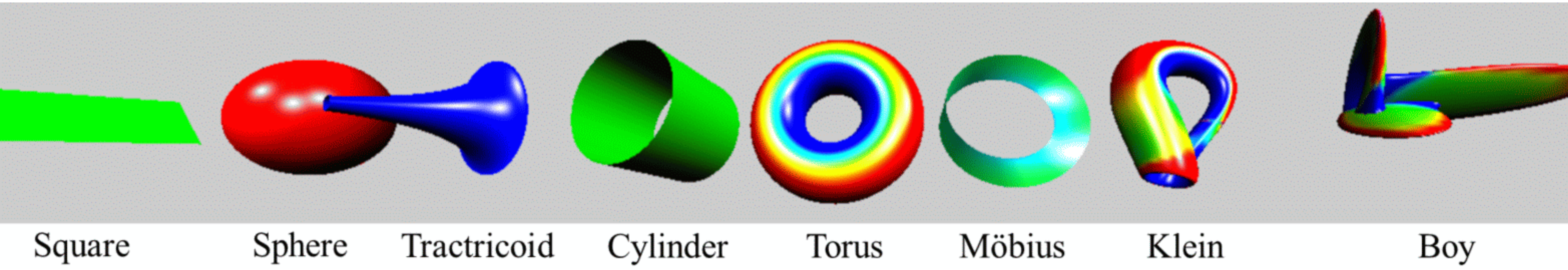
“Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen, was den grössten Genuss gewährt.”

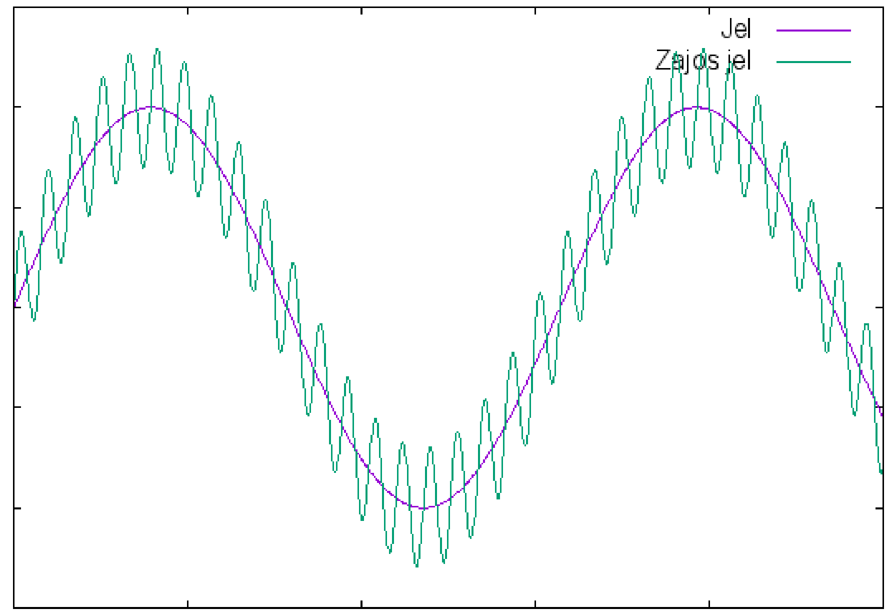
Carl Friedrich Gauß

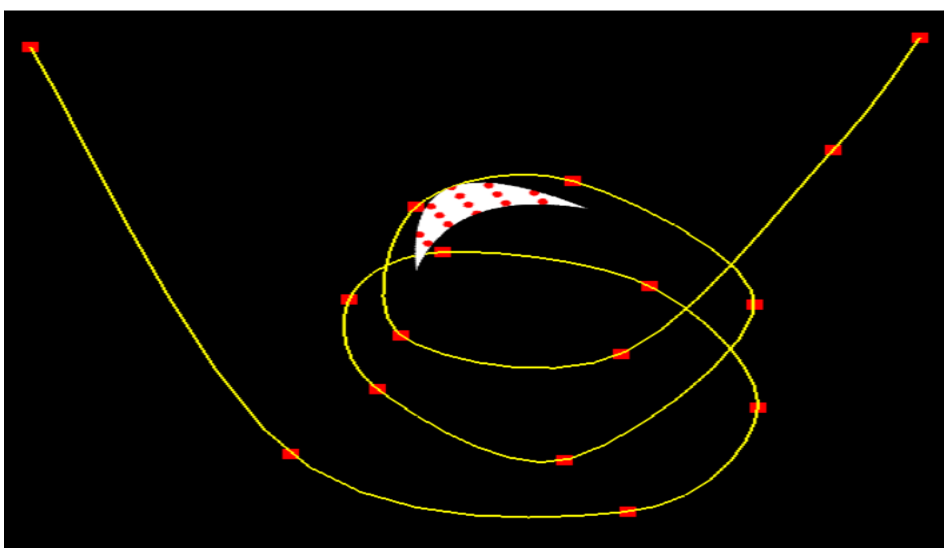
Geometriák és algebrák
3. Differenciálgeometria

