,t);
        return rt;
   }
};
```

$$L_i(t) = \frac{\prod_{j \neq i}(t - t_j)}{\prod_{j \neq i}(t_i - t_j)}$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \sum_i L_i(t)\boldsymbol{r}_i$$

Lagrange interpoláció bázisfüggvényei

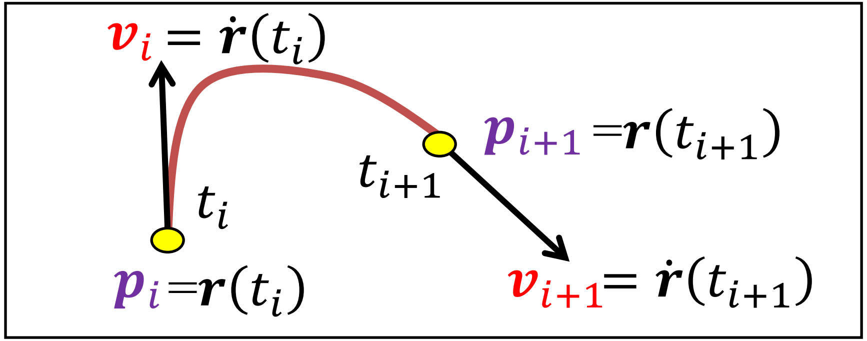




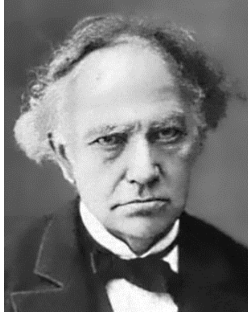
$$\boldsymbol{r}(t) = \sum_i L_i(t)\boldsymbol{r}_i$$

$$L_i(t) = \frac{\prod_{j\neq i}(t - t_j)}{\prod_{j\neq i}(t_i - t_j)}$$

(Charles) Hermite interpoláció



$$\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{p}_i$$
$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{v}_i$$
$$\boldsymbol{a}_2 = \frac{3(\boldsymbol{p}_{i+1} - \boldsymbol{p}_i)}{(t_{i+1} - t_i)^2} - \frac{(\boldsymbol{v}_{i+1} + 2\boldsymbol{v}_i)}{t_{i+1} - t_i}$$
$$\boldsymbol{a}_3 = \frac{2(\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_{i+1})}{(t_{i+1} - t_i)^3} + \frac{(\boldsymbol{v}_{i+1} + \boldsymbol{v}_i)}{(t_{i+1} - t_i)^2}$$



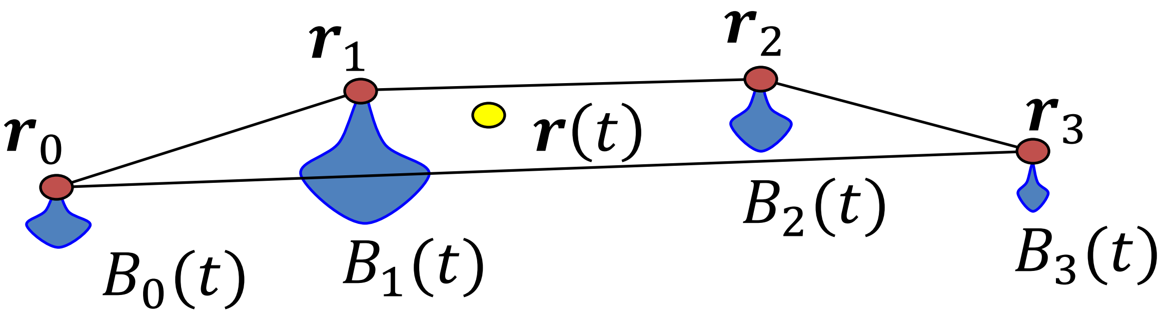
- $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a}_3(t - t_i)^3 + \boldsymbol{a}_2(t - t_i)^2 + \boldsymbol{a}_1(t - t_i) + \boldsymbol{a}_0$
- $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = 3\boldsymbol{a}_3(t - t_i)^2 + 2\boldsymbol{a}_2(t - t_i) + \boldsymbol{a}_1$

$$\boldsymbol{r}(t_i) = \boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{p}_i$$
$$\boldsymbol{r}(t_{i+1}) = \boldsymbol{a}_3(t_{i+1} - t_i)^3 + \boldsymbol{a}_2(t_{i+1} - t_i)^2 + \boldsymbol{a}_1(t_{i+1} - t_i) + \boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{p}_{i+1}$$
$$\dot{\boldsymbol{r}}(t_i) = \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{v}_i$$
$$\dot{\boldsymbol{r}}(t_{i+1}) = 3\boldsymbol{a}_3(t_{i+1} - t_i)^2 + 2\boldsymbol{a}_2(t_{i+1} - t_i) + \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{v}_{i+1}$$

(Pierre) Bézier approximáció

Keresd: $\boldsymbol{r}(t) = \sum_i B_i(t)\boldsymbol{r}_i$

- $B_i(t)$: ne oszcilláljon
- Konvex burok tulajdonság
- $B_i(t) \geq 0, \quad \sum_i B_i(t) = 1$



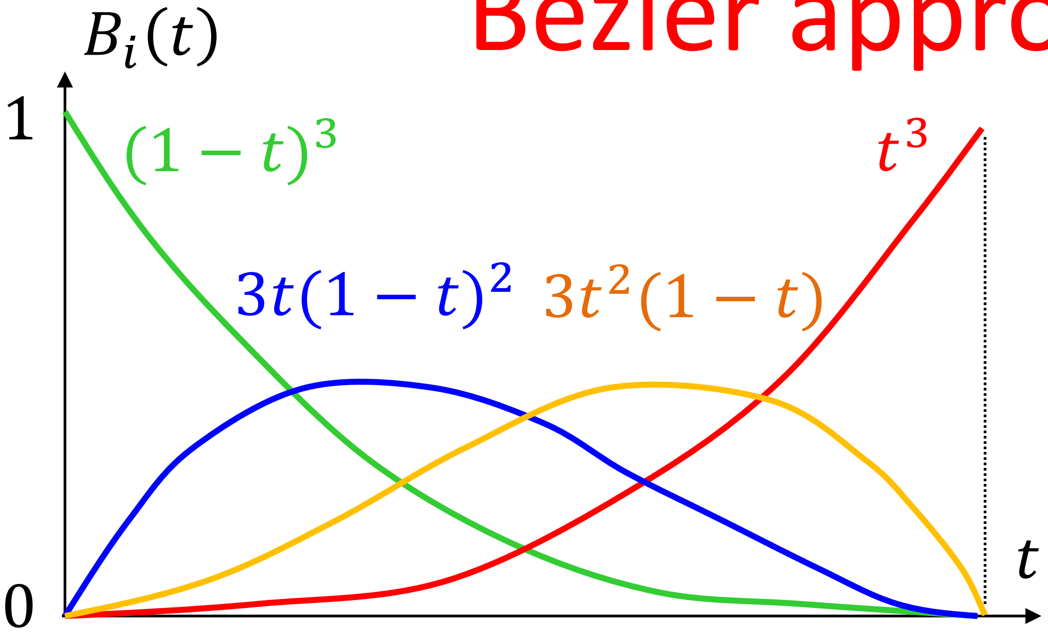
(Сергéй Натáнович) Bernstein polinomok

Newton binomiális tétel

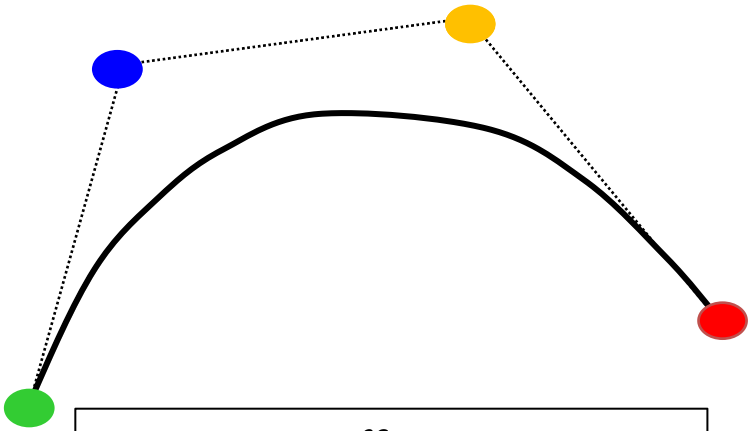
$$1^n = (t + (1-t))^n = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\boxed{\binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}}}_{B_i(t)}$$

$$B_i(t) \geq 0,\ \sum_i B_i(t) = 1\ :\ \text{OK}$$

Bézier approximáció



$n = 3$



$$B_i(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i(t)\boldsymbol{r}_i$$

BezierCurve

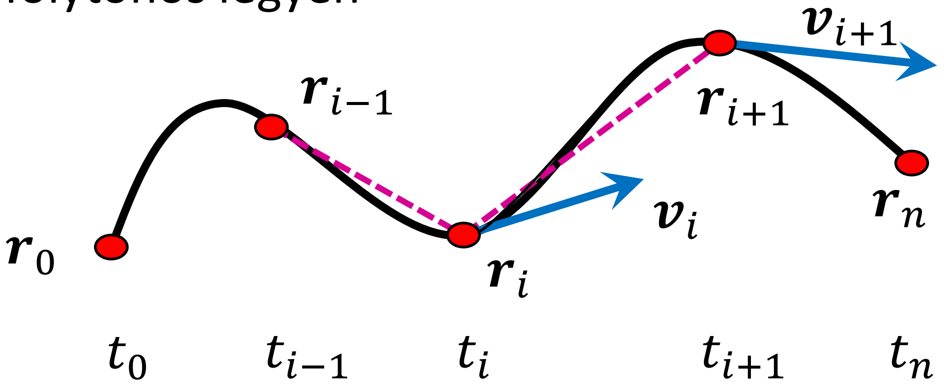
```
class BezierCurve {
   vector<vec3> cps;   // control pts
   float B(int i, float t) {
        int n = cps.size()-1; // n+1 pts!
