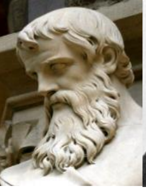
”In jeder besonderen Naturlehre nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist”

Immanuel Kant

Geometriák és algebrák

Szirmay-Kalos László




Euklidészi síkgeometria

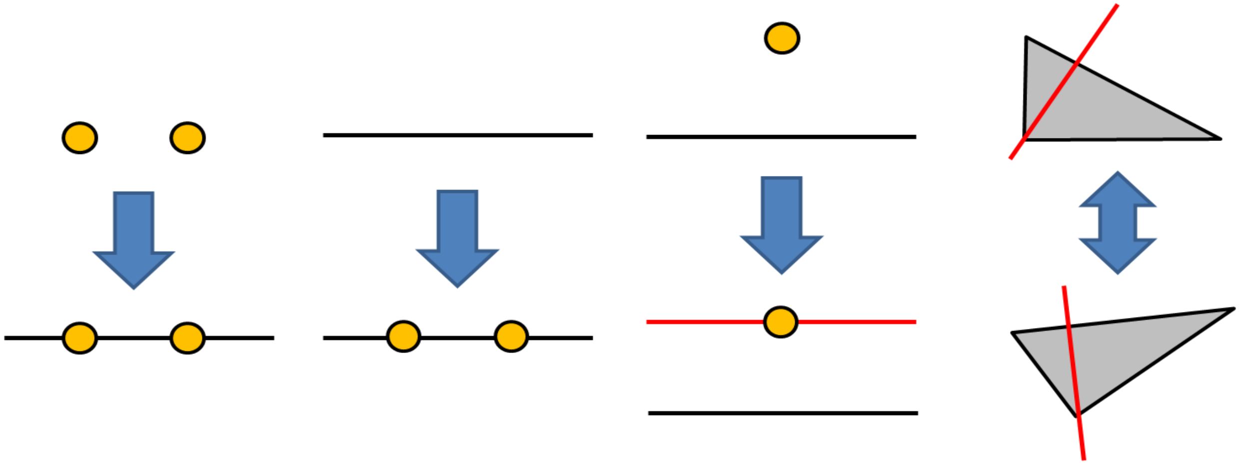
Axiómák:

<u>tapasztalat + vallásos hit</u>

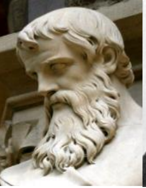
- Alapfogalmak implicit definíciója
- Tételek kiindulási pontja

<u>Euklideszi síkgeometria axiómái:</u>

1. Két pont meghatároz egy egyenest.
2. Egy egyenesnek van legalább két pontja.
3. Egy egyeneshez egy rajta kívül fekvő ponton át **<u>egy</u>** nem metsző egyenes húzható (**<u>párhuzamos</u>**).
4. Átmozgatható (egybevágó) dolgok mérete megegyező (a sík homogén és izotróp).
5. A részek összege az egész mérete.
6. …



Első illeszkedési axióma | Második illeszkedési axióma | Párhuzamossági axióma | Azonossági axióma

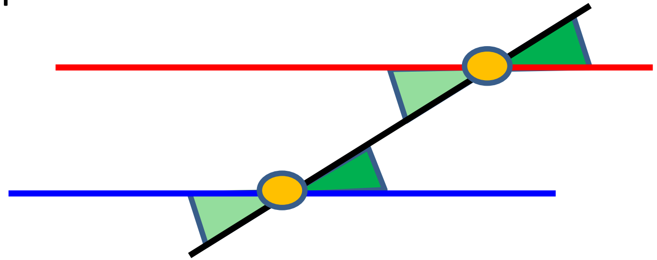



Euklidészi síkgeometria

<u>Euklideszi síkgeometria axiómái:</u>

1. Két pont meghatároz egy egyenest.
2. Egy egyenesnek van legalább két pontja.
3. Egy egyeneshez egy rajta kívül fekvő ponton át **<u>egy</u>** nem metsző egyenes húzható (**<u>párhuzamos</u>**).
4. Átmozgatható (egybevágó) dolgok mérete megegyező (a sík homogén és izotróp).
5. A részek összege az egész mérete.
6. …

T1. Ha egy egyenes két másikat ugyanolyan szögben metsz ⇔ két másik egyenes párhuzamos.