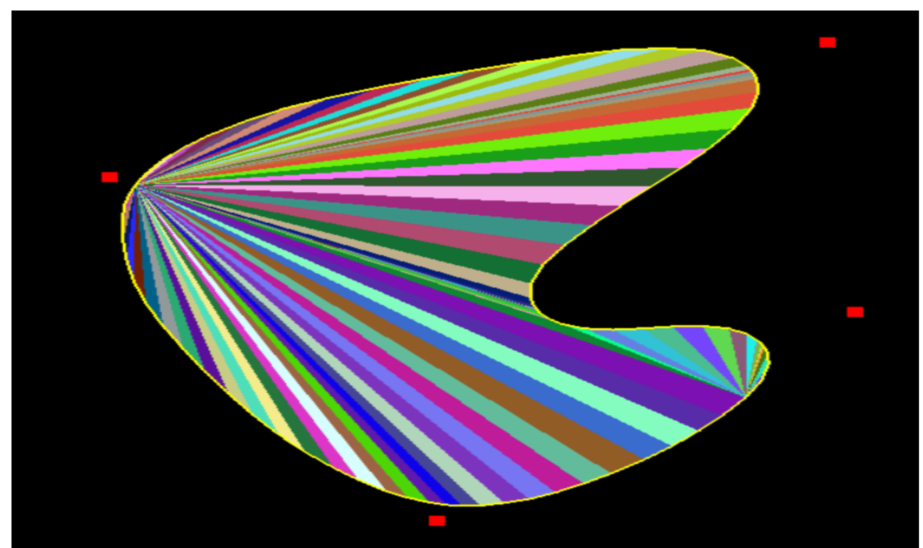
Szirmay-Kalos László



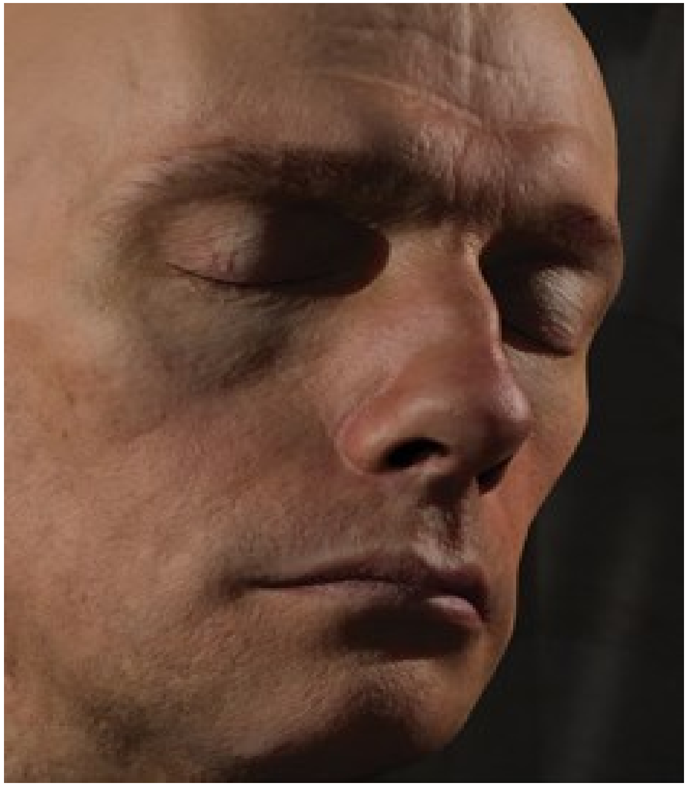
Mire jó: Szimuláció, szűrés, …



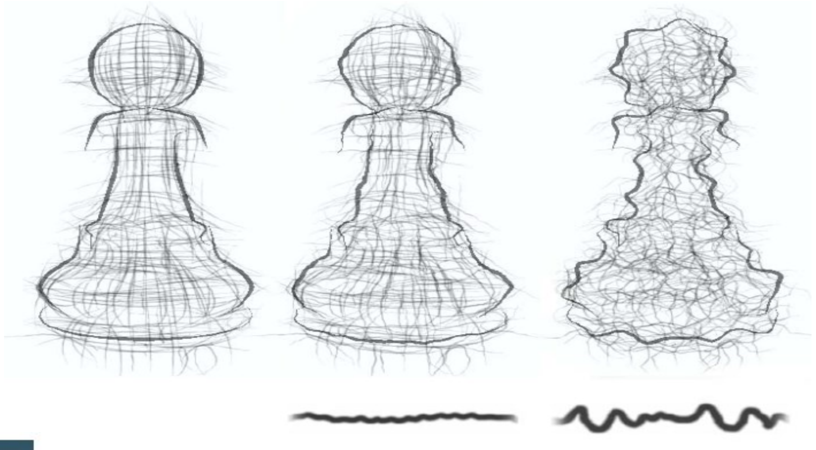


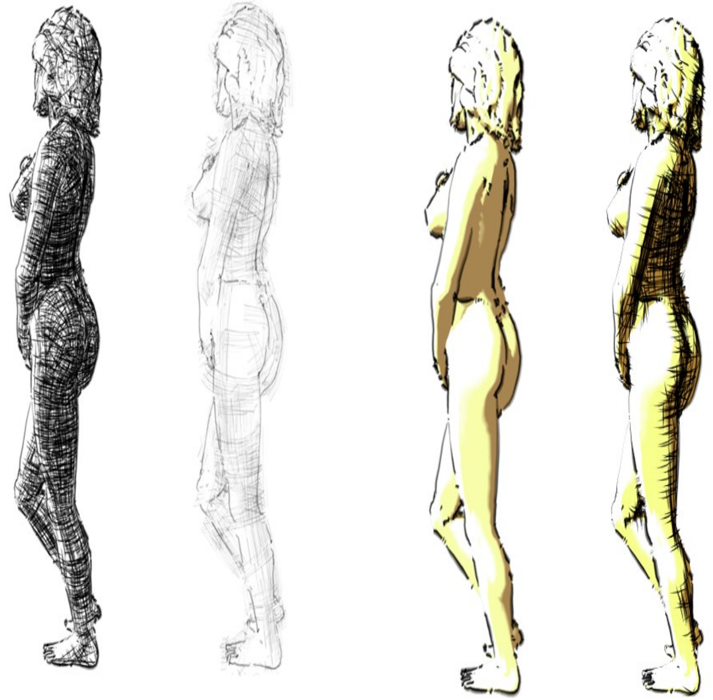


Mire jó: árnyalás, normál vektor

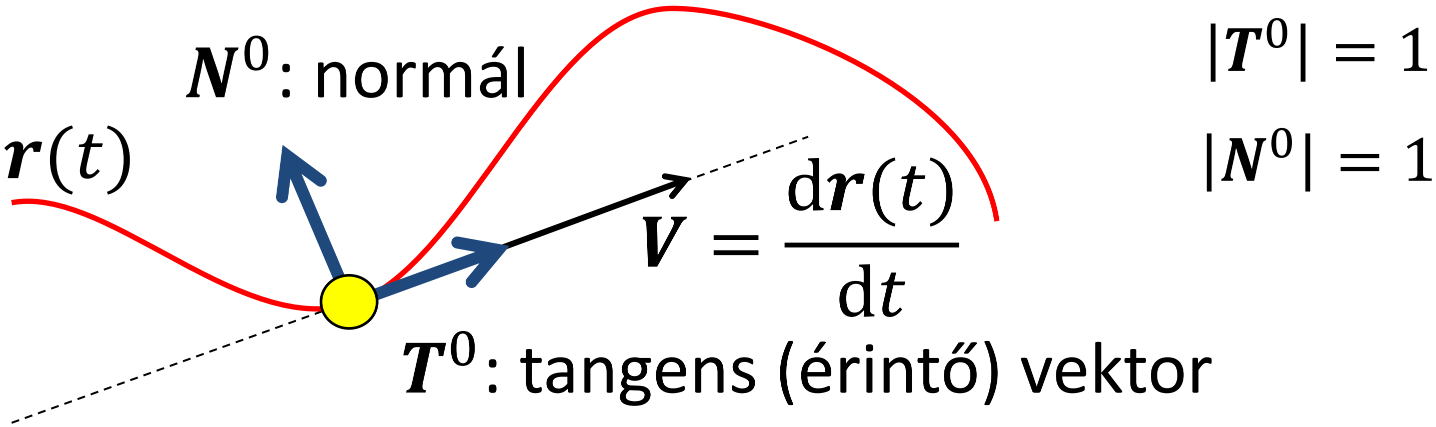


Mire jó: Illusztratív képszintézis





Síkgörbék érintője és normálvektora

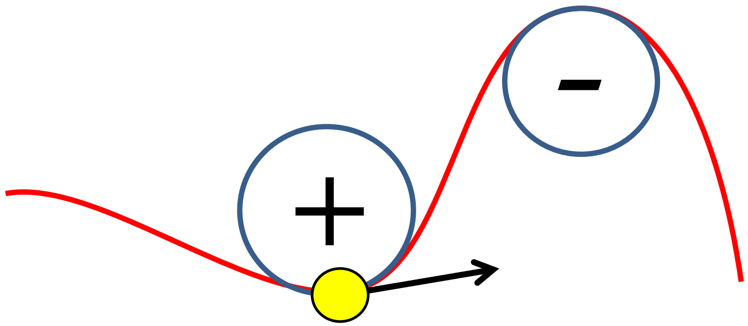


- A görbe = mozgás, azaz a hely időfüggvénye, de a dinamika nem érdekes, ezért valós idő helyett más növekvő paramétert is jó, ami lényegében a hely pályamenti koordinátája.
- Az érintő iránya a sebességvektor, ami a pálya időszerinti **első deriváltja**, azaz elsőrendű közelítés (egyenes):

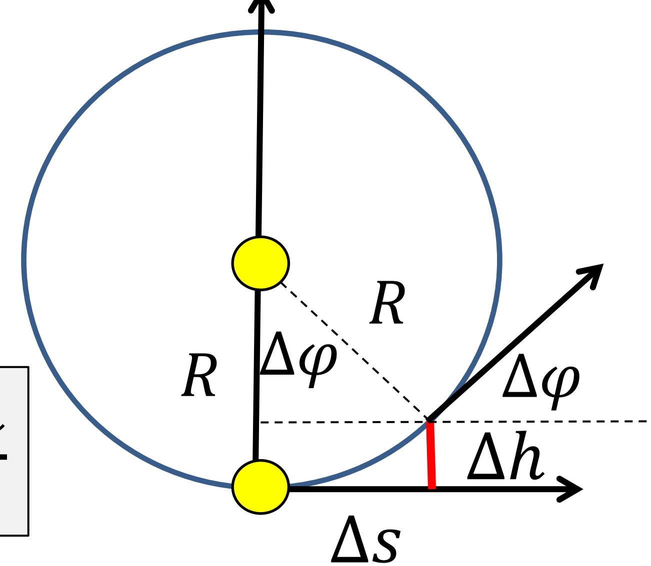
$$\boldsymbol{r}(t+\Delta t) \approx \boldsymbol{r}(t) + \boldsymbol{r}'(\boldsymbol{t})\Delta t$$

- Normálvektor érintőre merőleges: $(\boldsymbol{N}_x, \boldsymbol{N}_y) = (-\boldsymbol{T}_y, \boldsymbol{T}_x)$.
- Gyorsulás normál irányú, ha tangenciális zérus, azaz $|\boldsymbol{v}| =$ állandó.

Görbék görbülete: κ



$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{2\Delta h}{\Delta s^2}$$

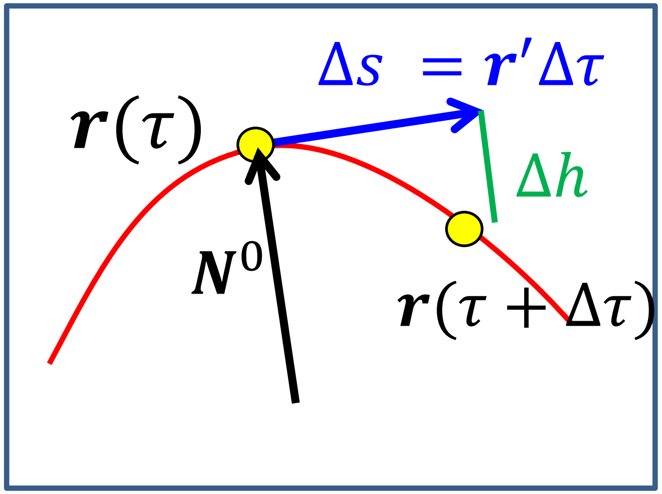


- Egységsebességű mozgás centripetális gyorsulás: $a_{cp} = \frac{v^2}{R}$
- (Másodrendben) simulókör sugarának reciproka
- Az érintő elfordulása kis lépésnél: $\Delta\varphi \approx \sin(\Delta\varphi) = \frac{\Delta s}{R}$
- Érintőtől távolodás kis lépésnél:

$$\Delta h = R - \sqrt{R^2 - \Delta s^2} \Rightarrow \; \Delta h(0) = 0, \;\; \Delta h'(0) = 0, \;\; \Delta h''(0) = \frac{1}{R}$$

$$\Delta h = \Delta h(0) + \Delta h'(0)\Delta s + \frac{\Delta h''(0)}{2}\Delta s^2 + o(\Delta s^2) = \frac{\Delta s^2}{2R} + o(s^2)$$

Görbület számítás



- Másodrendű Taylor közelítés:

$$\boldsymbol{r}(\tau+\Delta\tau) \approx \boldsymbol{r}(\tau) + \boldsymbol{r}'(\tau)\Delta\tau + \frac{\boldsymbol{r}''(\tau)}{2}\Delta\tau^2$$

- Lépéshossz négyzet (metrika):

$$\Delta s^2 = |\boldsymbol{r}(\tau+\Delta\tau) - \boldsymbol{r}(\tau)|^2 = \boldsymbol{r}'^2\Delta\tau^2 + \mathrm{o}(\Delta\tau^2)$$

Metrikus tenzor (I. fundamentális forma)

- Merőleges eltávolodás az érintőtől

$$\Delta h \approx \boldsymbol{N}^0 \cdot \frac{\boldsymbol{r}''(\tau)}{2}\Delta\tau^2$$

- Görbület:

$$\boxed{\kappa = \frac{2\Delta h}{\Delta s^2} = \frac{\boldsymbol{N}^0 \cdot \boldsymbol{r}''}{\boldsymbol{r}'^2}}$$

II. fundamentális forma

I. fundamentális forma

Példa: Kör görbülete

- Parametrikus egyenlet:

$$\boldsymbol{r}(\tau) = (c_x + R\cos(\tau)\,,\; c_y + R\sin(\tau))$$

- Első és második derivált:

$$\boldsymbol{r}'(\tau) = (-R\sin(\tau)\,, R\cos(\tau)),$$

$$\boldsymbol{r}''(\tau) = (-R\cos(\tau)\,, -R\sin(\tau)),$$

- Metrikus tenzor:

$$|\boldsymbol{r}'|^2 = \boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}' = R^2$$

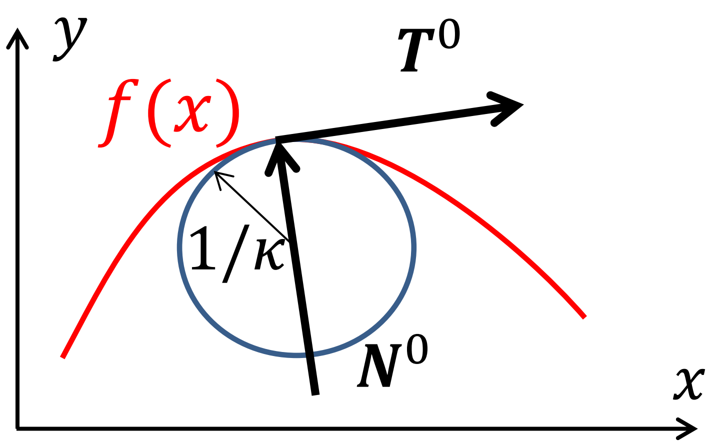
- Egységsebességű mozgás sebesség és normálvektora:

$$\boldsymbol{T}^0 = \frac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|} = (-\sin(\tau)\,, \cos(\tau)), \quad \boldsymbol{N}^0 = (-\cos(\tau), -\sin(\tau))$$

- Görbület:

$$\boxed{\kappa = \frac{\boldsymbol{r}'' \cdot \boldsymbol{N}^0}{|\boldsymbol{r}'|^2} = \frac{(-R\cos(\tau), -R\sin(\tau)) \cdot (-\cos(\tau), -\sin(\tau))}{R^2} = 1/R}$$

Explicit egyenletű görbék



Visszavezetés parametrikus esetre:

- $\tau = x$
- $\boldsymbol{r}(\tau) = (x, f(x))$
- $\boldsymbol{r}'(\tau) = (1, f')$
- $|\boldsymbol{r}'| = \sqrt{1 + f'^2}$
- $\boldsymbol{r}''(\tau) = (0, f'')$

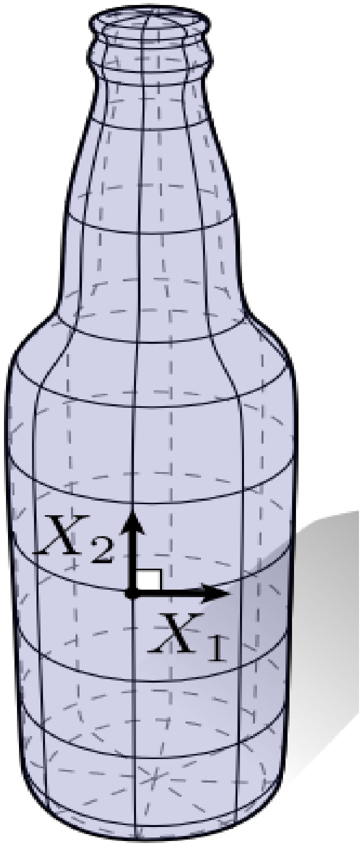
- Érintő és normálvektor:

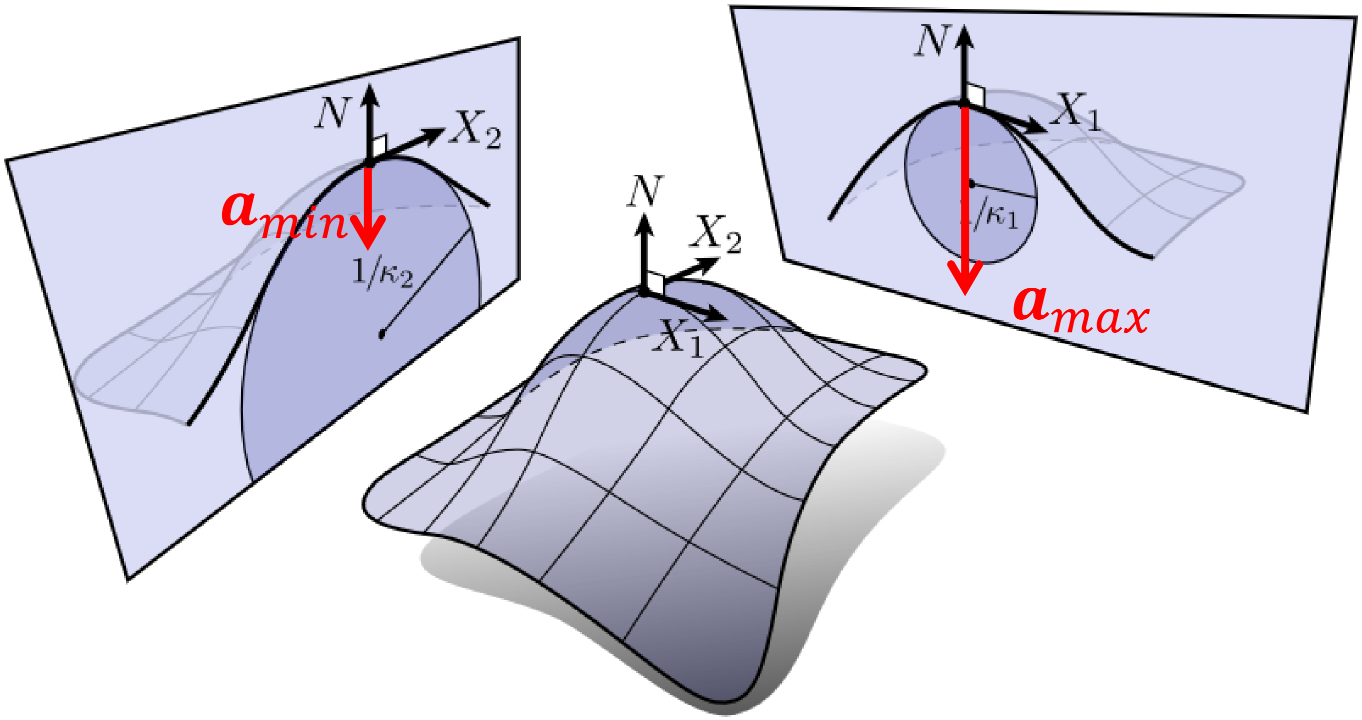
$$\boldsymbol{T}^0 = \frac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|} = \frac{(1, f')}{\sqrt{1+f'^2}}, \quad \boldsymbol{N}^0 = \frac{(-f', 1)}{\sqrt{1+f'^2}}$$

- Görbület:

$$\boxed{\kappa = \frac{\boldsymbol{N}^0 \cdot \boldsymbol{r}''}{\boldsymbol{r}'^2} = \frac{f''}{\left(1+f'^2\right)^{3/2}}}$$

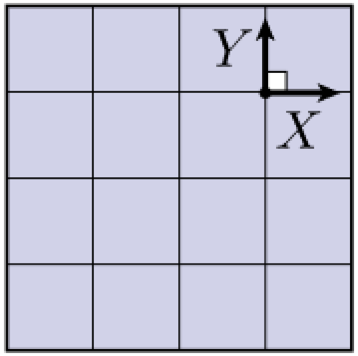
Felületek: fő görbületi irányok és Gauss görbület

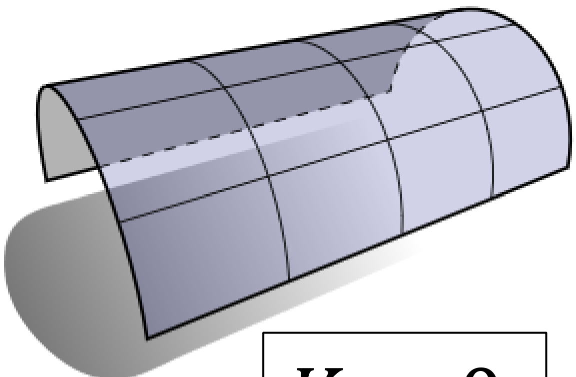


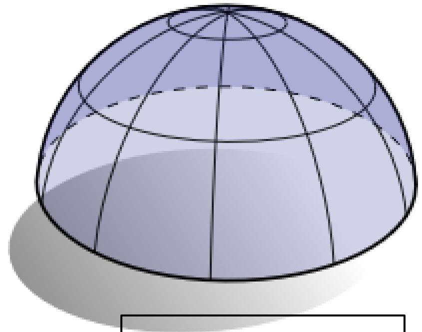


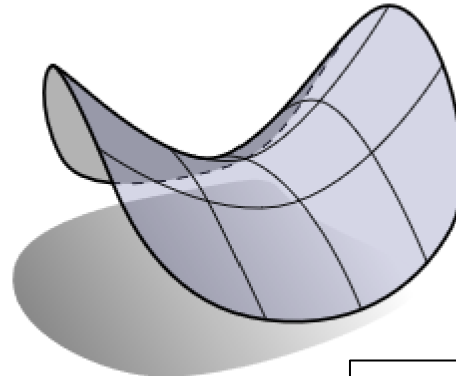
$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \boldsymbol{a}_{min} \cdot \boldsymbol{a}_{max}$$

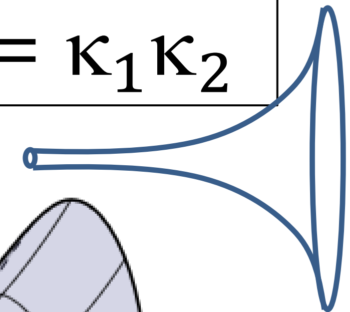
Gauss görbület: $K = \kappa_1 \kappa_2$







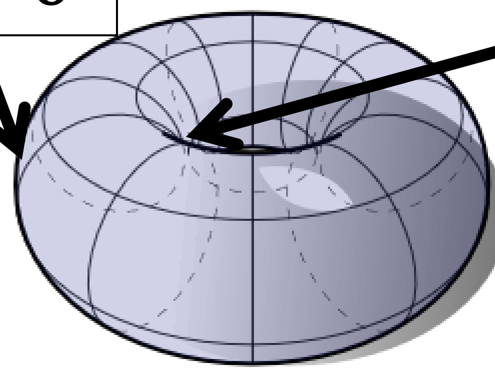


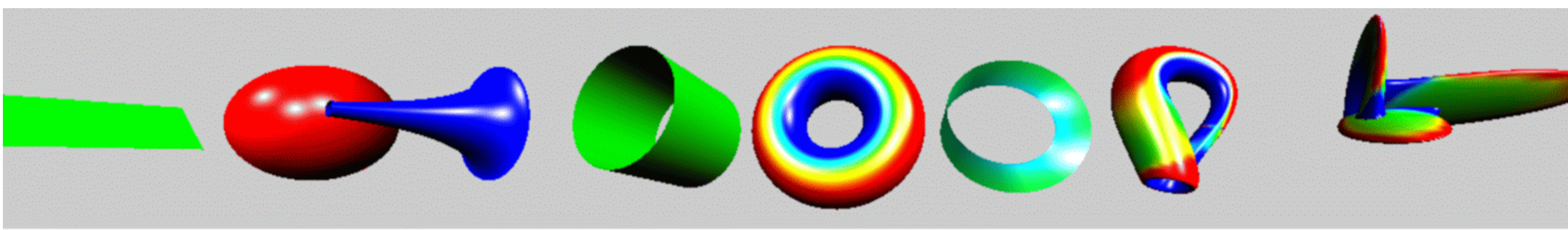


$K = 0$

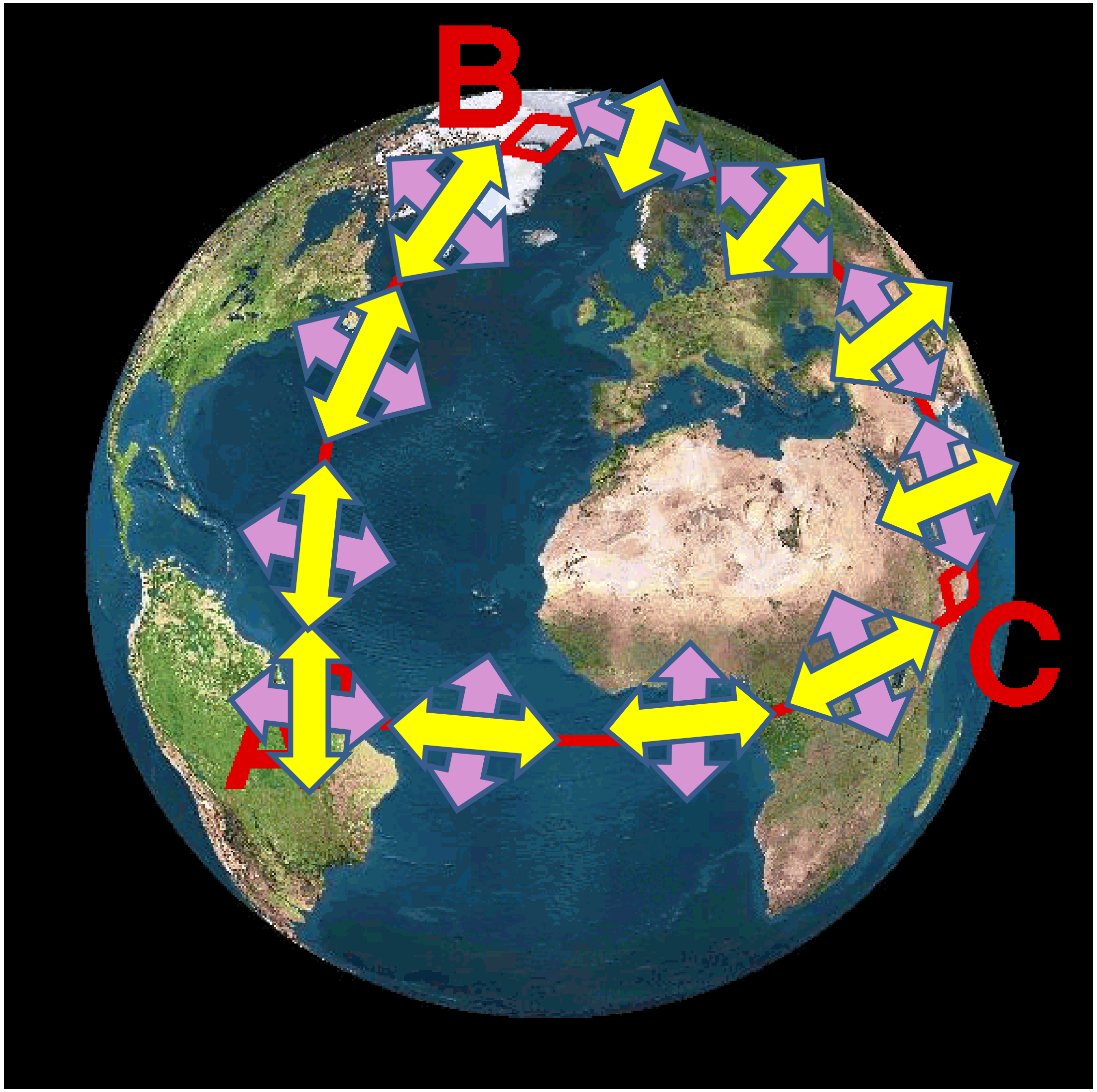
$K > 0$

$K < 0$





Páhuzamos transzport (Holonomy)