        float choose = 1;
        for(int j = 1; j <= i; j++) choose *= (float)(n-j+1)/j;
        return choose * pow(t, i) * pow(1-t, n-i);
   }
public:
   void AddControlPoint(vec3 cp) { cps.push_back(cp); }
   vec3 r(float t) {
        vec3 rt(0, 0, 0);
        for(int i=0; i < cps.size(); i++) rt += cps[i] * B(i,t);
        return rt;
   }
};
```

$$B_i(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i(t)\boldsymbol{r}_i$$

Catmull-Rom spline

- Minden két vezérlőpont közé egy Hermite
- C^1 simaság: a sebesség is legyen közös két egymás utánira
- Közelítő C^2 simaság: A közös sebességet úgy válaszd meg, hogy a gyorsulás is közelítőleg folytonos legyen



$$\boldsymbol{v}_i = \frac{1-\tau}{2}\left(\frac{\boldsymbol{r}_{i+1}-\boldsymbol{r}_i}{t_{i+1}-t_i} + \frac{\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\right)$$

Általánosítás: Tenzió, Bias

CatmullRom

```
class CatmullRom {
    vector<vec3>  cps; // control points
    vector<float> ts;  // parameter (knot) values
    vec3 Hermite(vec3 p0, vec3 v0, float t0, vec3 p1, vec3 v1, float t1,
                 float t) {
```

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a}_3(t-t_0)^3 + \boldsymbol{a}_2(t-t_0)^2 + \boldsymbol{a}_1(t-t_0) + \boldsymbol{a}_0$$

$$\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{p}_i\,,\ \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{v}_i$$

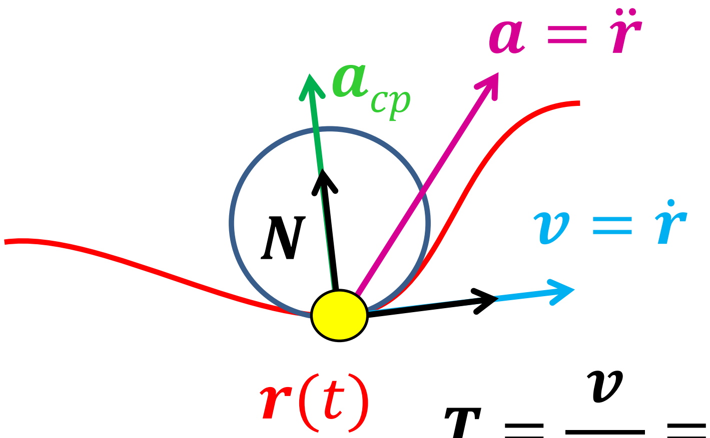
$$\boldsymbol{a}_2 = \frac{3(\boldsymbol{p}_{i+1}-\boldsymbol{p}_i)}{(t_{i+1}-t_i)^2} - \frac{(\boldsymbol{v}_{i+1}+2\boldsymbol{v}_i)}{t_{i+1}-t_i}$$

$$\boldsymbol{a}_3 = \frac{2(\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}_{i+1})}{(t_{i+1}-t_i)^3} + \frac{(\boldsymbol{v}_{i+1}+\boldsymbol{v}_i)}{(t_{i+1}-t_i)^2}$$

```
    }
public:
    void AddControlPoint(vec3 cp, float t) { … }
    vec3 r(float t) {
         for(int i = 0; i < cps.size() - 1; i++)
            if (ts[i] <= t && t <= ts[i+1]) {
                 vec3 v0 = …, v1 = …;
                 return Hermite(cps[i], v0, ts[i],cps[i+1], v1, ts[i+1], t);
            }
    }
};
```