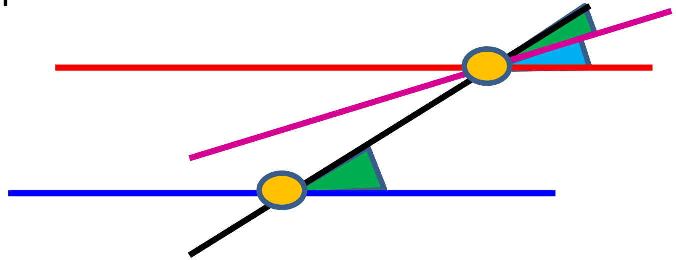


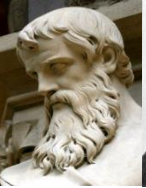
Euklidészi síkgeometria

<u>Euklideszi síkgeometria axiómái:</u>

1. Két pont meghatároz egy egyenest.
2. Egy egyenesnek van legalább két pontja.
3. Egy egyeneshez egy rajta kívül fekvő ponton át **<u>egy</u>** nem metsző egyenes húzható (**<u>párhuzamos</u>**).
4. Átmozgatható (egybevágó) dolgok mérete megegyező (a sík homogén és izotróp).
5. A részek összege az egész mérete.
6. …

T1. Ha egy egyenes két másikat ugyanolyan szögben metsz $\Leftrightarrow$ két másik egyenes párhuzamos.



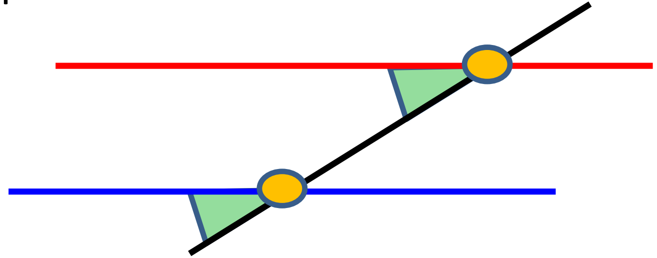


Euklidészi síkgeometria

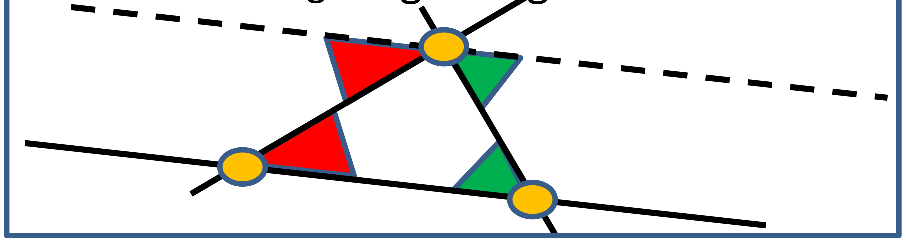
<u>Euklideszi síkgeometria axiómái:</u>

1. Két pont meghatároz egy egyenest.
2. Egy egyenesnek van legalább két pontja.
3. Egy egyeneshez egy rajta kívül fekvő ponton át **<u>egy</u>** nem metsző egyenes húzható (**<u>párhuzamos</u>**).
4. Átmozgatható (egybevágó) dolgok mérete megegyező (a sík homogén és izotróp).
5. A részek összege az egész mérete.
6. …