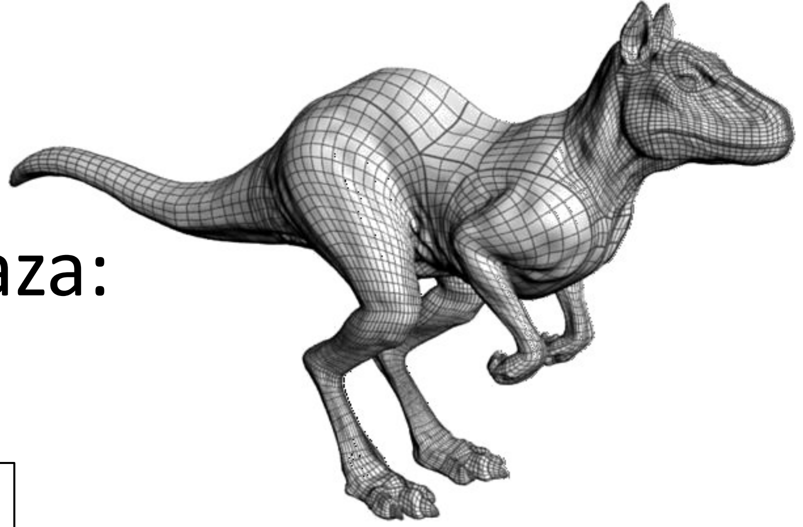
Párhuzamos transzport utáni szögváltozás

$$K = \frac{\Delta\varphi}{\Delta A} = \frac{\pi/2}{4R^2\pi/8} = \frac{1}{R^2}$$

Körbejárt terület

Előjel pozitív, ha a körbejárás és irányváltozás azonos

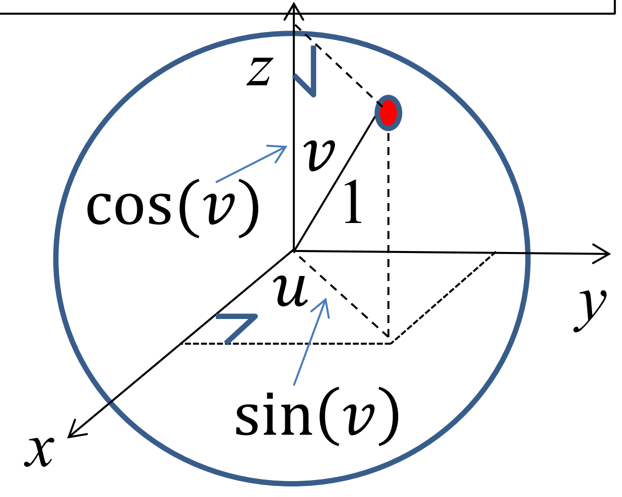
Felületek



Felület a 3D tér 2D részhalmaza:

- **Explicit:** $\boxed{z = h(x, y)}$
- **Implicit**: $\boxed{f(x, y, z) = 0}$
  - gömb: $(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 + (z - c_z)^2 - R^2 = 0$
  - sík: $ax + by + cz + d = 0$
- **Parametrikus**: $\boxed{x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)}$
  - gömb:

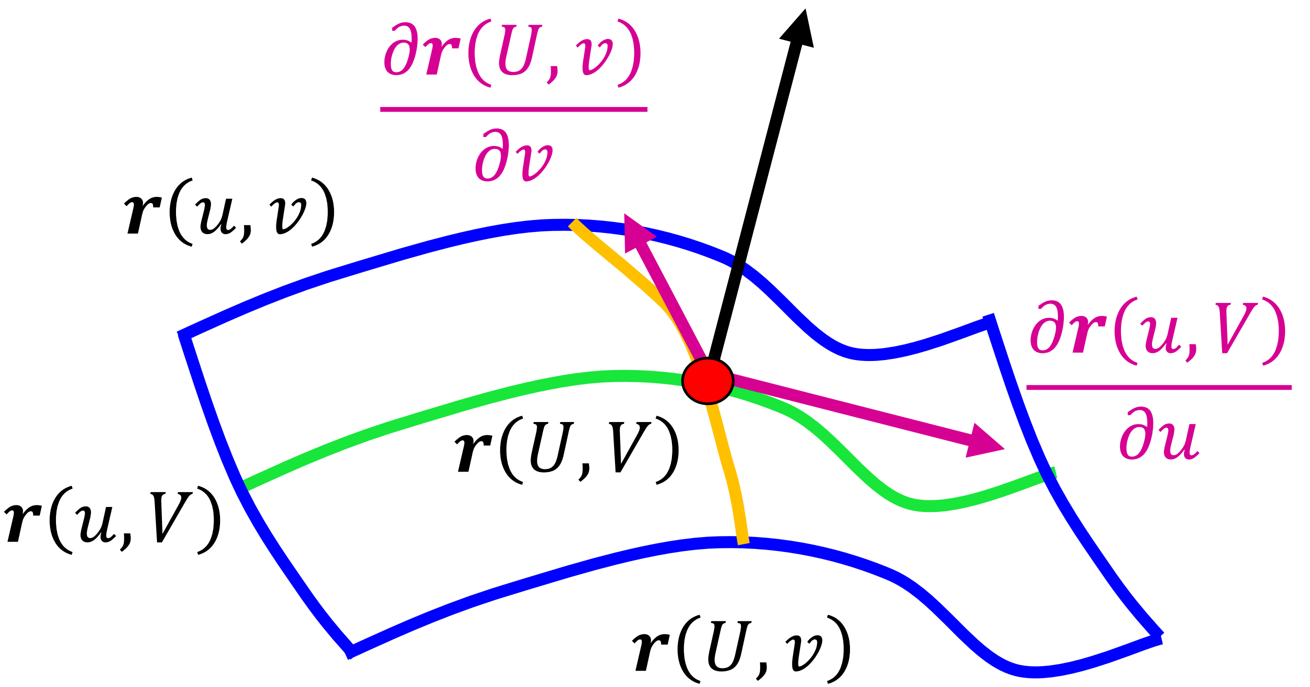
$$\boxed{\begin{aligned} x(u, v) &= c_x + R\cos(u)\sin(v) \\ y(u, v) &= c_y + R\sin(u)\sin(v) \\ z(u, v) &= c_z + R\cos(v) \\ u &\in [0,2\pi), v \in [0, \pi) \end{aligned}}$$



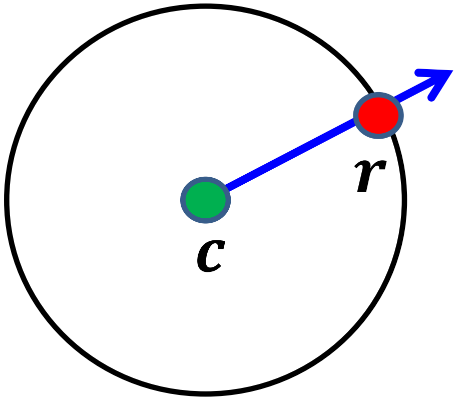
Parametrikus felületek normálvektora

$$\boxed{\boldsymbol{N}(U,V) = \frac{\partial \boldsymbol{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}(u,v)}{\partial v}}$$

$u = U$
$v = V$



Példa: A gömb normálvektora



- Egy parametrikus egyenlet:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (c_x + R\cos(u)\sin(v)\,, c_y + R\sin(u)\sin(v)\,, c_z + R\cos(v))$$

- Parciális deriváltak:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = (-R\sin(u)\sin(v)\,, R\cos(u)\sin(v)\,, 0)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (R\cos(u)\cos(v)\,, R\sin(u)\cos(v)\,, -R\sin(v))$$

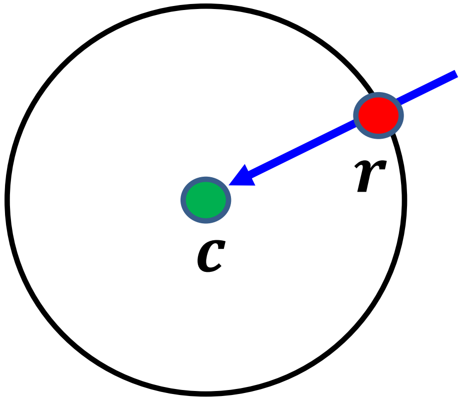
- Vektoriális szorzat:

$$\boldsymbol{N} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -\cancel{R}\sin(u)\,\cancel{\sin}(v) & \cancel{R}\cos(u)\,\cancel{\sin}(v) & 0 \\ R\cos(u)\cos(v) & R\sin(u)\cos(v) & -R\sin(v) \end{vmatrix}$$

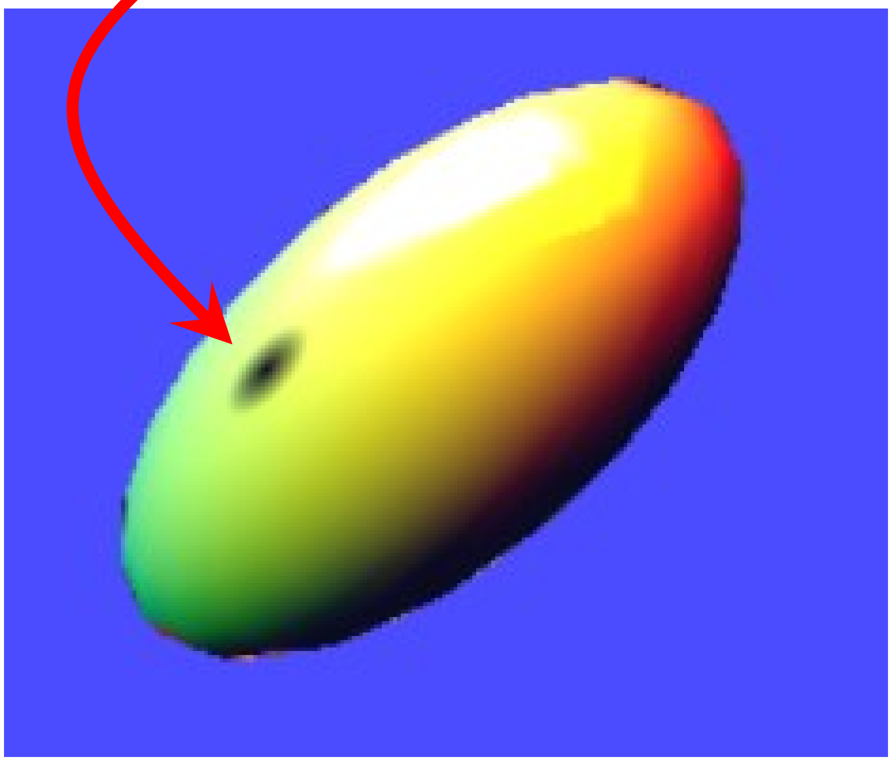
$$= R\sin(v)\,(-R\cos(u)\sin(v), -R\sin(u)\sin(v), -\,R\cos(v))$$