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{r}_{i+1}-\boldsymbol{r}_i}{t_{i+1}-t_i} + \frac{\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\right)$$

Érintő, normál és görbület

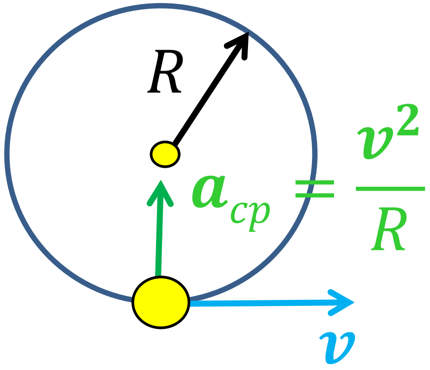


$$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}$$

Normál: $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{T}_\perp = (-\boldsymbol{T}_y, \boldsymbol{T}_x)$

Centripetális gyorsulás:

$$a_{cp} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{N} = \ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{\dot{\boldsymbol{r}}_\perp}{|\dot{\boldsymbol{r}}|} = \frac{\boldsymbol{v}^2}{R}$$



Görbület: $\kappa = \frac{1}{R} = \frac{a_{cp}}{v^2} = \frac{\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_\perp}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3}$

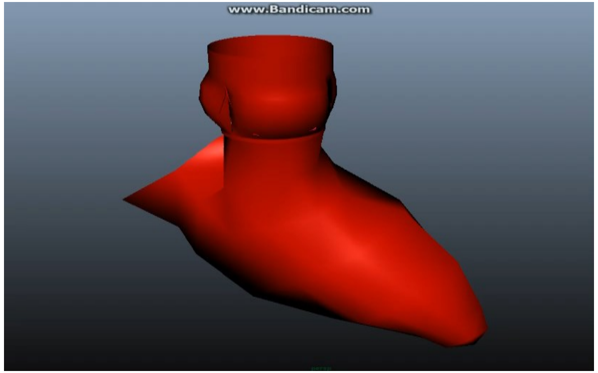
Szabadformájú görbék

- Paraméteres egyenlet (mozgás), polinomok
- Kontrolpontokkal definiáljuk (approximációs, interpolációs)
- Görbe = kontrolpontok kombinációja (súlypont)
- Görbe tulajdonságait a súlyfüggvények határozzák meg
  - Folytonosság (C^0, C^1, C^2)
  - Konvex burok: súlyfüggvények nem negatívak
  - Lokális vezérelhetőség: súlyfüggvények a tartomány egy részében nem zérus értékűek

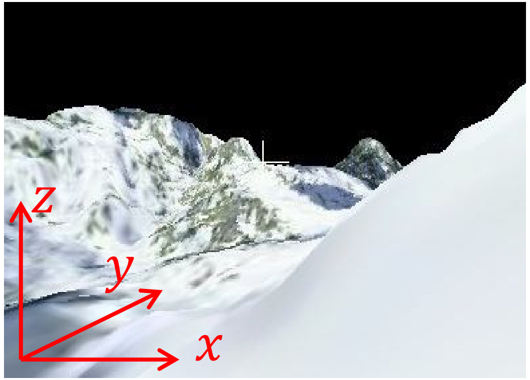
”La semplicità è la sofistificazione finale.”
Leonardo da Vinci

Geometriai modellezés
3. Felületek

Szirmay-Kalos László

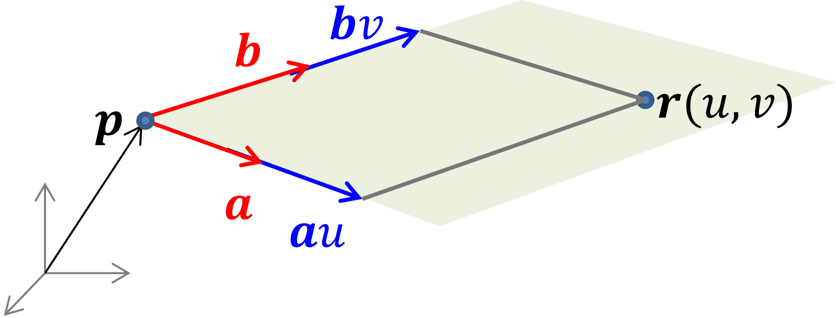


Felületek



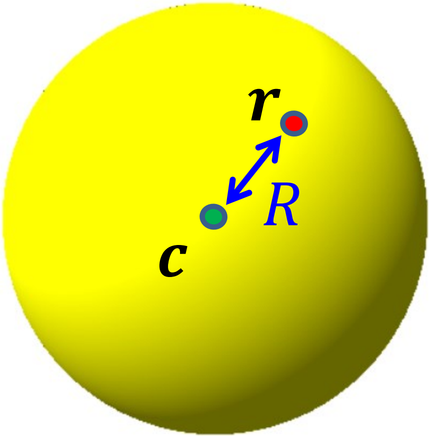
Felület a 3D tér 2D részhalmaza:

- **Explicit:** $\boxed{z = h(x, y)}$
- **Implicit:** $\boxed{f(x, y, z) = 0; \quad f(\boldsymbol{r}) = 0}$
  - sík: $ax + by + cz + d = 0$
- **Parametrikus:** $\boxed{x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v); \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)}$
  - sík: $\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{a}u + \boldsymbol{b}v$



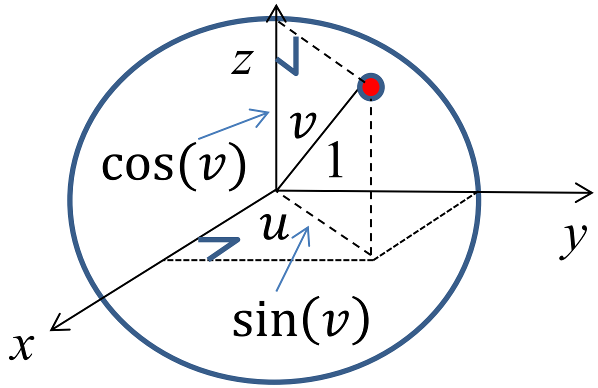
Gömb

Implicit



$$(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 + (z - c_z)^2 - R^2 = 0$$

Parametrikus



$$x(u,v) = c_x + R\cos(u)\sin(v)$$