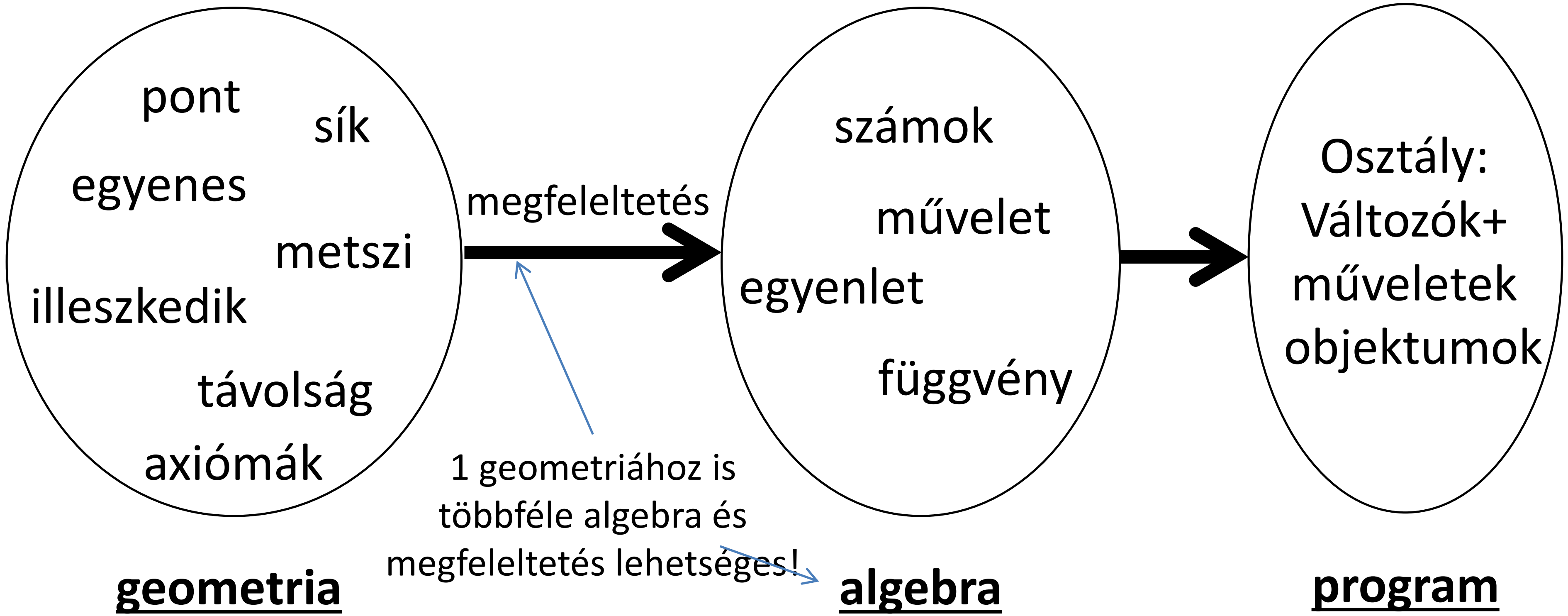
T1. Ha egy egyenes két másikat ugyanolyan szögben metsz ⇔ két másik egyenes párhuzamos.



T2. A háromszög szögösszege 180 fok



Mindent számmal!