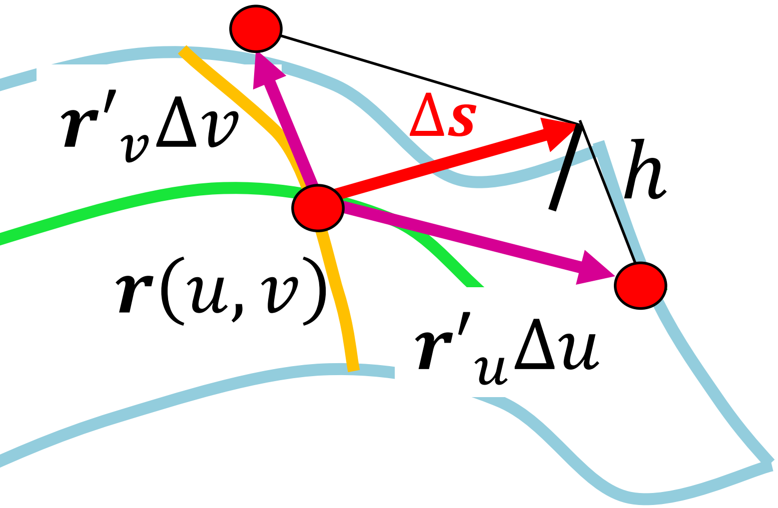
$$= R\sin(v)(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{r}(u,v))$$

Szingularitás



$$\boldsymbol{N} = R\sin(v)(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{r}(u,v))$$





Metrikus tenzor, I. fundamentális forma

Mekkorát lépünk a síkon, ha u Δu-val, v pedig Δv-vel változik?

$$\boldsymbol{r}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \boldsymbol{r}(u,v) \approx$$

$$\underbrace{\boldsymbol{r}'_u\Delta u + \boldsymbol{r}'_v\Delta v}_{\Delta\boldsymbol{s}} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}''_{uu}\Delta u^2 + 2\boldsymbol{r}''_{uv}\Delta u\Delta v + \boldsymbol{r}''_{vv}\Delta v^2)$$

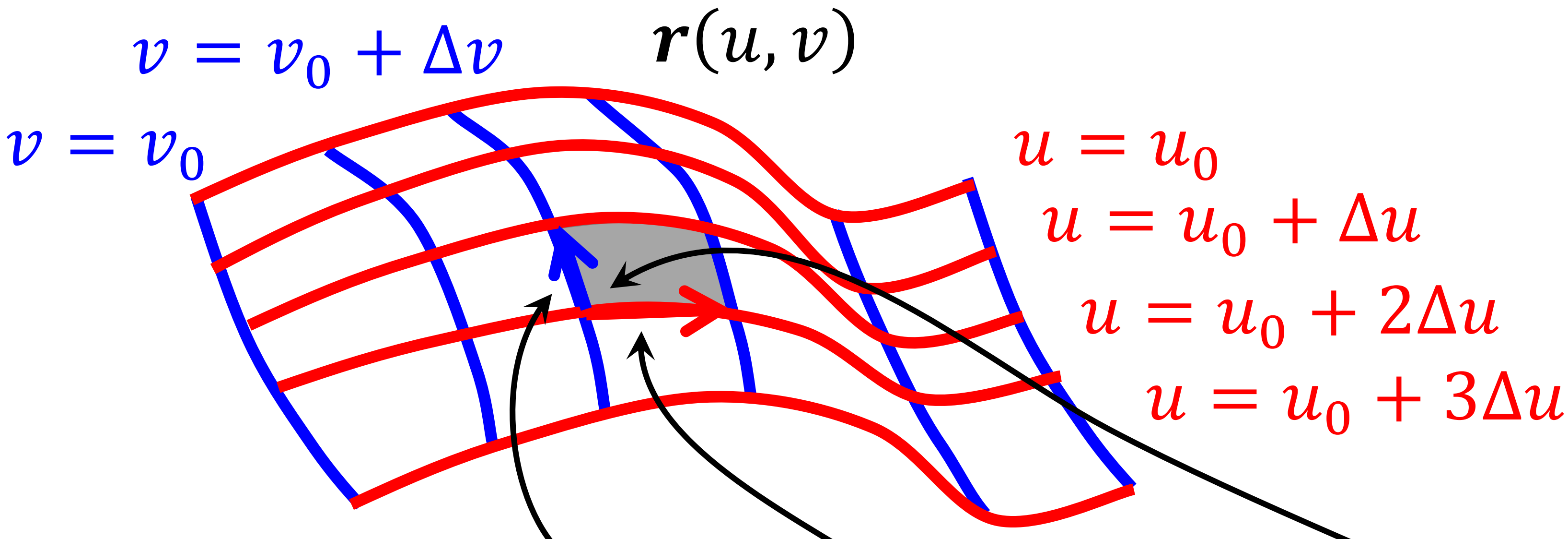
$$\Delta\boldsymbol{s}^2 = \Delta\mathbf{s}\cdot\Delta\mathbf{s} = {\boldsymbol{r}'_u}^2\Delta u^2 + 2\boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{r}'_v\,\Delta u\Delta v + {\boldsymbol{r}'_v}^2\Delta v^2$$

$$\boxed{\Delta\boldsymbol{s}^2 = [\Delta u \quad \Delta v\,]\underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{r}'_u & \boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{r}'_v\\ \boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{r}'_v & \boldsymbol{r}'_v\cdot\boldsymbol{r}'_v\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{bmatrix}}$$

$\boldsymbol{g}$: metrikus tenzor, $\boldsymbol{I}$: első fundamentális forma

Szimmetrikus, pozitív definit 2x2-es mátrix

Metrikus tenzor jelentése



$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r'}_u \cdot \boldsymbol{r'}_u & \boldsymbol{r'}_u \cdot \boldsymbol{r'}_v \\ \boldsymbol{r'}_u \cdot \boldsymbol{r'}_v & \boldsymbol{r'}_v \cdot \boldsymbol{r'}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\boldsymbol{r'}_u|^2 & |\boldsymbol{r'}_u||\boldsymbol{r'}_v|\cos(\alpha) \\ |\boldsymbol{r'}_u||\boldsymbol{r'}_v|\cos(\alpha) & |\boldsymbol{r'}_v|^2 \end{bmatrix}$$

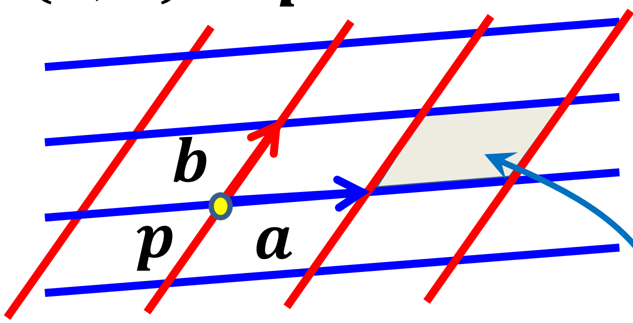
<u>Cella területének négyzete:</u>

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{I}) &= |\boldsymbol{r'}_u|^2|\boldsymbol{r'}_v|^2\left(1 - \cos^2(\alpha)\right) = |\boldsymbol{r'}_u|^2|\boldsymbol{r'}_v|^2\sin^2(\alpha) \\ &= |\boldsymbol{r'}_u \times \boldsymbol{r'}_v|^2 \end{aligned}$$

Példa: Sík I. fundamentális forma

- Egy parametrikus egyenlet:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{a}u + \boldsymbol{b}v$$



- Parciális deriváltak:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \boldsymbol{a}$$

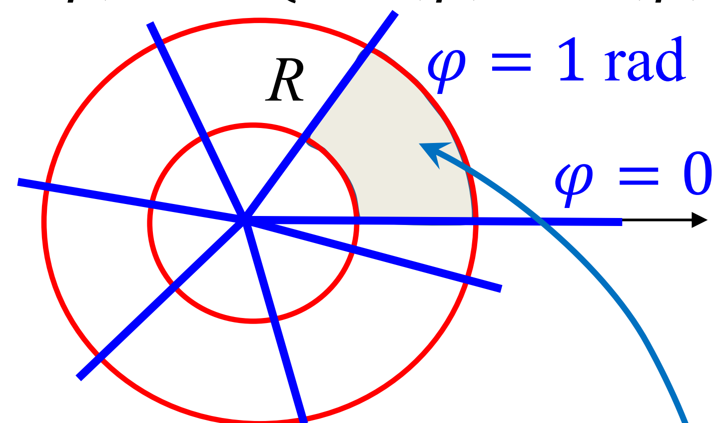
$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \boldsymbol{b}$$

$\det = \text{area}^2$

- Metrikus tenzor:

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}(R,\varphi) = R(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$



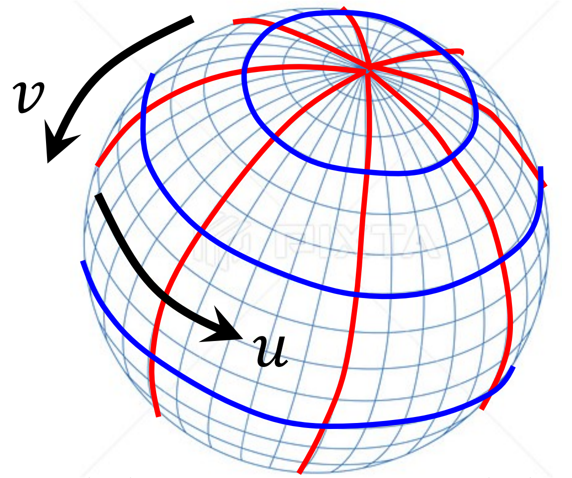
$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial R} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = R(-\sin(\varphi), \cos(\varphi))$$

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}$$

$\det = \text{area}^2$

Példa: Gömb
I. fundamentális forma



- Egy parametrikus egyenlet:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (c_x + R\cos(u)\sin(v)\,, c_y + R\sin(u)\sin(v)\,, c_z + R\cos(v))$$

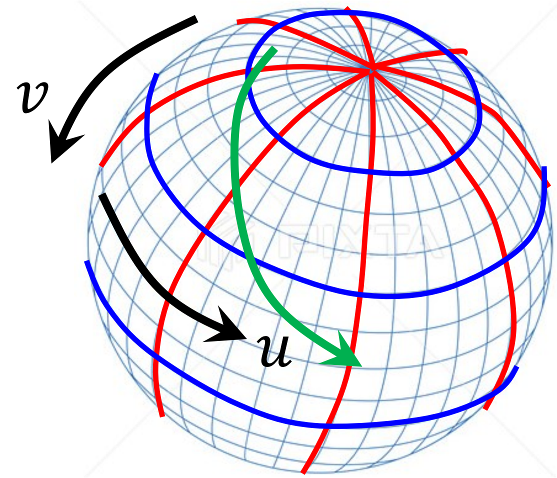
- Parciális deriváltak:

$$\boldsymbol{r}'_u = (-R\sin(u)\sin(v)\,, R\cos(u)\sin(v)\,, 0)$$
$$\boldsymbol{r}'_v = (R\cos(u)\cos(v)\,, R\sin(u)\cos(v)\,, -R\sin(v))$$

- Metrikus tenzor:

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}'_u \cdot \boldsymbol{r}'_u & \boldsymbol{r}'_u \cdot \boldsymbol{r}'_v \\ \boldsymbol{r}'_u \cdot \boldsymbol{r}'_v & \boldsymbol{r}'_v \cdot \boldsymbol{r}'_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^2\sin^2(v) & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}$$