$$y(u,v) = c_y + R\sin(u)\sin(v)$$
$$z(u,v) = c_z + R\cos(v)$$
$$u \in [0,2\pi), v \in [0,\pi)$$

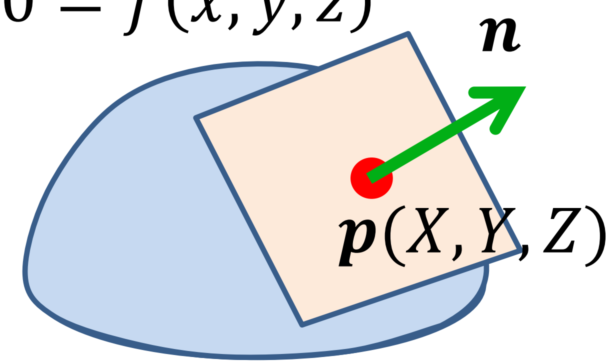
Implicit felületek normálvektora

$$\boxed{\text{Normál vektor} = \text{grad}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)}$$

$$\begin{aligned} 0 &= f(x, y, z) \\ &= f\big(X + (x - X), Y + (y - Y), Z + (z - Z)\big) \\ &\approx \cancel{f(X, Y, Z)} + \frac{\partial f}{\partial x}(x - X) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - Y) + \frac{\partial f}{\partial z}(z - Z) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot (x - X, y - Y, z - Z) = 0$$

$$0 = f(x, y, z)$$

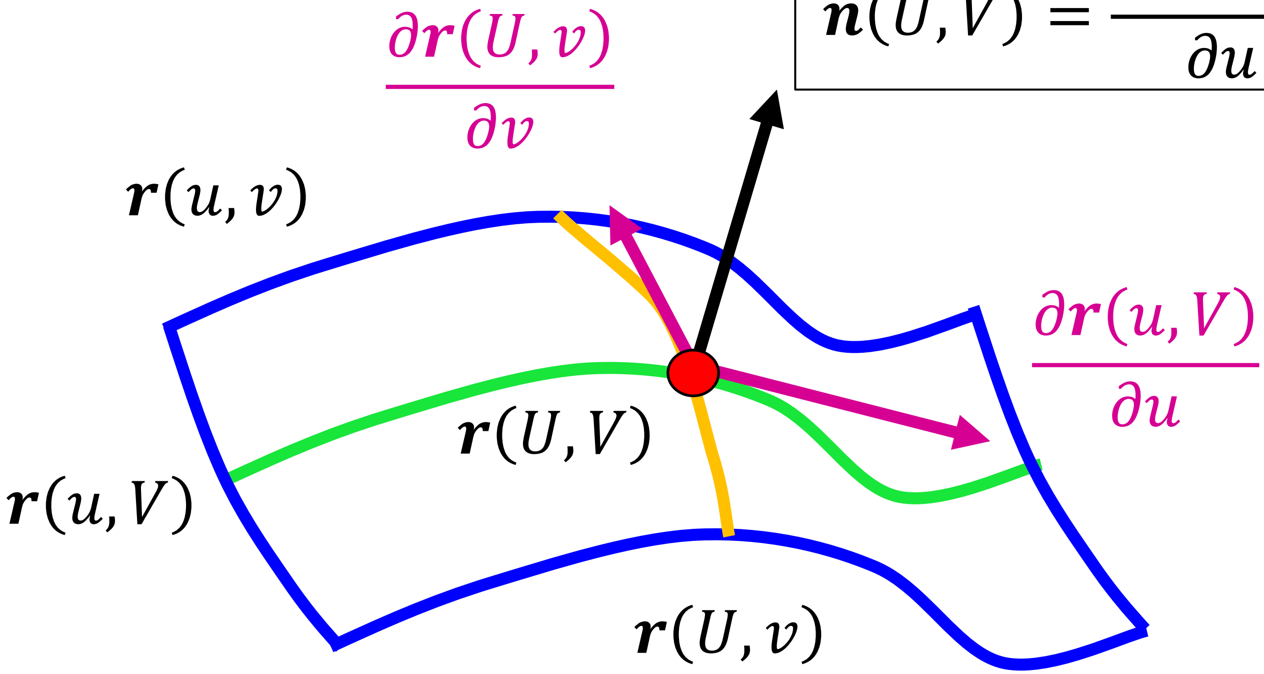


$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}) = \mathbf{0}$$

Parametrikus felületek normálvektora

$$\boxed{\boldsymbol{n}(U,V) = \frac{\partial \boldsymbol{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}(u,v)}{\partial v}}$$

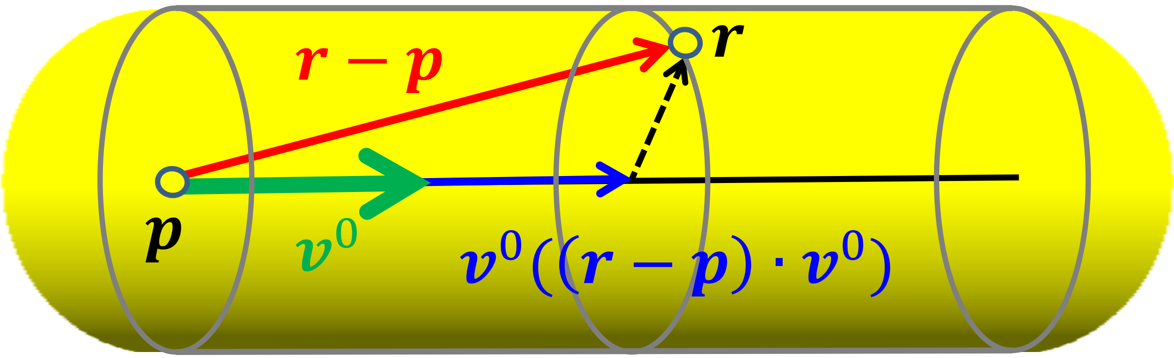
$$u = U$$
$$v = V$$



Implicit kvadratikus felületek: Henger

Azon $\boldsymbol{r}$ pontok, amelyek a $\boldsymbol{v}^0$ irányvektorú és $\boldsymbol{p}$ helyvektorú egyenestől mért távolsága R:

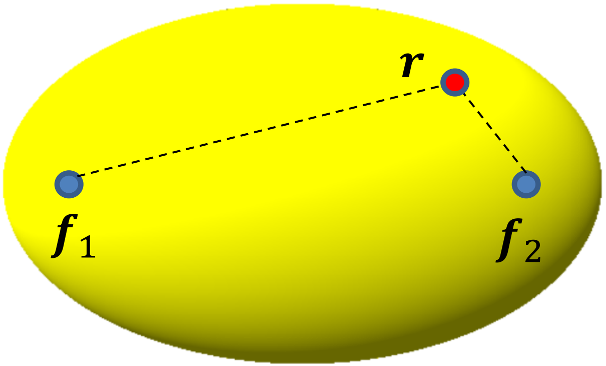
$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p} - \boldsymbol{v}^0((\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{v}^0)\,| = R$$



Implicit kvadratikus felületek: Ellipszoid és hiperboloid

Ellipszoid: Azon $\boldsymbol{r}$ pontok, amelyek a $\boldsymbol{f}_1$és $\boldsymbol{f}_2$ fókuszpontoktól mért távolság összege állandó C:

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{f}_1|+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{f}_2|=C$$

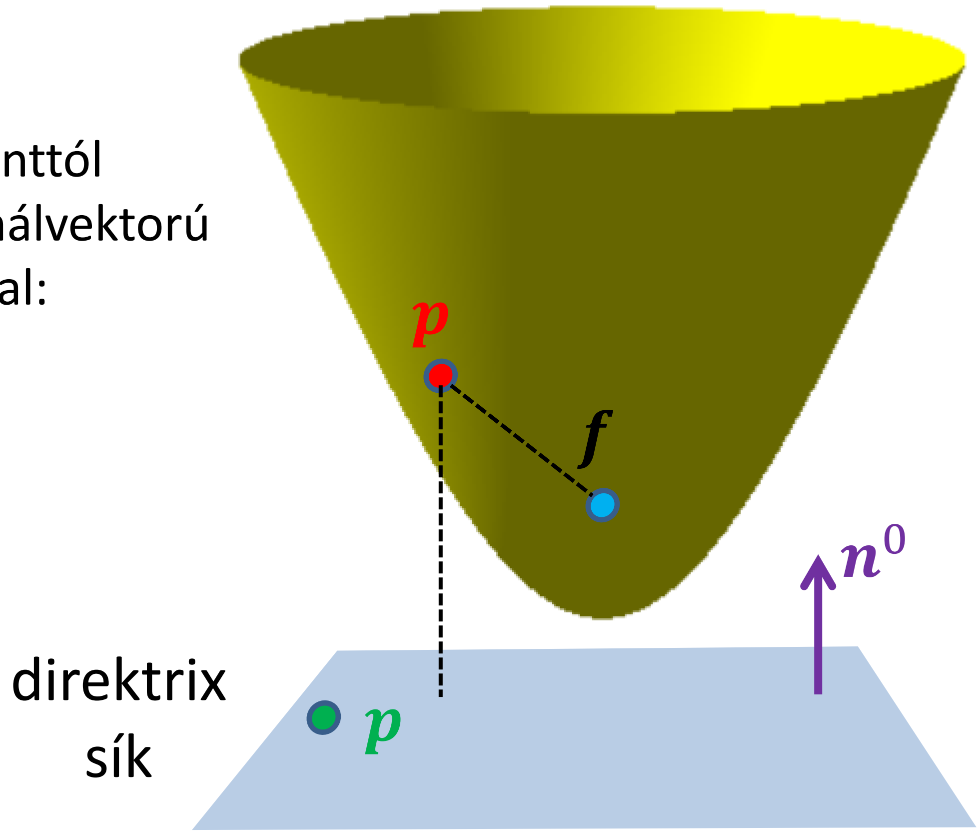


Hiperboloid: Azon $\boldsymbol{r}$ pontok, melyek a $\boldsymbol{f}_1$és $\boldsymbol{f}_2$ fókuszpontoktól mért távolság különbsége állandó C: $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{f}_1|-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{f}_2|=C$

Implicit kvadratikus felületek: Paraboloid