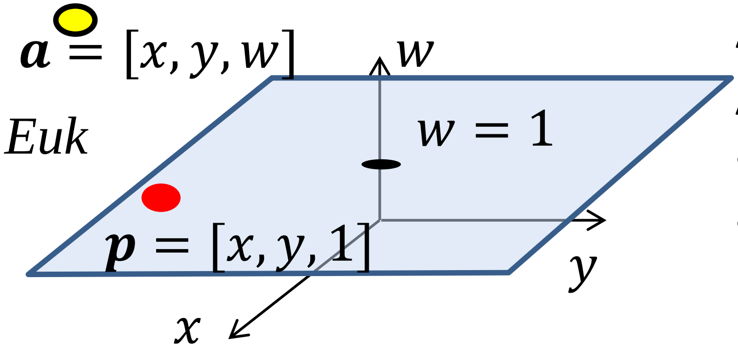


Analitikus geometriák: külső nézet

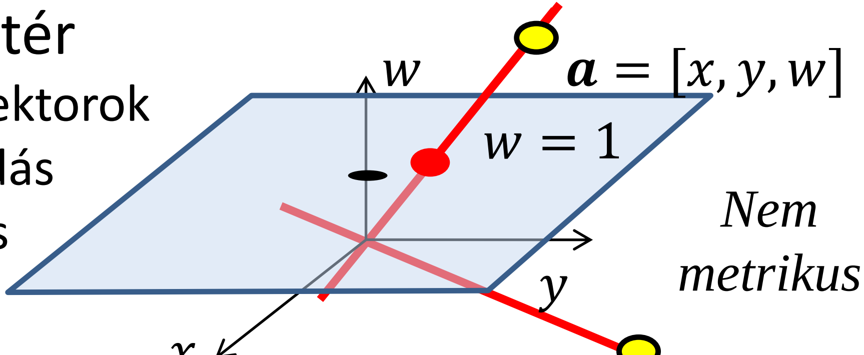
Ambiens tér

Ambiens vektorok

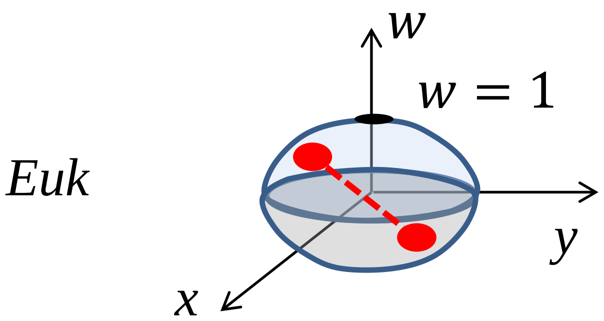
- Összeadás
- Skálázás



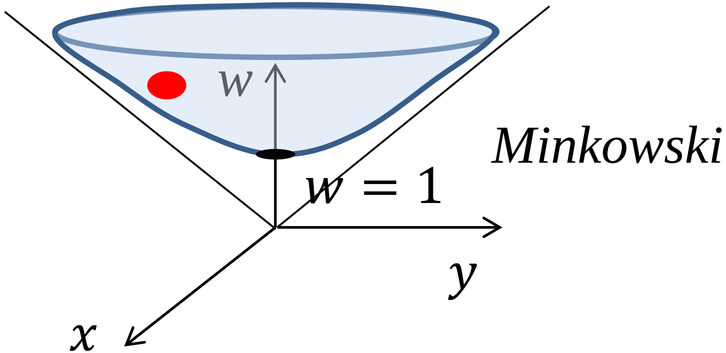
Euklideszi: $w = 1$



Projektív



Elliptikus: $x^2 + y^2 + w^2 = 1$



Hiperbolikus: $x^2 + y^2 - w^2 = -1$

Metrika: Skaláris szorzás az ambiens térben

Metrika:

- **Hossz:** $|\boldsymbol{a}|$
- **Szög:** α

Skaláris szorzás

$$\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = |\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|\cos(\alpha)$$

- Kommutatív,
- Bilineáris (disztributív),
- Euklideszi geometria: $\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

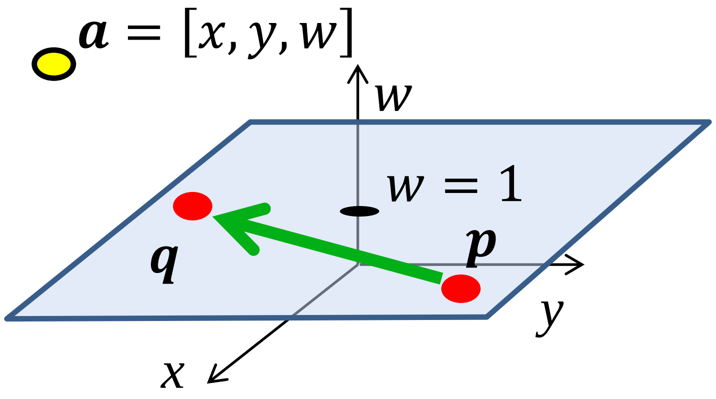
- **Hossz:** $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$
- **Szög:** $\alpha(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|}\right)$

$$\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = \text{skalár}$$

- Kommutatív
- Bilineáris (disztributív)

- Két vektor akkor és csak akkor merőleges, ha skaláris szorzatuk zérus

Euklideszi síkgeometria



Skaláris szorzás az ambiens térben:

$$\boxed{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + w_1 w_2}$$

- Kommutatív: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$
- Disztributív: $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$
- Skálázás: $(s\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = s(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$
- **Nem asszociatív**