Mire jó példa: sebesség a gömbfelületen

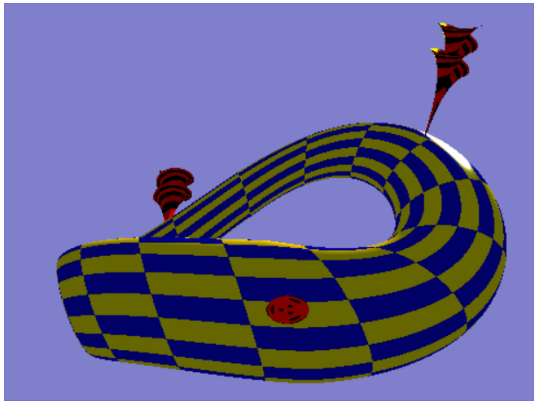


- Pálya paramétertérben:

$$u = at + u_0 \qquad v = bt + v_0$$

- Sebesség paramétertérben:

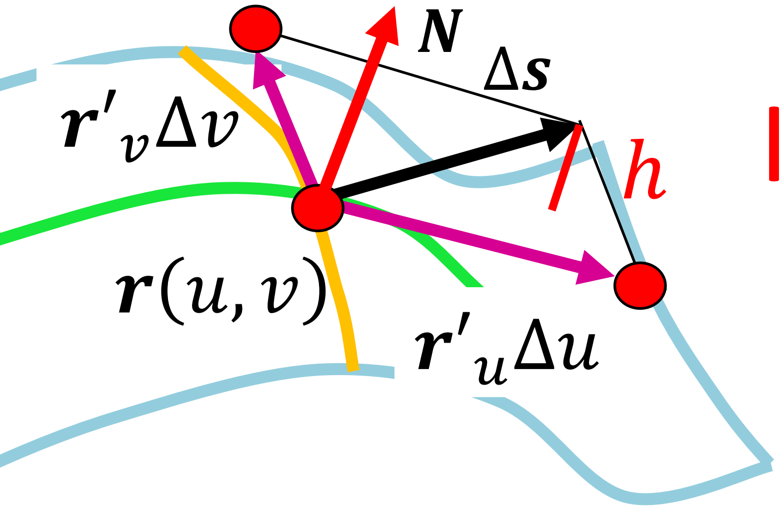
$$\mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}v = b\,\mathrm{d}t$$



- Sebesség a felületen:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{R^2 \sin^2(v)\,\mathrm{d}u^2 + R^2 \mathrm{d}v^2}}{\mathrm{d}t} = R\sqrt{\sin^2(v)\,a^2 + b^2}$$

- Mik az egyenesek (geodézikus vonalak) a felületen?



II. fundamentális forma

Mennyire távolodunk a síktól, ha u Δu-val, v pedig Δv-vel változik?

$$\boldsymbol{r}(u + \Delta u, v + \Delta v) - \boldsymbol{r}(u, v) \approx$$

$$\boldsymbol{r}'_u \Delta u + \boldsymbol{r}'_v \Delta v + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{r}''_{uu} \Delta u^2 + 2\boldsymbol{r}''_{uv} \Delta u \Delta v + \boldsymbol{r}''_{vv} \Delta v^2\right)$$

A normálvektorral szorozva a síktól való távolság marad:

$$h(\Delta u, \Delta v) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{r}''_{uu} \Delta u^2 + 2\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{r}''_{uv} \Delta u \Delta v + \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{r}''_{vv} \Delta v^2\right)$$

$$\boxed{h(\Delta u, \Delta v) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\Delta u & \Delta v\end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{r}''_{uu} & \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{r}''_{uv} \\ \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{r}''_{uv} & \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{r}''_{vv}\end{bmatrix}}_{} \begin{bmatrix}\Delta u \\ \Delta v\end{bmatrix}}$$

$\boldsymbol{II}$: második fundamentális forma

Szimmetrikus 2x2-es mátrix

Példa: Sík II. fundamentális forma

- Egy parametrikus egyenlet:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{a}u + \boldsymbol{b}v$$

$$\boldsymbol{r}(R,\varphi) = R(\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)$$

- Parciális deriváltak:

$$\boldsymbol{r}''_{uu} = 0$$
$$\boldsymbol{r}''_{vv} = 0$$
$$\boldsymbol{r}''_{uv} = 0$$
$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} / |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$$

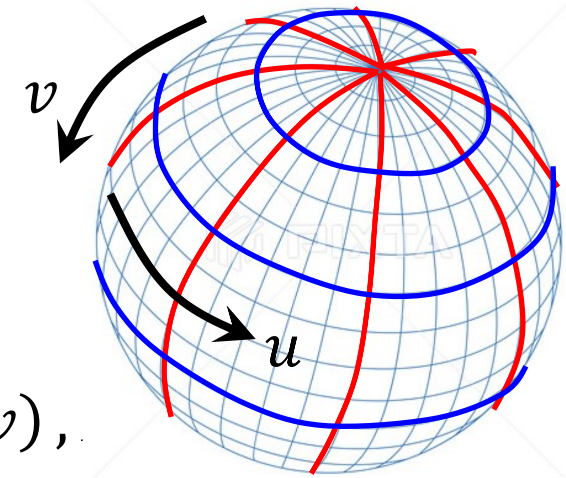
$$\boldsymbol{r}''_{RR} = 0$$
$$\boldsymbol{r}''_{\varphi\varphi} = R(-\cos(\varphi), -\sin(\varphi), 0)$$
$$\boldsymbol{r}''_{R\varphi} = (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0)$$
$$\boldsymbol{N} = (0,0,1)$$

- II. fundamentális forma

$$\boldsymbol{II} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{r}''_{uu} & \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{r}''_{uv} \\ \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{r}''_{uv} & \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{r}''_{vv} \end{bmatrix} = 0$$

$$\boldsymbol{II} = 0$$

Példa: Gömb
II. fundamentális forma



- Egy parametrikus egyenlet:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (R\cos(u)\sin(v)\,, R\sin(u)\sin(v)\,, \ldots$$

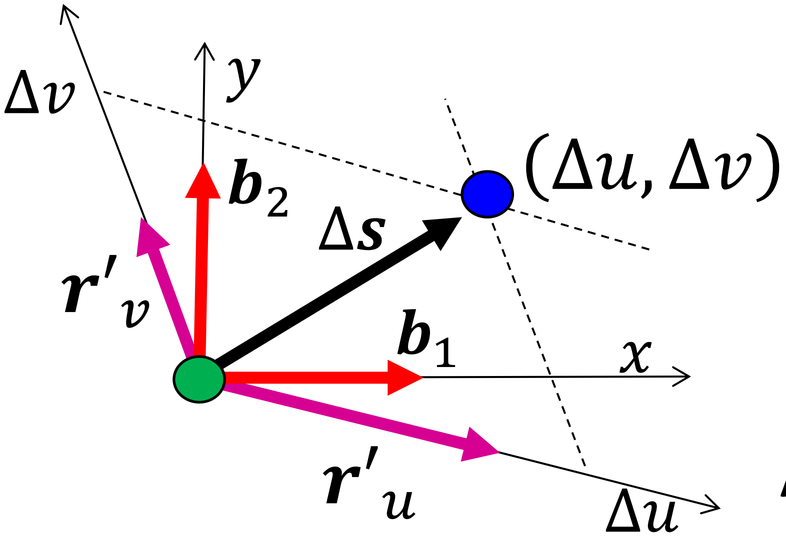
- Parciális deriváltak:

$$\boldsymbol{r''}_{uu} = (-R\cos(u)\sin(v)\,, -R\sin(u)\sin(v)\,, 0)$$
$$\boldsymbol{r''}_{vv} = (-R\cos(u)\sin(v)\,, -R\sin(u)\sin(v)\,, -R\cos(v))$$
$$\boldsymbol{r''}_{uv} = (-R\sin(u)\cos(v)\,, R\cos(u)\cos(v)\,, 0)$$
$$\boldsymbol{N}^0 = (-\cos(u)\sin(v)\,, -\sin(u)\sin(v)\,, -\cos(v))$$

- II. fundamentális forma:

$$\boldsymbol{II} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}^0 \cdot \boldsymbol{r''}_{uu} & \boldsymbol{N}^0 \cdot \boldsymbol{r''}_{uv} \\ \boldsymbol{N}^0 \cdot \boldsymbol{r''}_{uv} & \boldsymbol{N}^0 \cdot \boldsymbol{r''}_{vv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\sin^2(v) & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

- Görbület $\boldsymbol{r'}_u$ irányban: $\kappa = \dfrac{2\Delta h}{\Delta s^2} = \dfrac{\boldsymbol{N}^0 \cdot \boldsymbol{r''}_{uu}}{\boldsymbol{r'}_u{}^2} = \dfrac{R\sin^2(v)}{R^2\sin^2(v)} = \dfrac{1}{R}$



Bázis normalizálás

$$\Delta s^2 = [\Delta u \quad \Delta v\,]\boldsymbol{I}\begin{bmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{bmatrix}$$

$$\Delta s^2 \neq \Delta u^2 + \Delta v^2$$

Az $\boldsymbol{r}'_u$ és $\boldsymbol{r}'_v$ nem egységhosszúak és nem merőlegesek.

- Új ortonormált bázis $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$:

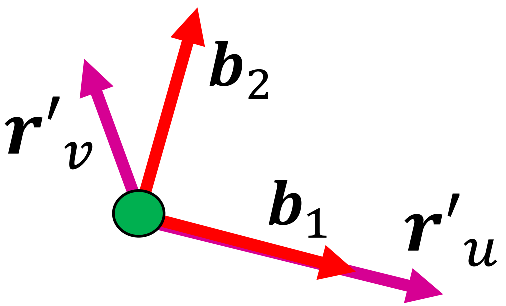
$$\Delta\boldsymbol{s} = \boldsymbol{r}'_u\Delta u + \boldsymbol{r}'_v\Delta v = \boldsymbol{b}_1 x + \boldsymbol{b}_2 y \qquad // \cdot\, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$$

- Bázistranszformáció:

$$\boldsymbol{r}'_u \cdot \boldsymbol{b}_1\Delta u + \boldsymbol{r}'_v \cdot \boldsymbol{b}_1\Delta v = x$$
$$\boldsymbol{r}'_u \cdot \boldsymbol{b}_2\Delta u + \boldsymbol{r}'_v \cdot \boldsymbol{b}_2\Delta v = y$$

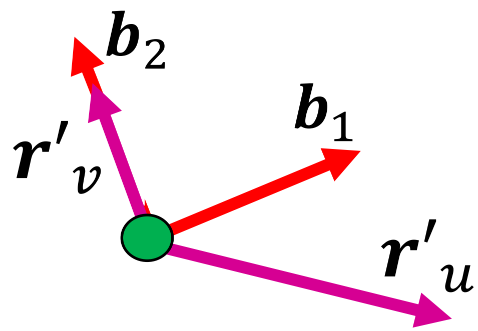
$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{r}'_u \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{r}'_v \cdot \boldsymbol{b}_1\\ \boldsymbol{r}'_u \cdot \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{r}'_v \cdot \boldsymbol{b}_2\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}\begin{bmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}^{-1}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{bmatrix}$$

Legyen $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r'}_u \cdot \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{r'}_v \cdot \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{r'}_u \cdot \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{r'}_v \cdot \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix}$ szimmetrikus



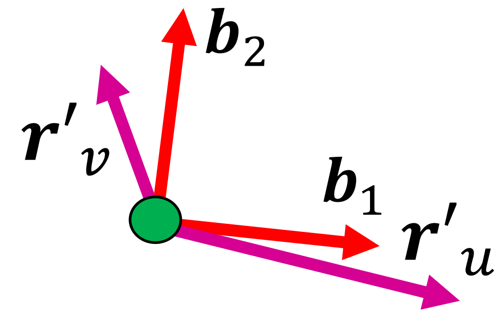
$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{r'}_u / |\boldsymbol{r'}_u|$$

$$\begin{bmatrix} |\boldsymbol{r'}_u| & \boldsymbol{r'}_v \cdot \boldsymbol{r'}_u / |\boldsymbol{r'}_u| \\ 0 & * \end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{r'}_v / |\boldsymbol{r'}_v|$$

$$\begin{bmatrix} * & 0 \\ \boldsymbol{r'}_u \cdot \boldsymbol{r'}_v / |\boldsymbol{r'}_v| & |\boldsymbol{r'}_v| \end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} C & D \\ D & E \end{bmatrix}$$

- A két szélső esetben az egyik diagonálon kívüli elem 0 a másik pedig az $\boldsymbol{r'}_u \cdot \boldsymbol{r'}_v$ szerinti előjelű, a másik esetben fordítva.
- Átmenetkor az egyik zérusról indul, a másik szemből zérusra érkezik, tehát kell lennie olyan helyzetnek, amikor megegyeznek.