Azon $\boldsymbol{r}$ pontok, amelyek az $\boldsymbol{f}$ fókuszponttól mért távolsága megegyezik az $\boldsymbol{n}$ normálvektorú és $\boldsymbol{p}$ helyvektorú síktól mért távolsággal:

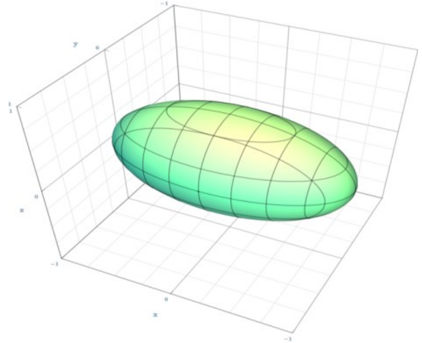
$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{f}| = |\boldsymbol{n}^0 \cdot (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p})|$$



Implicit kvadratikus felületek

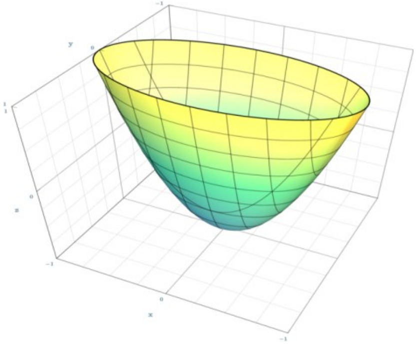
$$f(x,y,z) = [x,y,z,1]\mathbf{Q}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix} = 0$$

Mindig felírható úgy is, hogy $\mathbf{Q}$ szimmetrikus



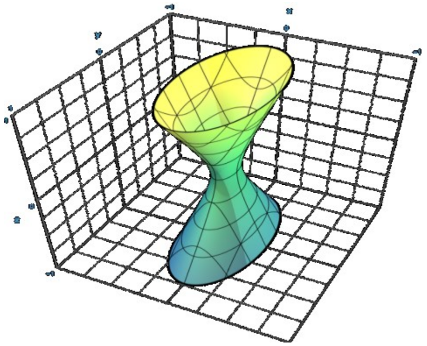
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

Ellipszoid



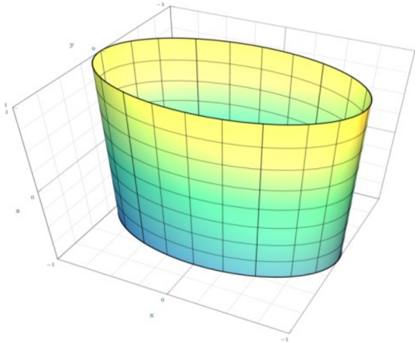
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$$

Paraboloid



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

Hiperboloid



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

Elliptikus henger

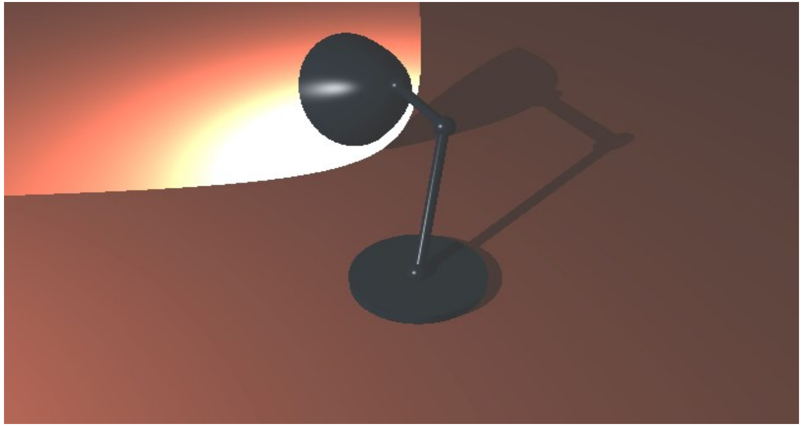
Kvadratikus objektum

$$f(x,y,z) = [x,y,z,1]\mathbf{Q}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

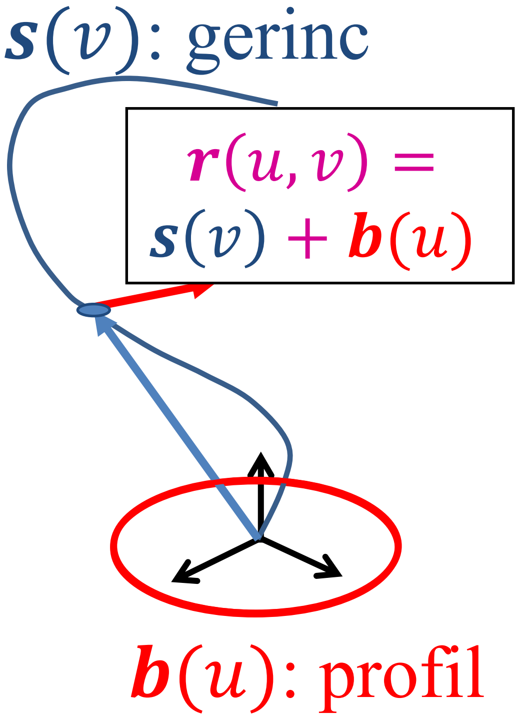
```
struct Quadrics {
   mat4 Q; // symmetric matrix
   float f(vec4 r) { // r.w = 1
      return dot(r * Q, r);
   }
   vec3 gradf(vec4 r) { // r.w = 1
      vec4 g = r * Q * 2;
      return vec3(g.x, g.y, g.z);
   }
};
```

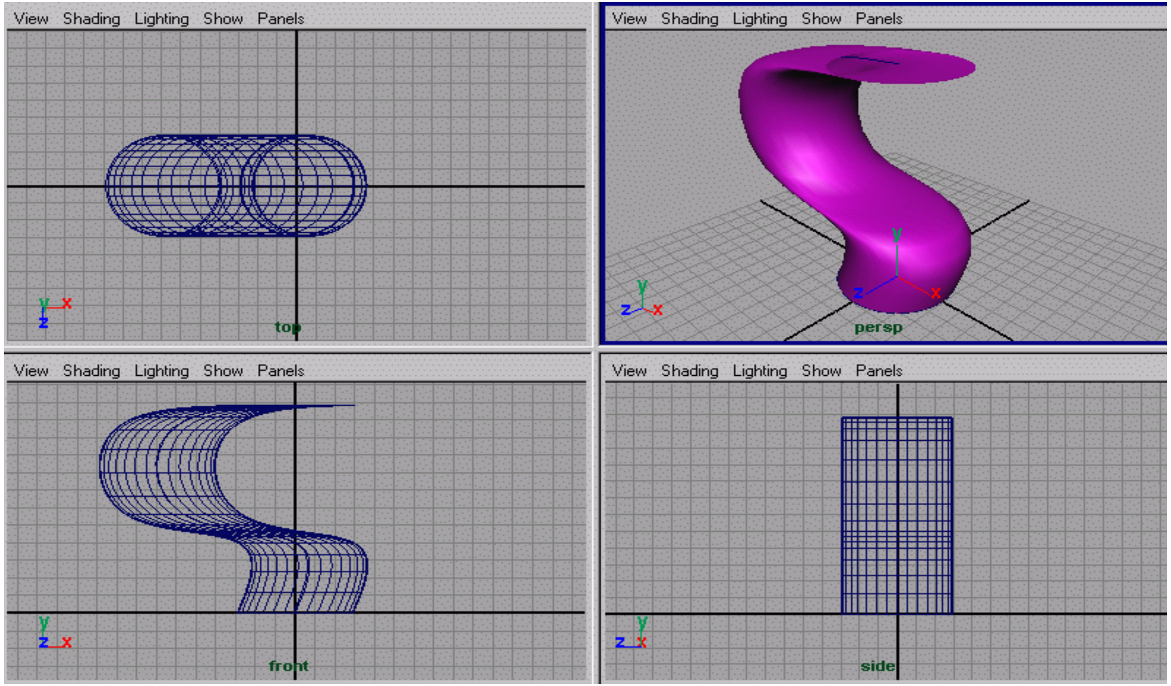
$$\frac{\partial f}{\partial x} = [1,0,0,0]\mathbf{Q}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} + [x,y,z,1]\mathbf{Q}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= [x,y,z,1]\mathbf{Q}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



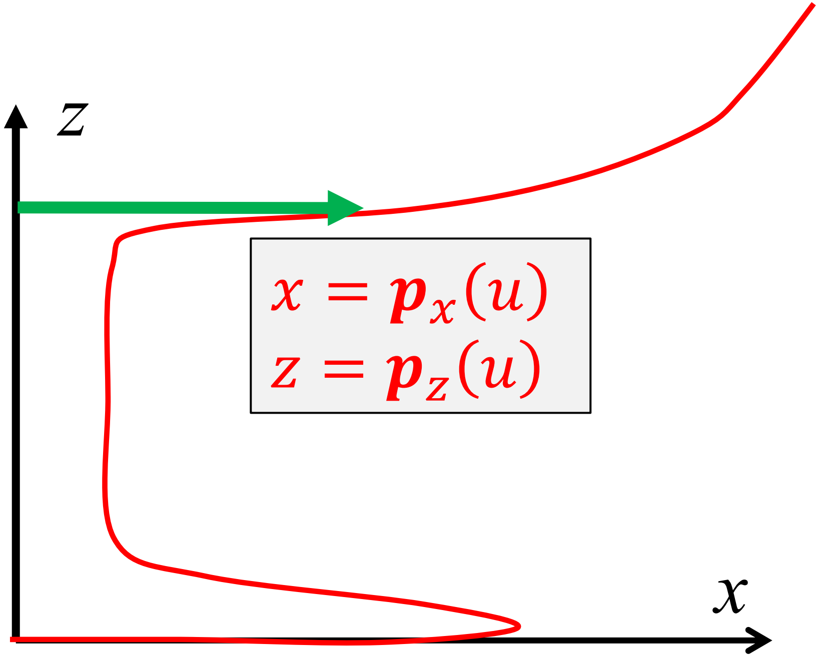
Parametrikus felületek: Kihúzás





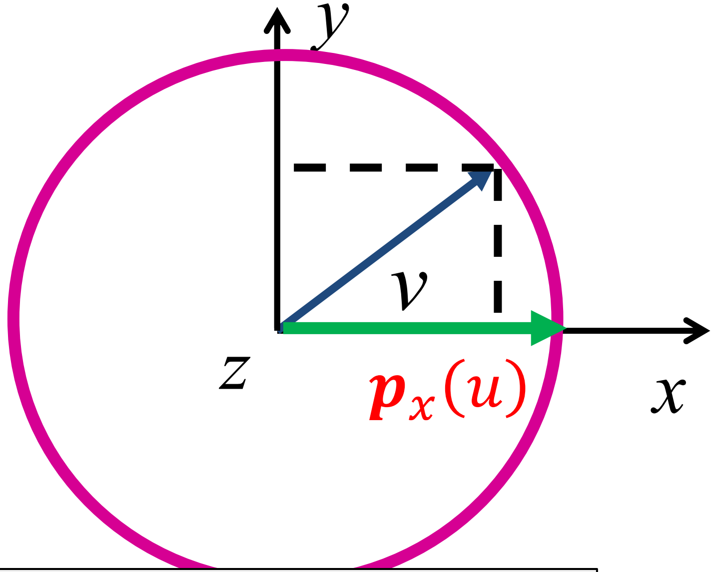
Parametrikus felületek: Forgatás

Oldalnézet



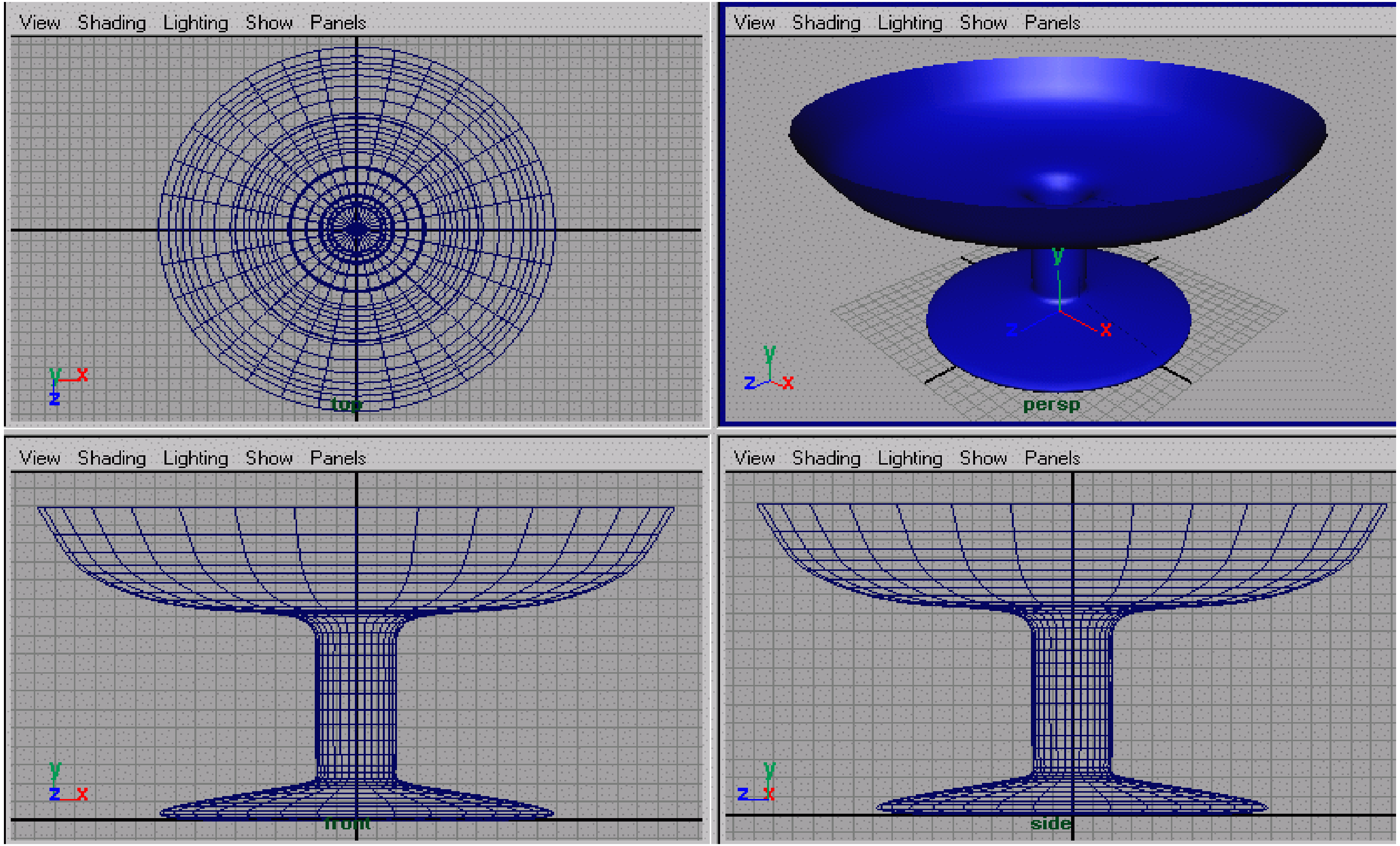
$$x = \boldsymbol{p}_x(u)$$
$$z = \boldsymbol{p}_z(u)$$

Felülnézet

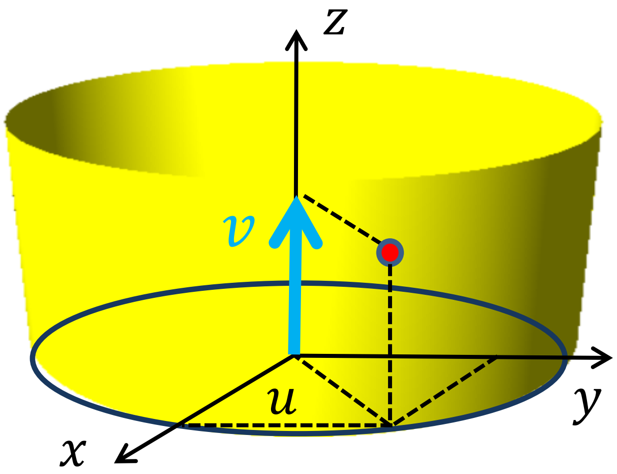


$$x = \boldsymbol{p}_x(u)\cos(v)$$
$$y = \boldsymbol{p}_x(u)\sin(v)$$
$$z = \boldsymbol{p}_z(u)$$

Forgatás


View Shading Lighting Show Panels