Ambiens tér elemei:

- **Pontok:** $\boxed{\boldsymbol{p} = [x, y, 1]}$

  Miért nem $w = 0$? Az eltolás nem volna lineáris leképzés

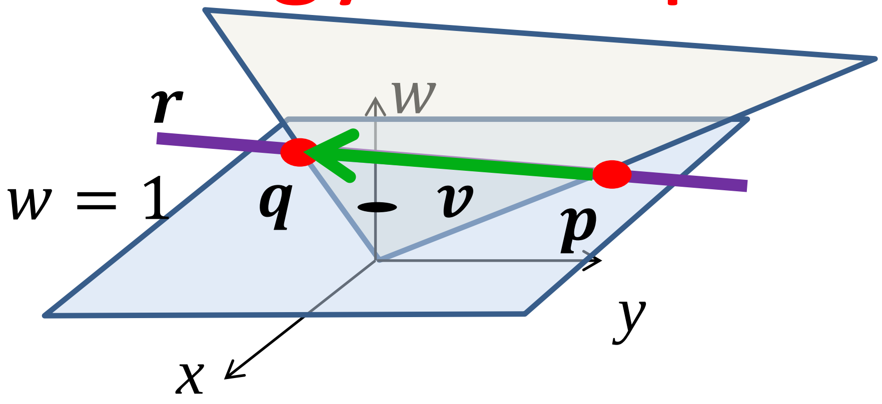
- **Vektorok:** $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}$, $\boxed{\boldsymbol{v} = [x, y, 0]}$
- Egyéb w-k nem pontok és nem vektorok

Vektorok tulajdonságai

- Két pont különbsége: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}$
- Ambiens tér eleme: $\boldsymbol{v} = [x, y, 0]$
- Vektor hossza: $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Egységvektor: $|\boldsymbol{v}^0| = 1,\ \boldsymbol{v}^0 \cdot \boldsymbol{v}^0 = 1, \boldsymbol{v}^0 = \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}}$
- Merőlegesség: $\boldsymbol{v}_\perp \cdot \boldsymbol{v} = 0,\ x_\perp x + \ y_\perp y = 0,$

  $\boldsymbol{v}_\perp = [y, -x, 0]\lambda$
- Párhuzamosság: $\boldsymbol{v}_\parallel = \lambda \boldsymbol{v},\ \ \boldsymbol{v}_\parallel = [x, y, 0]\lambda$

Egyenes: paraméteres egyenlet



Állandó sebességű mozgás:

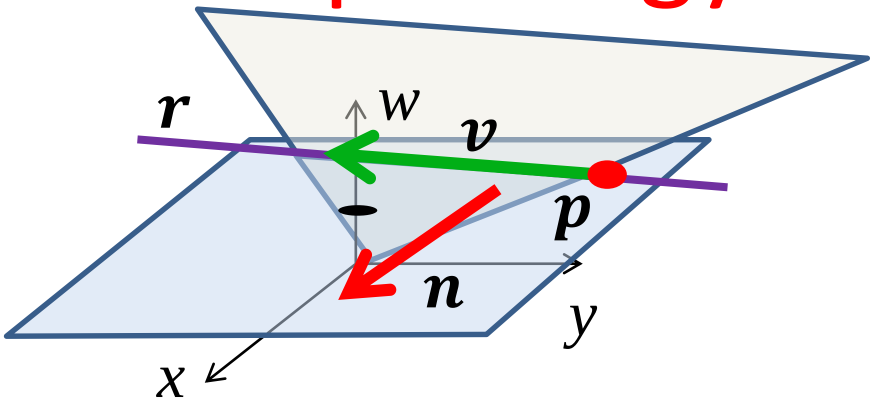
$$\boxed{\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}t}$$