Metrikus tenzor a normalizált bázisban

- Bázis transzformáció: $\boldsymbol{B}^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix}$
- Metrika:

$$\Delta s^2 = \begin{bmatrix} \Delta u & \Delta v \end{bmatrix} \boldsymbol{I} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} (\boldsymbol{B}^{-1})^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{B}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$$

- Mivel $\boldsymbol{B}$ és $\boldsymbol{I}$ szimmetrikus:

$$= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{I} \cdot (\boldsymbol{B}^2)^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + y^2, \text{ ha } \boxed{\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{I}}$$

Alakoperátor (Shape operator)

- Érintősíkban ortonormált bázis: $\boldsymbol{B}^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix}$

$$h = \frac{1}{2}[\Delta u \quad \Delta v]\boldsymbol{II}\begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} = \frac{1}{2}[x \quad y](\boldsymbol{B}^{-1})^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{II} \cdot \boldsymbol{B}^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Mivel szimmetrikus mátrixok, az alakoperátor:

$$(\boldsymbol{B}^{-1})^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{II} \cdot \boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{II} \cdot (\boldsymbol{B}^{2})^{-1} = \boxed{\boldsymbol{II} \cdot \boldsymbol{I}^{-1} = \boldsymbol{S}}$$

- Érintősíktól távolodás alakoperátorral:

$$\boxed{h = \frac{1}{2}[x \quad y]\boldsymbol{S}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}$$

A gömb alakoperátora

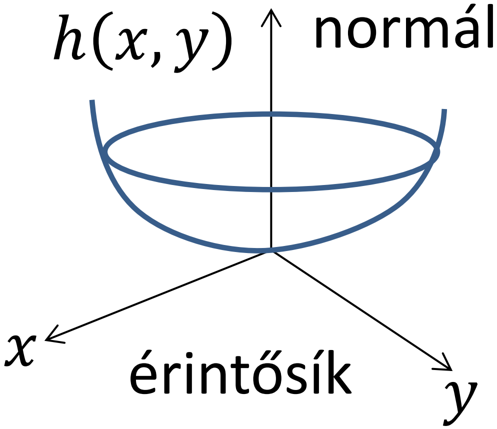
$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{II} \cdot \boldsymbol{I}^{-1}$$

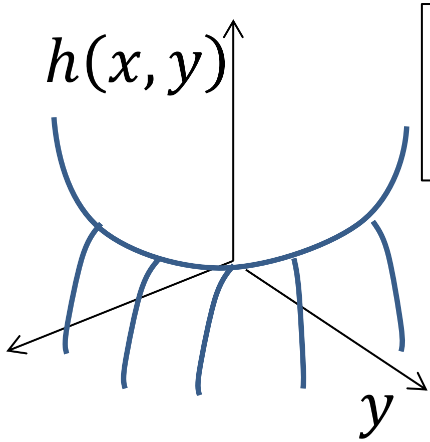
$$= \begin{bmatrix} R\sin^2(v) & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^2\sin^2(v) & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} R\sin^2(v) & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/(R^2\sin^2(v)) & 0 \\ 0 & 1/R^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/R & 0 \\ 0 & 1/R \end{bmatrix}$$

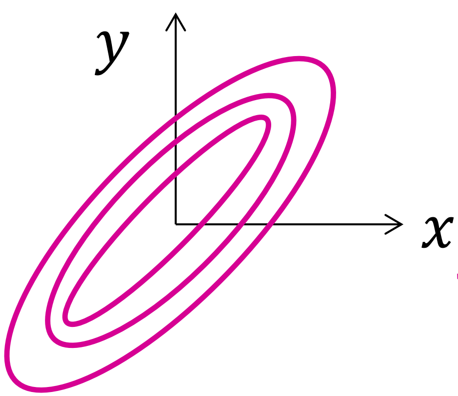
Érintősíktól távolság alakoperátorral

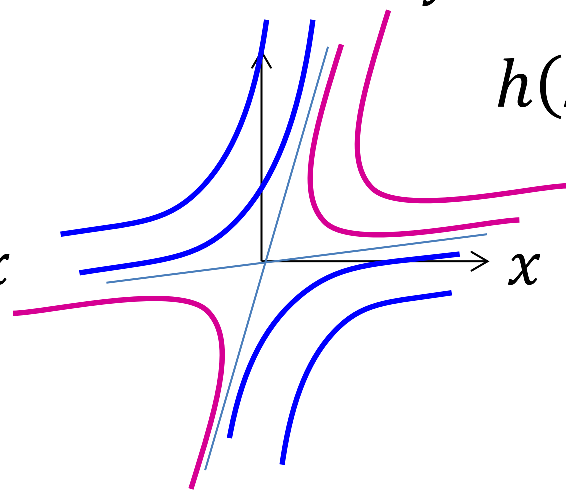




$$\boxed{h(x,y) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{}}$$

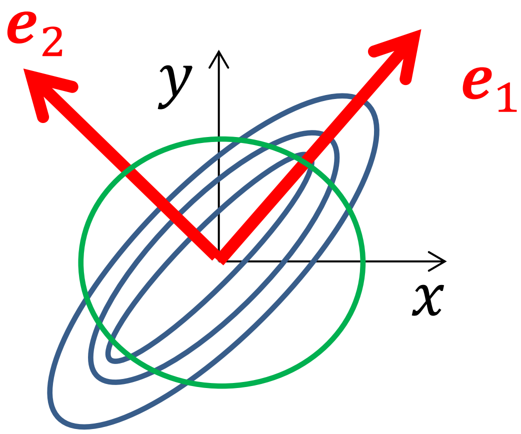
$\boldsymbol{S}$: alakoperátor





$$h(x,y) = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

Szintvonalak: $h(x,y) =$ állandó



Fő görbületi irányok

A szintvonalak ellipszisek vagy hiperbolák, a legsűrűbb és a legritkább szintvonalak a merőleges főtengelyek irányába vannak.

- Köv: A fő görbületi irányok mindig egymásra merőlegesek.
- Meghatározás: Milyen x, y-ra van szélsőértéke a $h(x, y)$-nak az $x^2 + y^2 = s^2$ feltétel (körbemegyünk) mellett?

$$H(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) - \frac{\lambda}{2}(x^2 + y^2 - s^2)$$

szélsőértéke (Lagrange multiplikátor):

$$\frac{\partial H}{\partial x} = ax + by - \lambda x = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = bx + cy - \lambda y = 0$$

$$\boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{S}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}$$

Fő görbületi irányok és görbületek

- A $\boldsymbol{e}_{1,2}$ fő görbületi irányok az alakoperátor sajátvektorai
- Görbe az $\boldsymbol{e}$ fő irányban (egységvektor): $[x \quad y] = \boldsymbol{e}^T s$

$$h(x(s), y(s)) = \frac{1}{2}[x \quad y]\boldsymbol{S}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{s^2}{2}\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{S}\boldsymbol{e} = \frac{s^2}{2}\lambda\, \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{e} = \frac{s^2}{2}\lambda$$

- Principális görbületek az alakoperátor sajátértékei:

$$\boxed{\kappa_{1,2} = \frac{2h_{1,2}}{s^2} = \lambda_{1,2}}$$

- Gauss görbület: A fő görbületek (sajátértékek) szorzata. Egy mátrix sajátértékeinek szorzata = determinánsa:

$$\boxed{K = \det(\boldsymbol{S}) = \det(\boldsymbol{II})\det(\boldsymbol{I}^{-1}) = \det(\boldsymbol{II})\,/\det(\boldsymbol{I})}$$

Lineáris algebrai tanulságok

- Tetszőleges $\boldsymbol{S}$-hez (szimmetrikus mátrix) találtunk merőleges főgörbületi irányokat (sajátvektor) és görbületeket (valós sajátérték).
- Minden szimmetrikus $\boldsymbol{A}$ mátrixnak van egymásra merőleges $\boldsymbol{e}_i$ sajátvektor rendszere (ortonormált bázis), λ_i sajátértékei pedig valósak: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = \lambda_i \boldsymbol{e}_i$
- Diagonizálás: $\boldsymbol{A}\overset{\boldsymbol{U}}{[\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_D]} = \overset{\boldsymbol{U}}{[\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_D]} \overset{\boldsymbol{\Lambda}}{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_D \end{bmatrix}}$

$$\boxed{\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^{T}}$$

- Sajátértékek szorzata: $\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{U})\det(\boldsymbol{\Lambda})\det\left(\boldsymbol{U}^{-1}\right) = \det(\boldsymbol{\Lambda})$
- Mátrix függvények: $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^{-1} \dots \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{U}^{-1}$

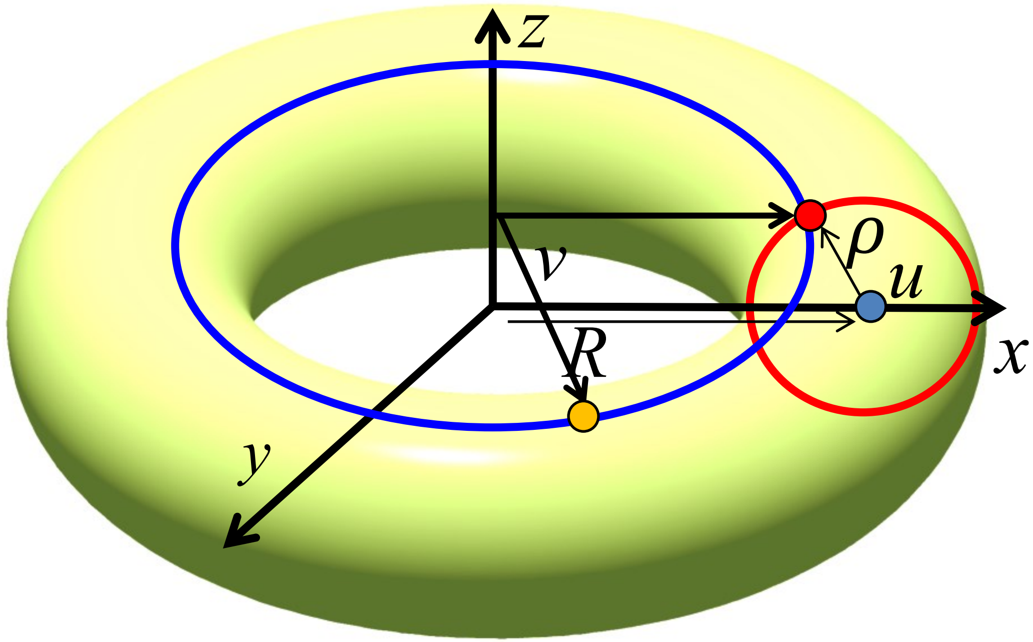
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots$$

$$f(\boldsymbol{A}) = f(0)\boldsymbol{1} + f'(0)\boldsymbol{A} + \frac{f''(0)}{2}\boldsymbol{A}^2 + \cdots = \boldsymbol{U}\begin{bmatrix} f(\lambda_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f(\lambda_D) \end{bmatrix}\boldsymbol{U}^{-1}$$