top
View Shading Lighting Show Panels
persp
View Shading Lighting Show Panels
front
View Shading Lighting Show Panels
side

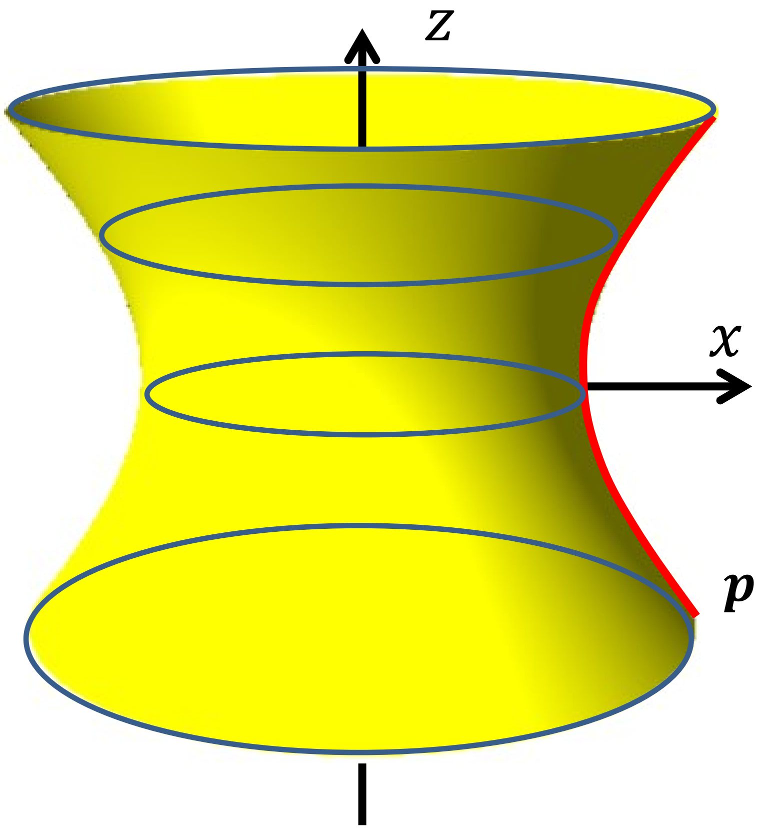
Henger



$$\boldsymbol{b}(u) = (R\cos(u)\,, R\sin(u)\,, 0)$$

$$x(u,v) = R\cos(u)$$
$$y(u,v) = R\sin(u)$$
$$z(u,v) = v$$
$$u \in [0,2\pi], \quad v \in [0,h]$$

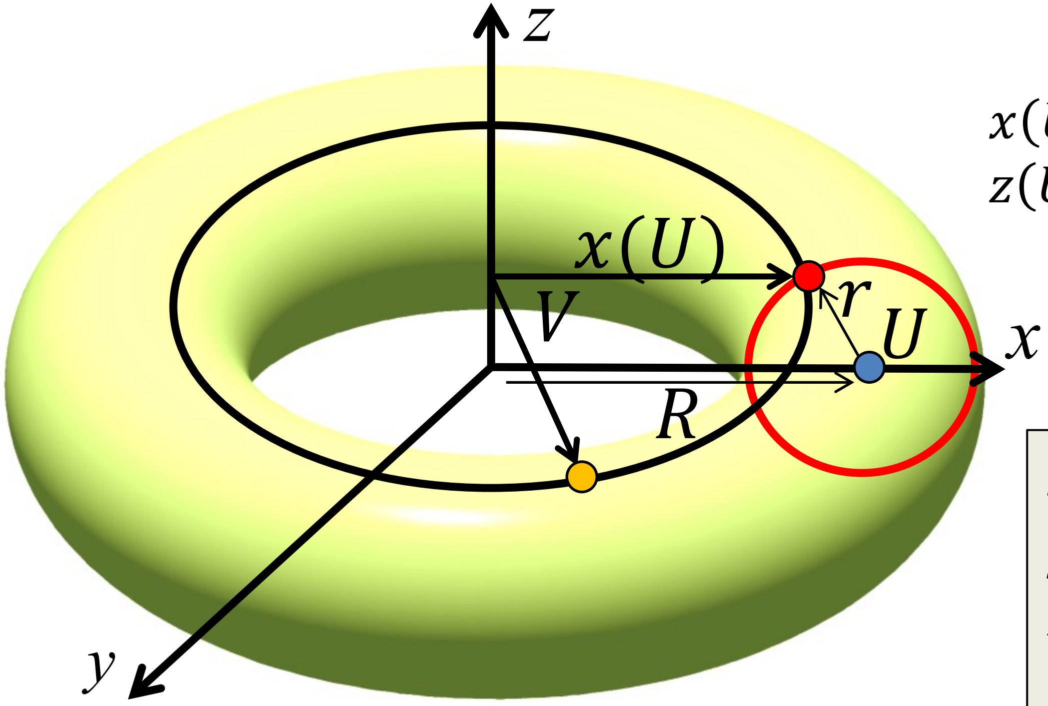
(egyköpenyű) Hiperboloid



$$\boldsymbol{p}(u) = (R\cosh(u), 0, R\sinh(u))$$

$$x(u,v) = R\cosh(u)\cos(v)$$
$$y(u,v) = R\cosh(u)\sin(v)$$
$$z(u,v) = R\sinh(u)$$
$$v \in [0,2\pi], \quad u \in [-h/2, h/2]$$

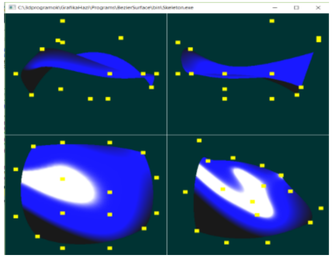
Tórusz



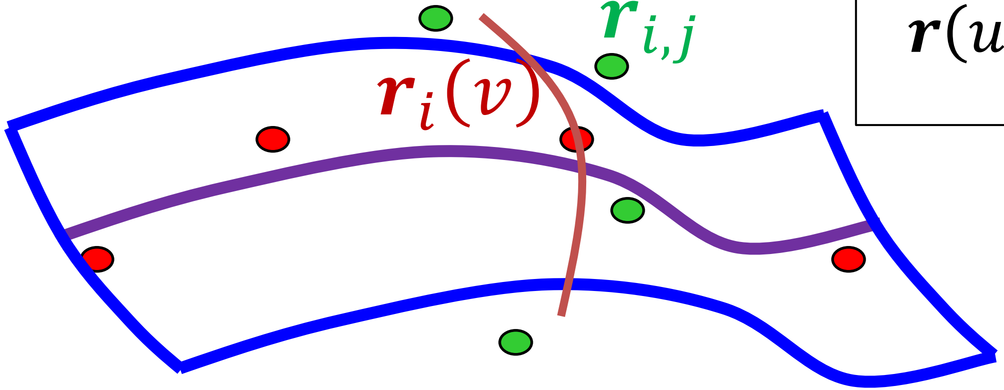
$$x(U) = R + r\cos(U)$$
$$z(U) = r\sin(U)$$

$$x(U,V) = \big(R + r\cos(U)\big)\cos(V)$$
$$y(U,V) = \big(R + r\cos(U)\big)\sin(V)$$
$$z(U,V) = r\sin(U)$$
$$U \in [0,2\pi], \quad V \in [0,2\pi]$$

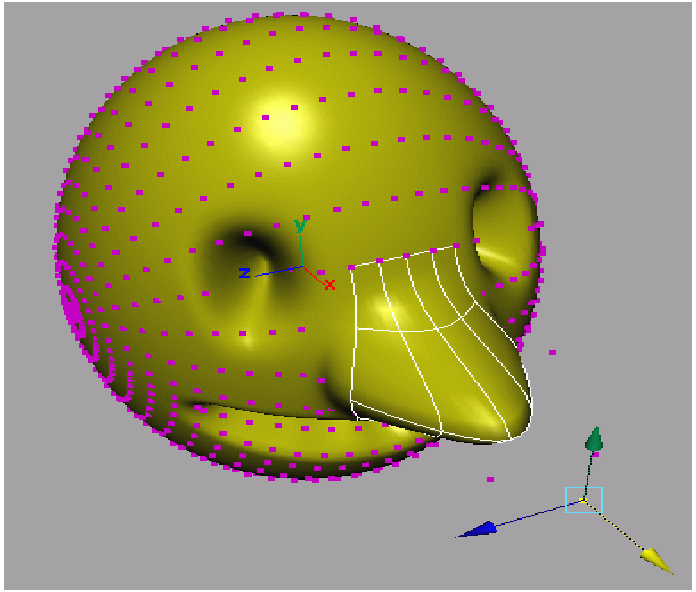
Szabadformájú felület



Definíció kontroll pontokkal:



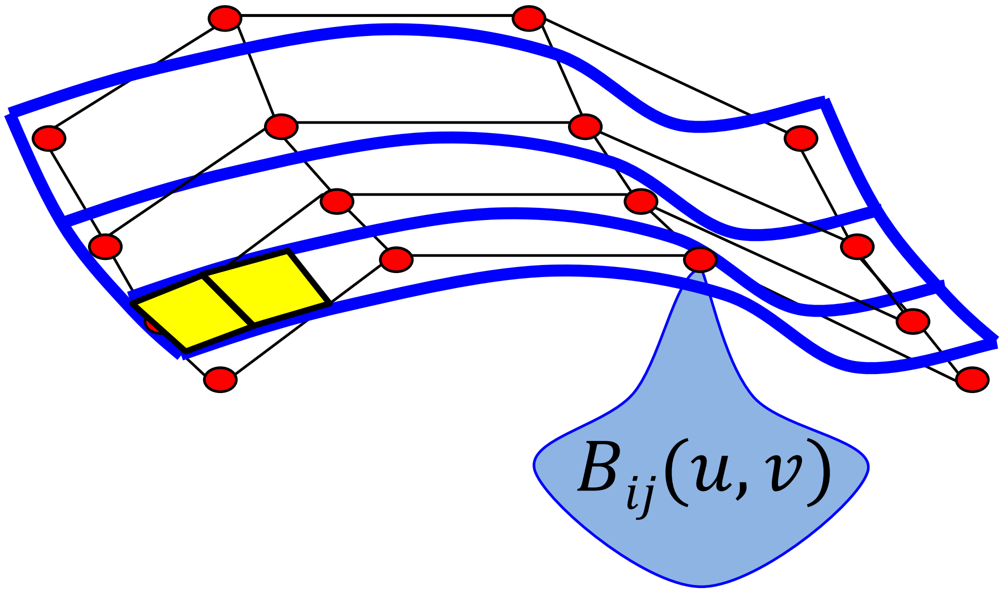
$$\boldsymbol{r}(u,v) = \sum_i \sum_j B_j(v)\, B_i(u) \boldsymbol{r}_{i,j}$$



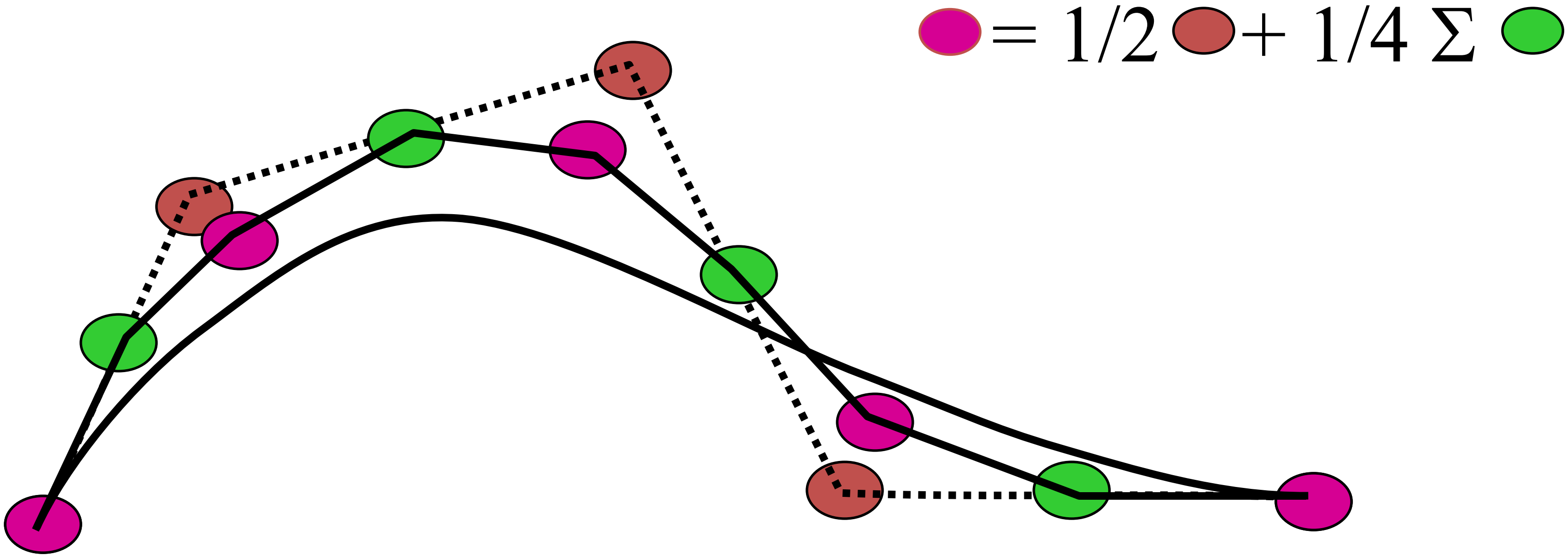
$$\boldsymbol{r}(u,v) = \boldsymbol{r}_v(u) = \sum_i B_i(u)\, \boldsymbol{r}_i(v)$$

$$\boldsymbol{r}_i(v) = \sum_j B_j(v)\, \boldsymbol{r}_{i,j}$$

Poligonháló finomítása



Subdivision görbék



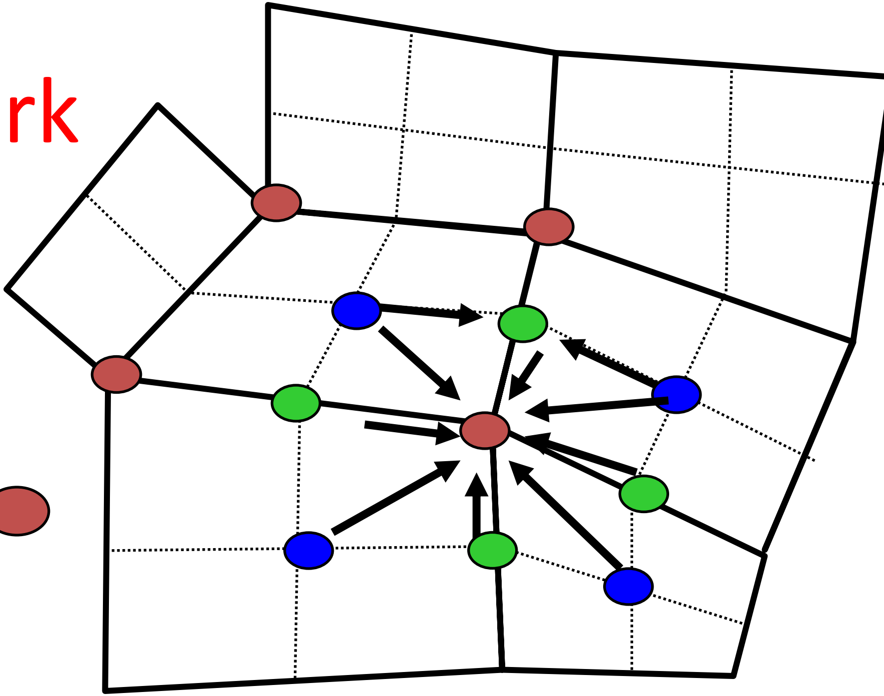
(Edwin) Catmull- (James) Clark subdivision felület

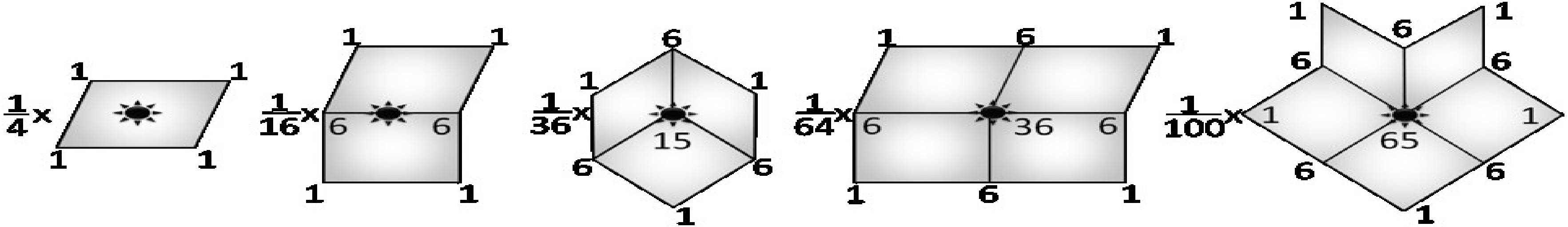
$= 1/4\Sigma$

$i = 1/2\Sigma$

$= 1/v^2\Sigma \quad +2/v^2\Sigma\, i \; +(v\text{-}3)/v$

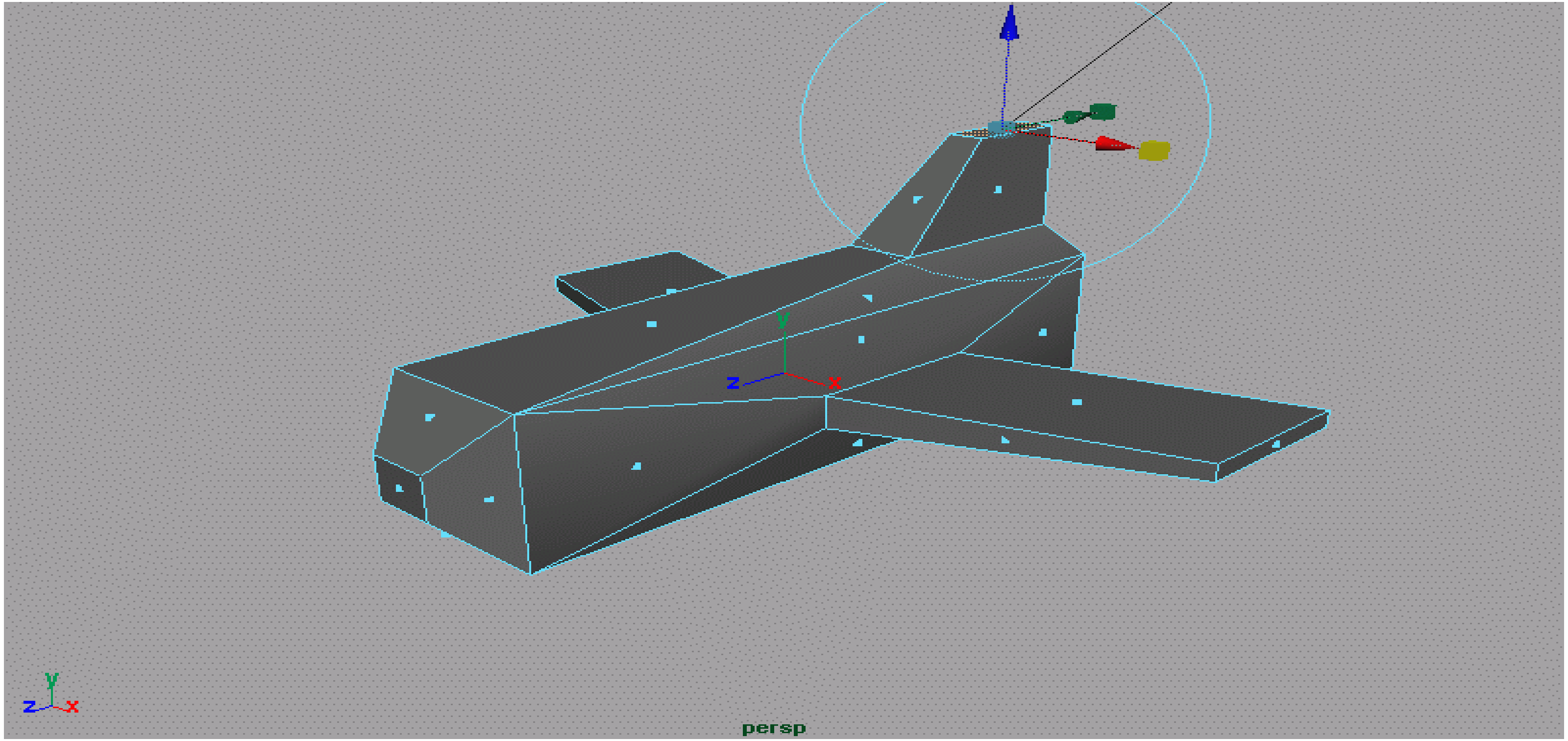
$= 1/4\Sigma \quad + 1/2\, i$



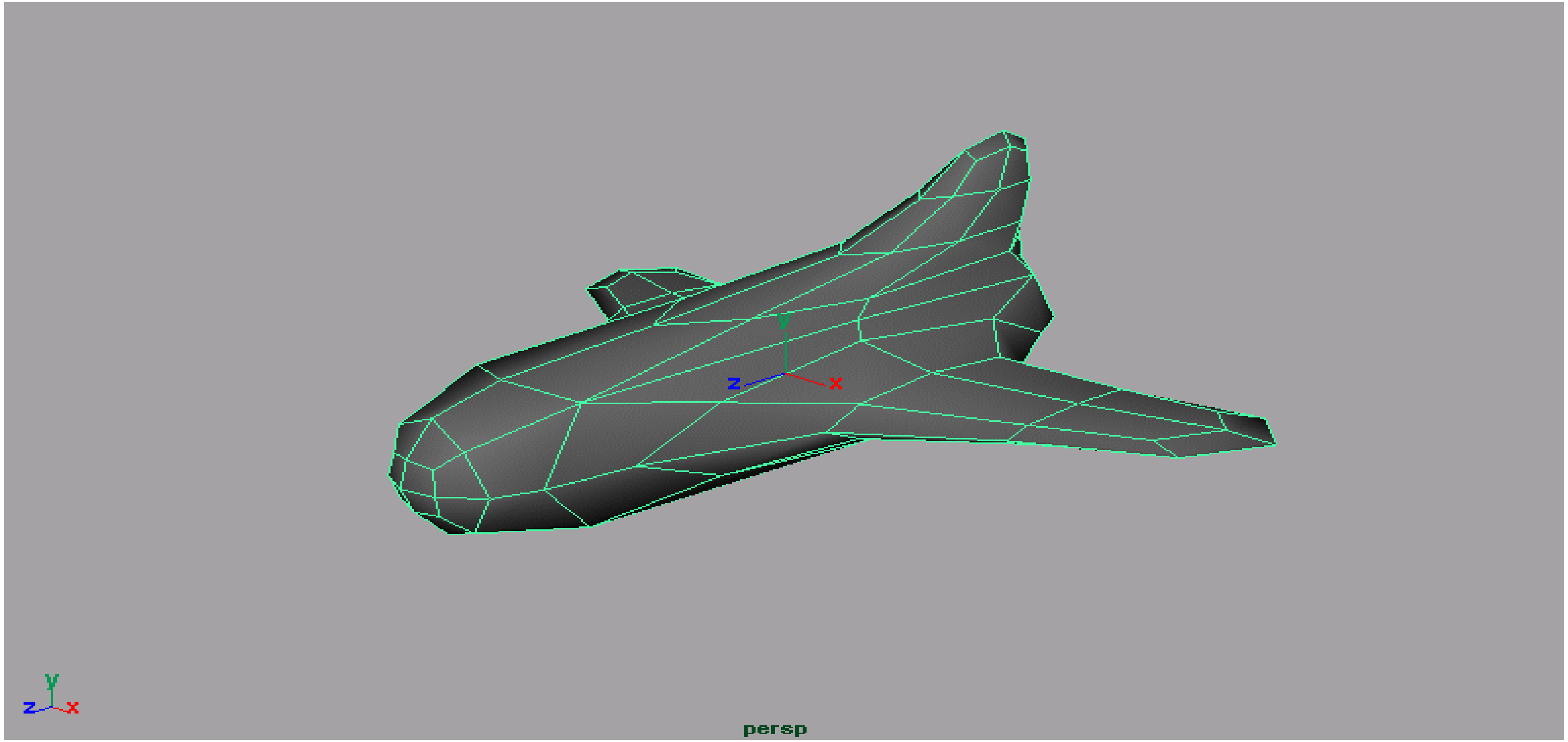


Face Point Edge Point Valence 3 Vertex Valence 4 Vertex Valance 5 Vertex

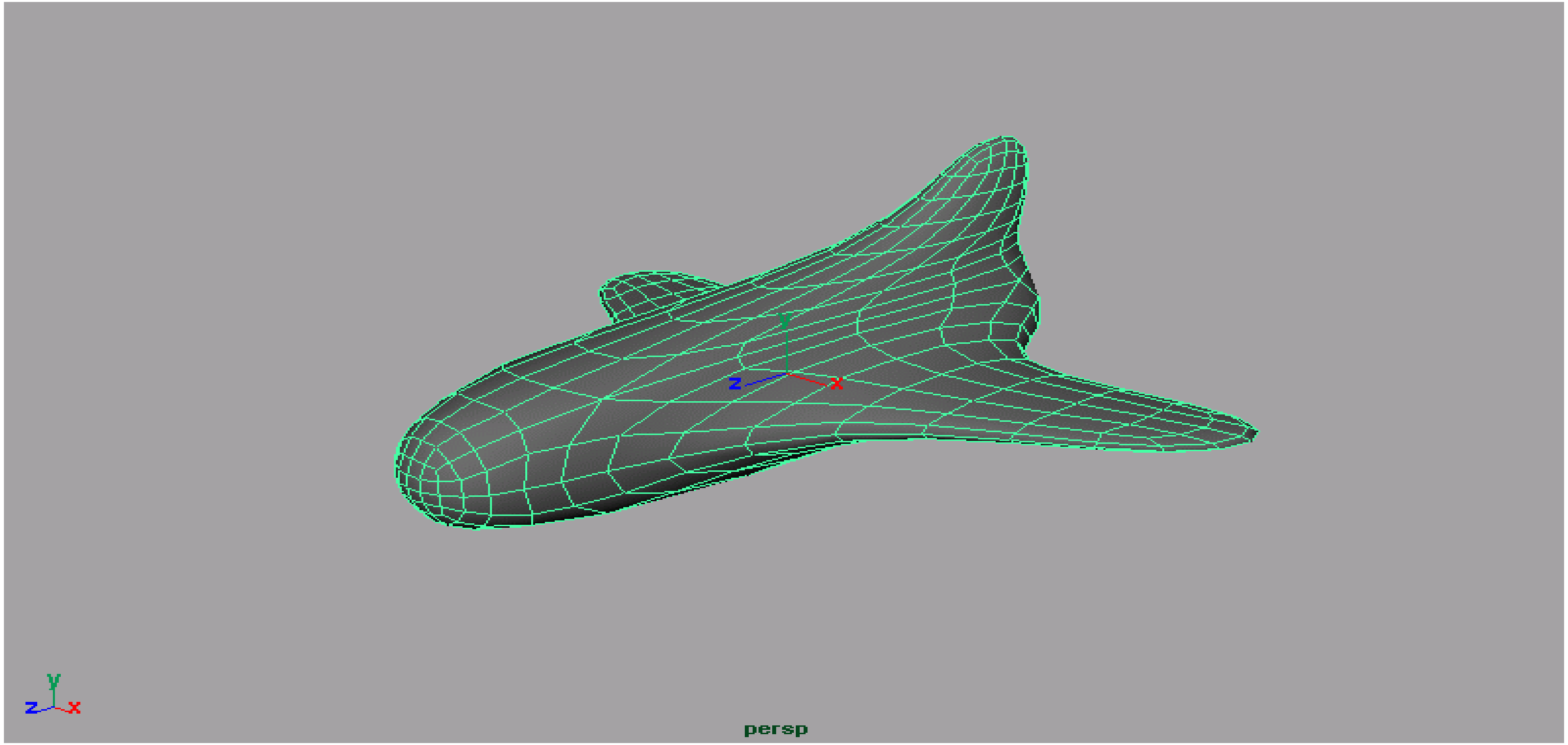
Durva poligon modell



Subdivision 1

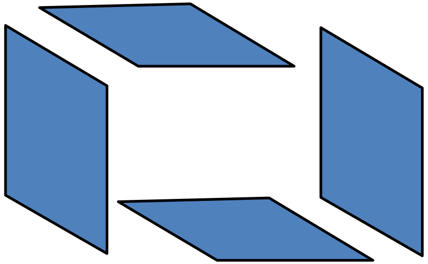


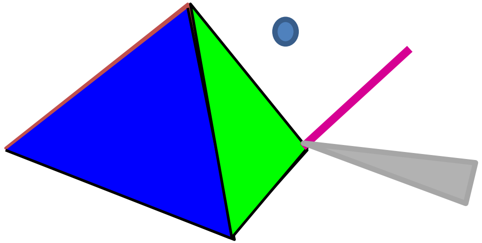
Subdivision 2



B-rep: határfelületek megadása

- Test = érvényes (létrehozható): ne legyenek alacsonyabb dimenziós elfajuló részek: minden határpont környezetében kell belső pontnak is lennie.