Sebesség: $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{v}$

Gyorsulás: $\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = 0$

- Állandó sebességű mozgás koordinátákkal:
$$[x(t), y(t), w(t)] = [p_x, p_y, 1] + [v_x, v_y, 0]t$$
- Két pont kombinációja: $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{p} + (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p})t = \boldsymbol{p}(1 - t) + \boldsymbol{q}t$
$$[x(t), y(t), w(t)] = [p_x, p_y, 1](1 - t) + [q_x, q_y, 1]t$$
- Ambiens tér (origó, $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$) síkjának és a $w = 1$ síknak metszete

Egyenes implicit egyenletei



- **<u>Implicit egyenlet</u>**: $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}_\perp \Rightarrow \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}) = 0$

  $[n_x, n_y, 0]\cdot\left[x-p_x, y-p_y, 0\right] = n_x x + n_y y + d = 0$

  ahol $d = -\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}$

- Ambiens tér egy eleme: $\boldsymbol{N} = \left[n_x, n_y, d\right]$

  $\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{r} = \left[n_x, n_y, d\right]\cdot[x, y, 1] = n_x\, x + n_y y + d = 0$

Euklideszi térgeometria

- Ambiens tér 4 dimenziós: $\boldsymbol{a} = [x, y, z, w]$
- Skaláris szorzás: $\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 + w_1\, w_2$
- Pontok: $\boldsymbol{p} = [x, y, z, 1]$
  - Távolság: $d(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sqrt{(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) \cdot (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p})}$
- Vektorok: $\boldsymbol{v} = [x, y, z, 0]$
  - Hossz: $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
  - Szög: $\alpha(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}\right)$
- Egyenes: $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}t$

Sík

- Egy $\boldsymbol{p}$ pontot tartalmazó, $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ nem párhuzamos vektorok által kifeszített 2D altér (u, v valós paraméterek):

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{a}u + \boldsymbol{b}v$$

- Legyen $\boldsymbol{n}$ az $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$ vektorokra merőleges vektor:

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}) = 0 \Rightarrow n_x x + n_y y + n_z z + d = 0, \text{ ahol } d = -\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p}$$

- Ambiens tér egy eleme: $\boldsymbol{N} = [n_x, n_y, n_z, d]$

$$\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{r} = [n_x, n_y, n_z, d] \cdot [x, y, z, 1] = \boxed{n_x x + n_y y + n_z z + d = 0}$$

- Két sík megegyezik, ha $\boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{N}_2 \lambda$

Vektor/Pont/Sík/RGBA osztály

```
struct vec4 {
   float x, y, z, w; // Euc.vector: w=0; point: w=1; plane: w=d

   vec4(float x0, float y0, float z0, float w0) {
      x = x0; y = y0; z = z0, w = w0;
   }
   vec4 operator*(float s) { return vec4(x * s, y * s, z * s, w * s); }

   vec4 operator+(vec4 v) {
      return vec4(x + v.x, y + v.y, z + v.z, w + v.w);
   }
   vec4 operator-(vec4 v) {
      return vec4(x - v.x, y - v.y, z - v.z, w - v.w);
   }
   vec4 operator*(vec4 v) const { // only for colors
      return vec4(x * v.x, y * v.y, z * v.z, w * v.w);
   }
};
```