Gömb görbülete

- Alakoperátor: $\begin{bmatrix} 1/R & 0 \\ 0 & 1/R \end{bmatrix}$
- Sajátértékek: $\lambda_{1,2} = 1/R$
- Sajátvektor egyenlet: $\begin{bmatrix} 1/R & 0 \\ 0 & 1/R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1/R \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
  Bármi fő görbületi irány.
- Gauss görbület:
  - Principális görbületek szorzata: $K = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{R^2}$
  - Alakoperátor determinánsa: $K = \det\left(\begin{bmatrix} 1/R & 0 \\ 0 & 1/R \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{R^2}$
  - Fundamentális formák determinánsainak hányadosa:

$$K = \det\left(\begin{bmatrix} R\sin^2(v) & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}\right) / \det\left(\begin{bmatrix} R^2\sin^2(v) & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{R^2}$$



Példa: Tórusz első deriváltak és normál vektor

$$\boldsymbol{r}(u,v) = [(R+\rho\cos(u))\cos(v), (R+\rho\cos(u))\sin(v), \rho\sin(u)]$$

$$\boldsymbol{r'}_u = \rho\,[-\sin(u)\cos(v), -\sin(u)\sin(v), \cos(u)]$$

$$\boldsymbol{r'}_v = (R+\rho\cos(u))[-\sin(v), \cos(v), 0]$$

$$\boldsymbol{N} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (R+\rho\cos(u))\rho \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -\sin(u)\cos(v) & -\sin(u)\sin(v) & \cos(u) \\ -\sin(v) & \cos(v) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \;-(R+\rho\cos(u))\rho[\cos(v)\cos(u),\ \sin(v)\cos(u), \sin(u)]$$

$$\boldsymbol{N}^0 = -[\cos(v)\cos(u),\ \sin(v)\cos(u), \sin(u)]$$

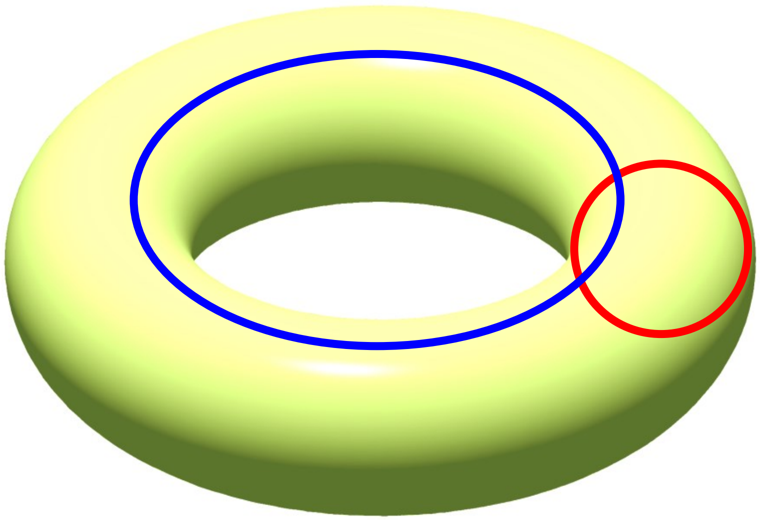
Tórusz: I. FF és bázis transzformáció

$$\boldsymbol{r'}_u = \rho\,[-\sin(u)\cos(v), -\sin(u)\sin(v), \cos(u)]$$

$$\boldsymbol{r'}_v = (R + \rho\cos(u))[-\sin(v), \cos(v), 0]$$

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r'}_u \cdot \boldsymbol{r'}_u & \boldsymbol{r'}_u \cdot \boldsymbol{r'}_v \\ \boldsymbol{r'}_u \cdot \boldsymbol{r'}_v & \boldsymbol{r'}_v \cdot \boldsymbol{r'}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & (R + \rho\cos(u))^2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \sqrt{\boldsymbol{I}} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & R + \rho\cos(u) \end{bmatrix}$$



Tórusz: II. FF, alakoperátor

$$\boldsymbol{r}'_u = \rho\,[-\sin(u)\cos(v)\,, -\sin(u)\sin(v), \cos(u)]$$

$$\boldsymbol{r}'_v = (R + \rho\cos(u))[-\sin(v)\,, \cos(v), 0]$$

$$\boldsymbol{N}^0 = -[\cos(v)\cos(u)\,,\ \sin(v)\cos(u)\,, \sin(u)]$$

$$\boldsymbol{r}''_{uu} = -\rho\,[\cos(u)\cos(v)\,, \cos(u)\sin(v), \sin(u)]$$

$$\boldsymbol{r}''_{vv} = -(R + \rho\cos(u))[\cos(v)\,, \sin(v), 0]$$

$$\boldsymbol{r}''_{uv} = \rho\,[\sin(u)\sin(v)\,, -\sin(u)\cos(v), 0]$$

$$\boldsymbol{II} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}^0 \cdot \boldsymbol{r}''_{uu} & \boldsymbol{N}^0 \cdot \boldsymbol{r}''_{uv} \\ \boldsymbol{N}^0 \cdot \boldsymbol{r}''_{uv} & \boldsymbol{N}^0 \cdot \boldsymbol{r}''_{vv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & (R + \rho\cos(u))\cos(u) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{II} \cdot \boldsymbol{I}^{-1} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & (R + \rho\cos(u))\cos(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & (R + \rho\cos(u))^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/\rho & 0 \\ 0 & \cos(u)\,/(R + \rho\cos(u)) \end{bmatrix}$$

Fő görbületek és Gauss görbület

$$\boldsymbol{B} = \sqrt{\boldsymbol{I}} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & R + \rho\cos(u) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1/\rho & 0 \\ 0 & \cos(u)\,/(R + \rho\cos(u)) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

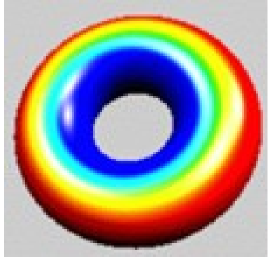
$$\lambda_1 = \frac{1}{\rho}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\rho \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{d}_1 = \boldsymbol{r}'_u \Delta u + \boldsymbol{r}'_v \Delta v = \boldsymbol{r}'_u/\rho$$

$$\lambda_2 = \frac{\cos(u)}{R + \rho\cos(u)}, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/(R + \rho\cos(u)) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{d}_2 = \boldsymbol{r}'_u \Delta u + \boldsymbol{r}'_v \Delta v = \boldsymbol{r}'_v/(R + \rho\cos(u))$$

$$\boxed{K = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{\cos(u)}{\rho(R + \rho\cos(u))}}$$

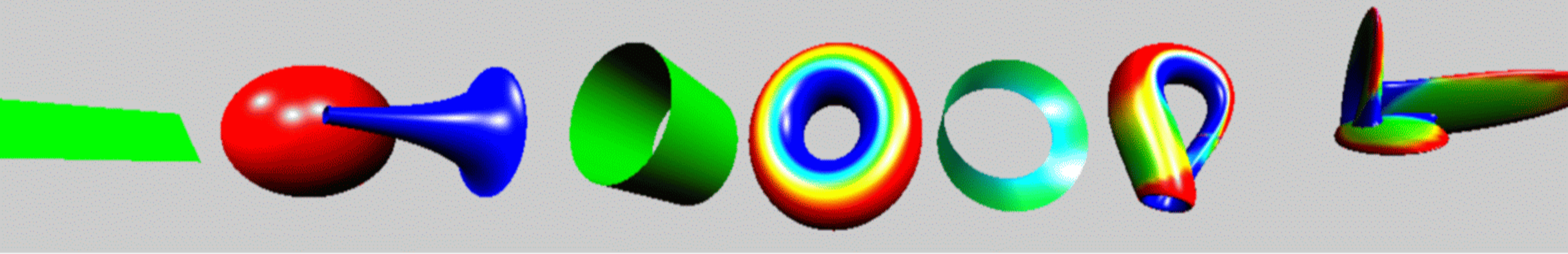


Program: $u, v \to K$

```
Dnum U = Dnum(u, 1, 0), V = Dnum(v, 0, 1), X, Y, Z;
eval(U, V, X, Y, Z);        // U,V -> X, Y, Z
vec3 ru = vec3(X(1, 0), Y(1, 0), Z(1, 0)),
vec3 rv = vec3(X(0, 1), Y(0, 1), Z(0, 1));
vec3 normal = normalize(cross(ru, rv));
// I fundamental form
float E = dot(ru, ru), F = dot(ru, rv), G = dot(rv, rv);

vec3 ruu = vec3(X(2, 0), Y(2, 0), Z(2, 0)),
vec3 ruv = vec3(X(1, 1), Y(1, 1), Z(1, 1));
vec3 rvv = vec3(X(0, 2), Y(0, 2), Z(0, 2));
// II Fundamental form
float L = dot(normal, ruu), M = dot(normal, ruv), N = dot(normal, rvv);
float curvature = (L * N - M * M) / (E * G - F * F);  // Gauss curvature K
```

```
void Sphere :: eval(Dnum U, Dnum V, Dnum X, Dnum Y, Dnum Z) {
   X = Cos(U) * Sin(V) * R;   Y = Sin(U) * Sin(V) * R;   Z = Cos(V) * R;
}
```



Square Sphere Tractricoid Cylinder Torus Möbius Klein Boy

Torus:

X = (Cos(U)*r+R) * Cos(V); Y = (Cos(U)*r+R) * Sin(V); Z = Sin(U) * r;

Tractricoid:

X = Cos(V) / Cosh(U); Y = Sin(V) / Cosh(U); Z = U - Tanh(U);

Cylinder:

X = Cos(U); Y = Sin(U); Z = V;

Mobius:

X = (Cos(U)*V+R) * Cos(U*2); Y = (Cos(U)*V+R) * Sin(U*2); Z = Sin(U) * V;

Klein:

Dnum a = Cos(U) * (Sin(U) + 1) * 3, b = Sin(U) * 8, c = (Cos(U) * (-1) + 2);
X = a + c * ((U(0, 0) > M_PI) ? Cos(V + M_PI) : Cos(U) * Cos(V));
Y = b + ((U(0, 0) > M_PI) ? 0 : c * Sin(U) * Cos(V));
Z = c * Sin(V);

Van integrálgeometria is?

- Igen van: Geometriai valószínűséggel foglalkozik
- Pontokat szórunk el egyenletesen a síkon (vagy térben). Mi a valószínűsége, hogy egy pont egy adott alakzat belsejében van?

  Válasz: arányos a területtel (térfogattal)

- Egyeneseket szórunk el egyenletesen a síkon (vagy térben). Mi a valószínűsége, hogy egy egyenes egy adott konvex sokszöget (konvex testet) metsz?

  Válasz: arányos a kerülettel (felszínnel)

- Alkalmazás: Milyen adatstruktúrában kell felületeket tárolni, hogy hatékonyan megmondhassuk, hogy egy félegyenes melyiket metszi először.