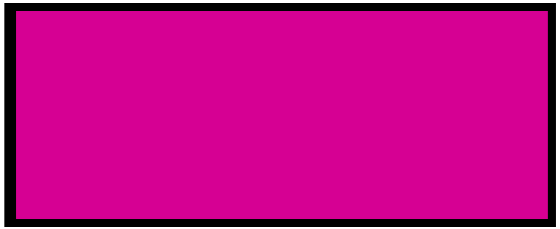


- Topológiai érvényesség:
  - Élek (2,3,…) csúcspontban találkoznak
  - Egy él két lapot választ el, és nem metsz élt
  - Egy lapot él és csúcs sorozat határol
  - A felület nem metszi saját magát
  - **Euler-Poincaré tétel**:

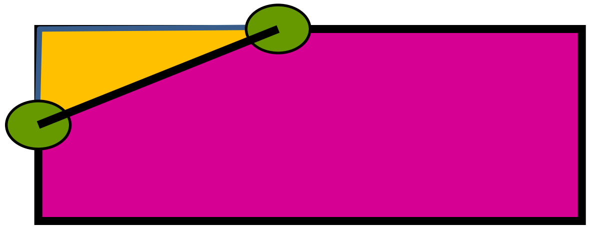
$$\boxed{\text{csúcs} - \text{él} + \text{lap} = 2(\text{db}-\text{lyuk})}$$

(Leonhard) Euler operátorok

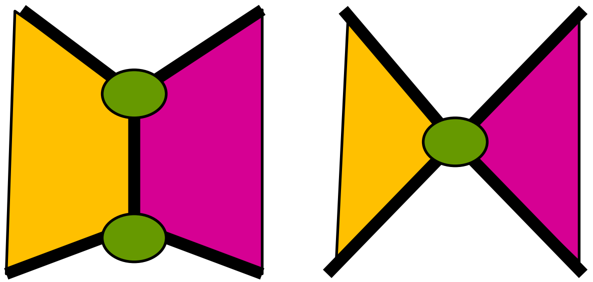
- Lap kihúzás



- Lap felvágás

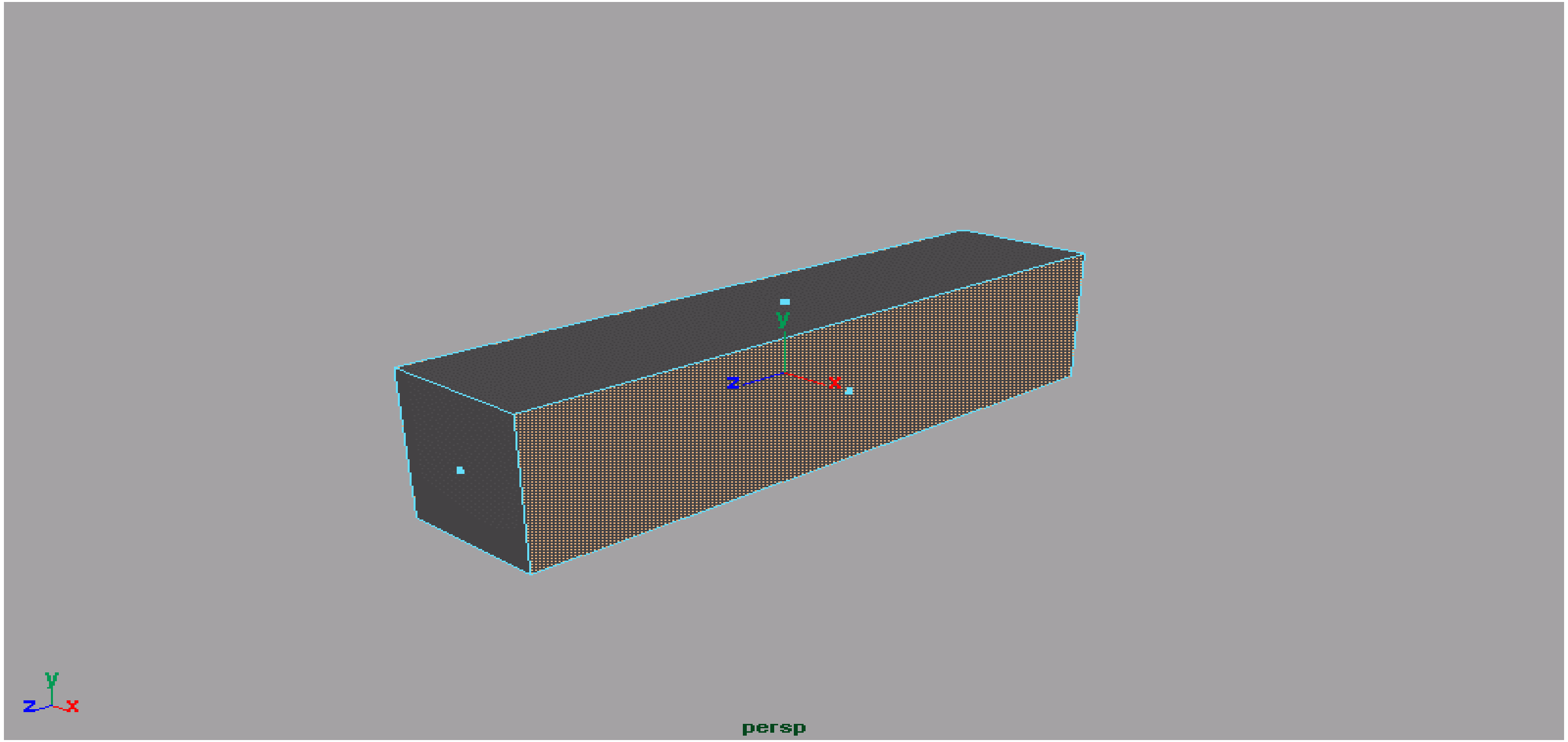


- Él törlés
- Csúcs szétvágás

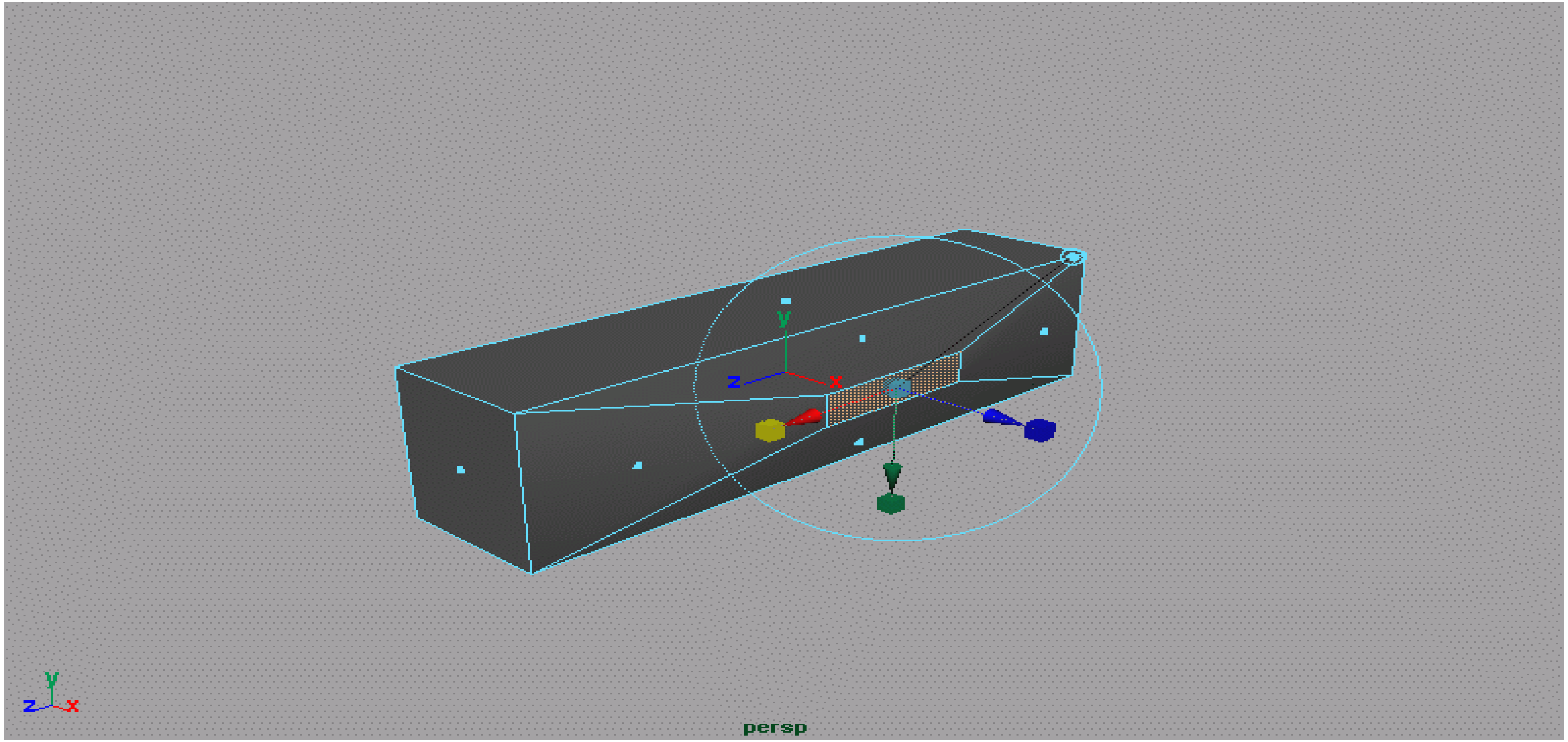


Csúcsok	Lapok		Élek
+4	+4	=	+8
+2	+1	=	+3
-1	0	=	-1
+1	0	=	+1

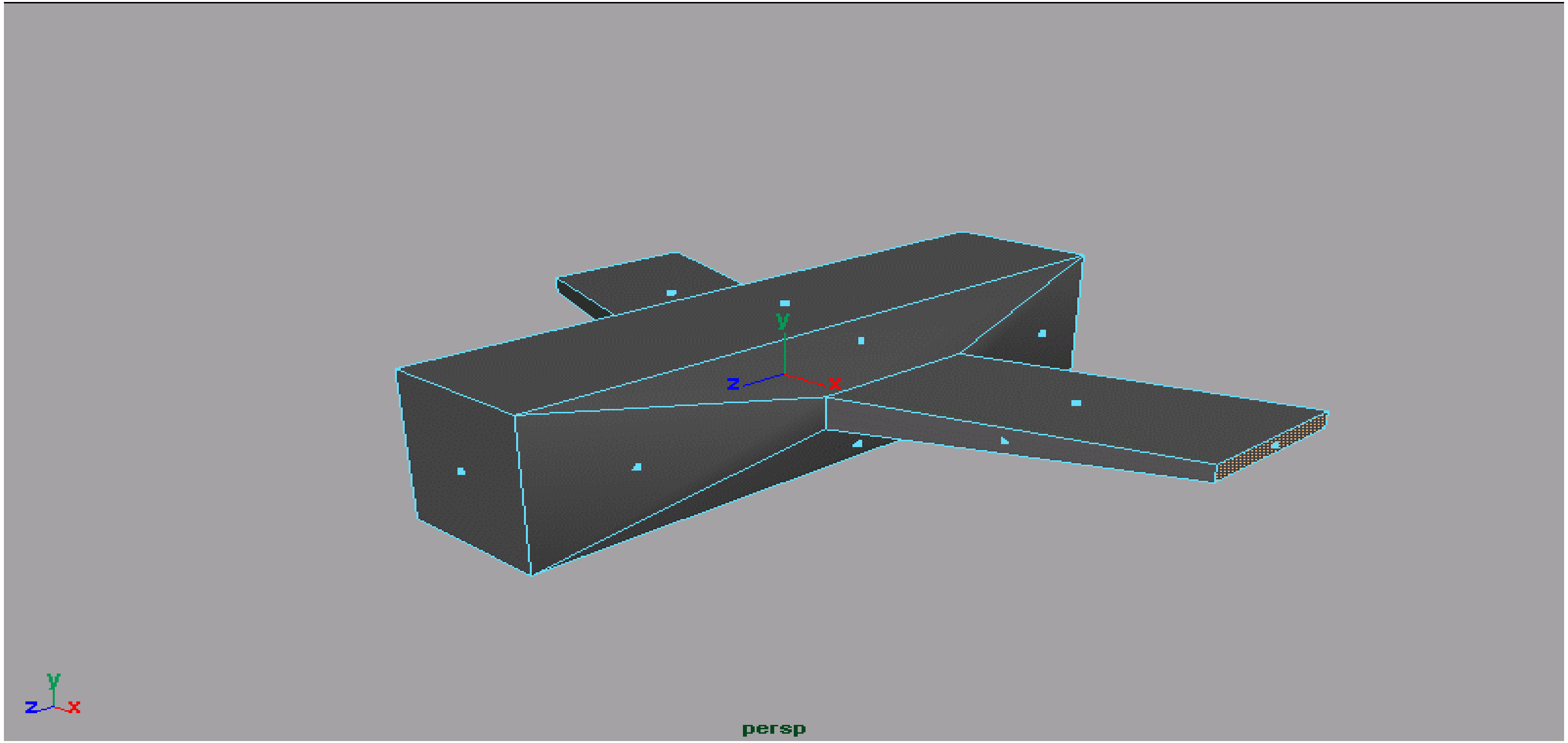
Kezdet: érvényes téglatest



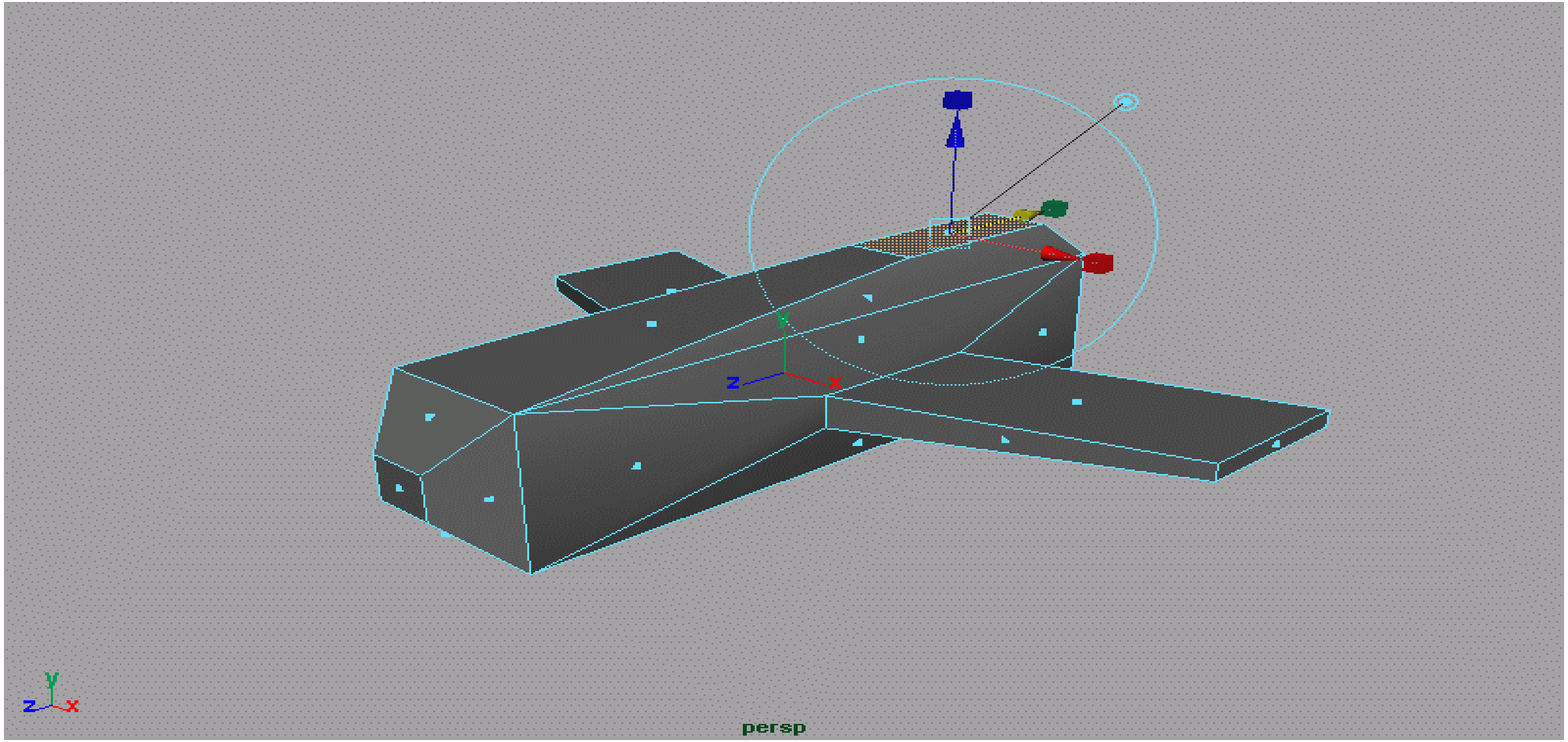
Lap kihúzás



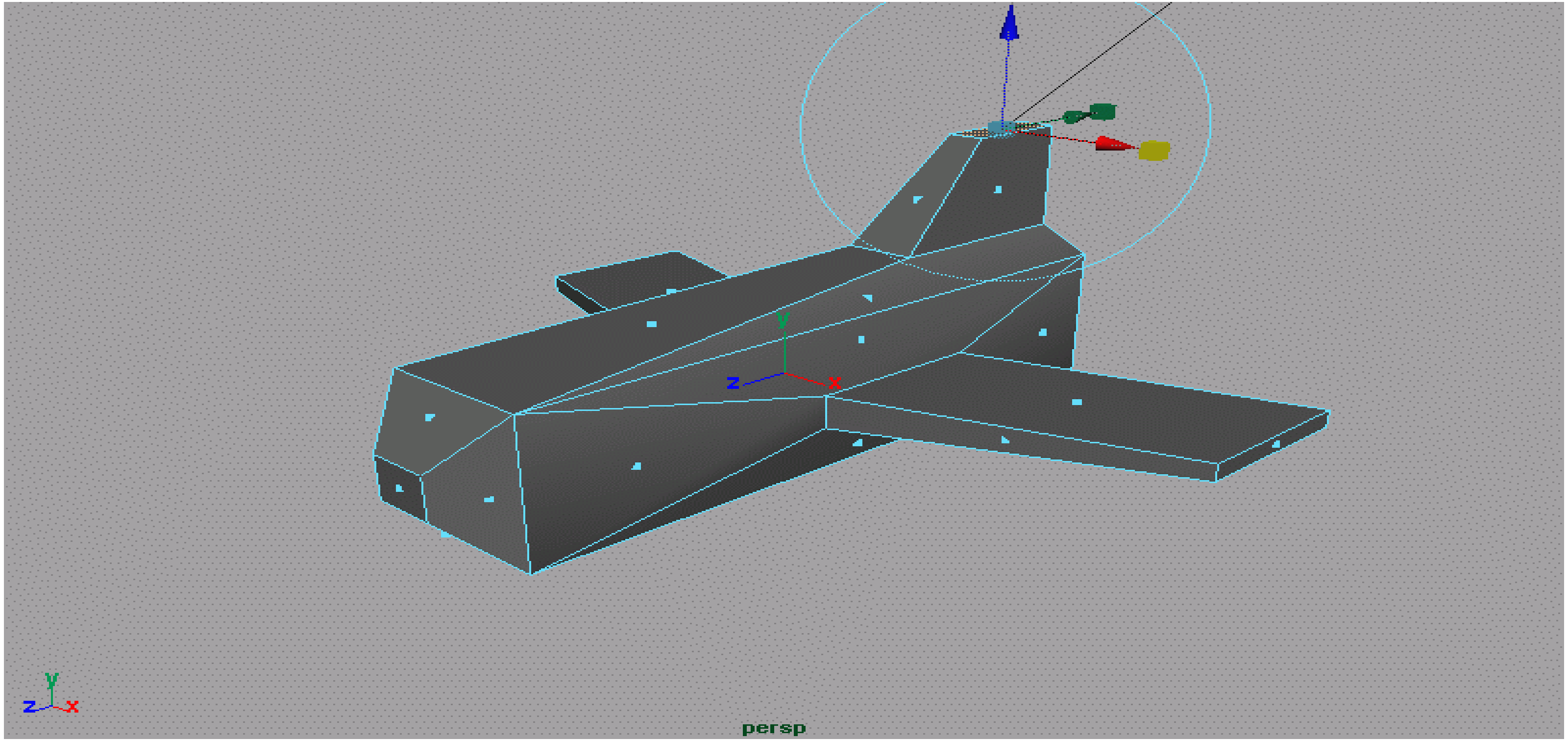
Lap kihúzás



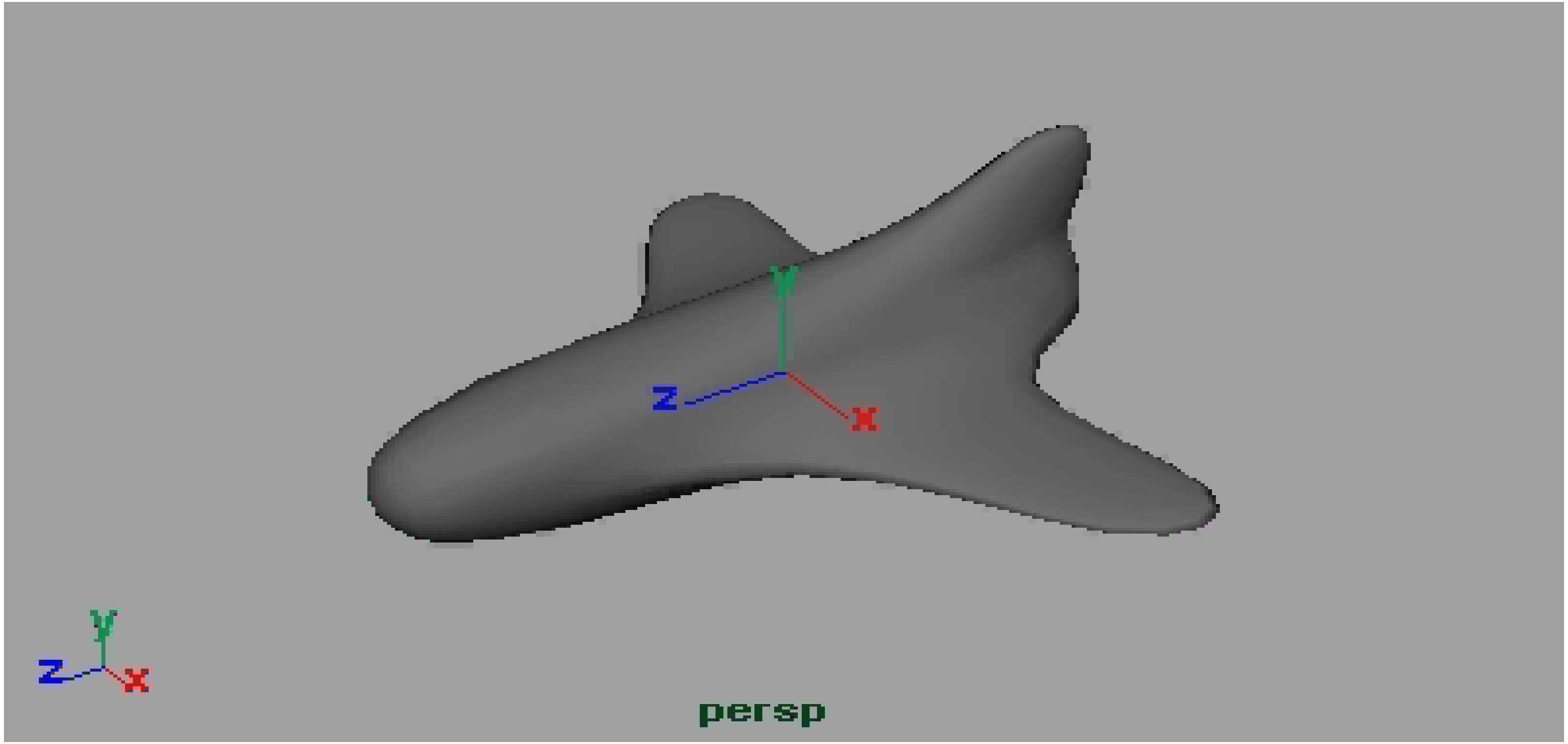
Lap kihúzás



Lap kihúzás



Subdivision simítás



Felület modellezés

- Explicit = magasságmező ritkán használható
- Implicit: geometriai definíció vektoralgebrai fordítása
  - Implicit felület normálvektor = gradiens
- Paraméteres: paraméteres görbékre vagy a súlypont analógiára vezetjük vissza
  - Paraméteres felület normálvektora = parciális deriváltak vektoriális szorzata
- Felosztott: háromszögháló