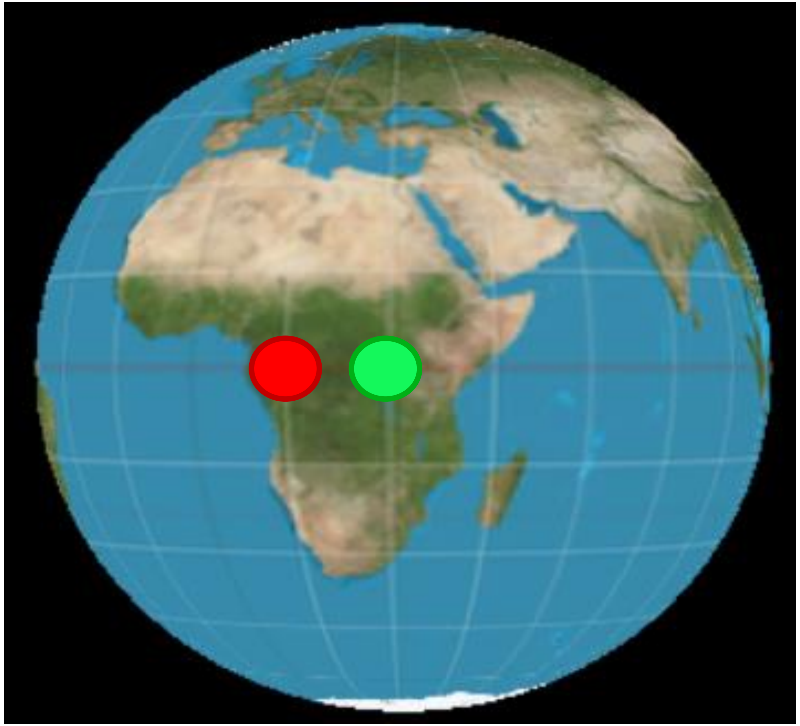
vec4 műveletek

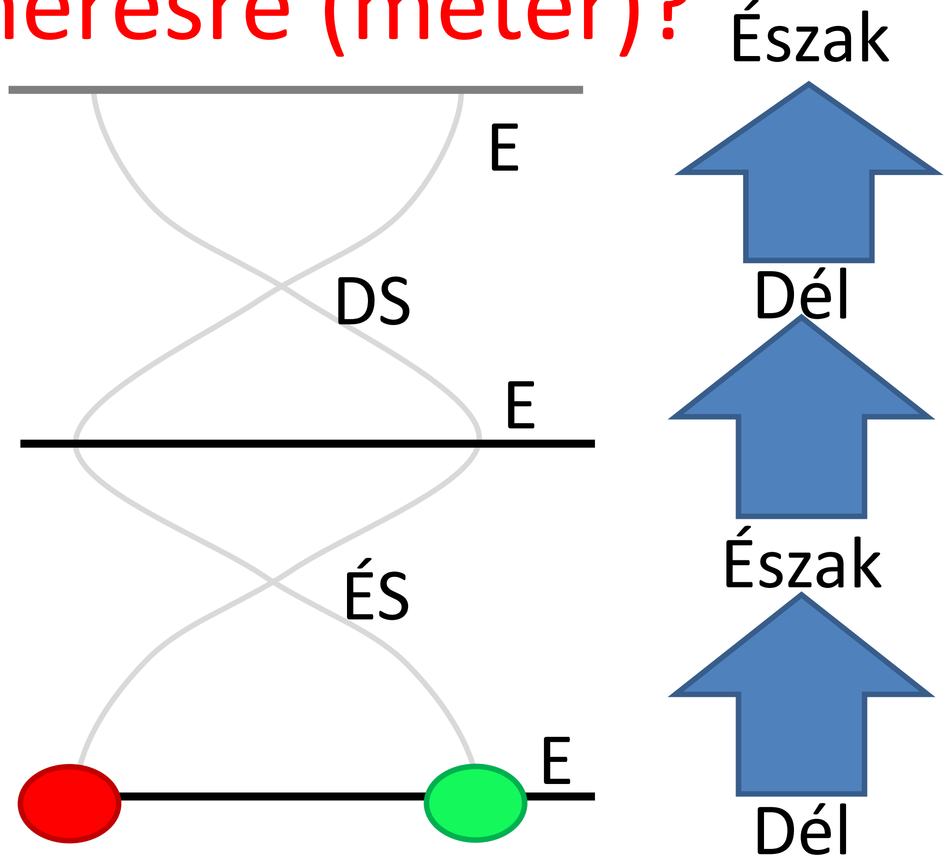
```
float dot(vec4 a, vec4 b) { // for Euc.vectors or for point&plane
   return a.x * b.x + a.y * b.y + a.z * b.z + a.w * b.w;
}

float length(vec4 v) { return sqrtf(dot(v, v)); }

vec4 normalize(vec4 v) { return v * (1/length(v)); }

float angle(vec4 a, vec4 b) {
   return acos(dot(a, b) / length(a) / length(b));
}

vec4 lerp(vec4 p, vec4 q, float t) {
   return p * (1 - t) + q * t;
}
```

3D vektor/Pont/RGB

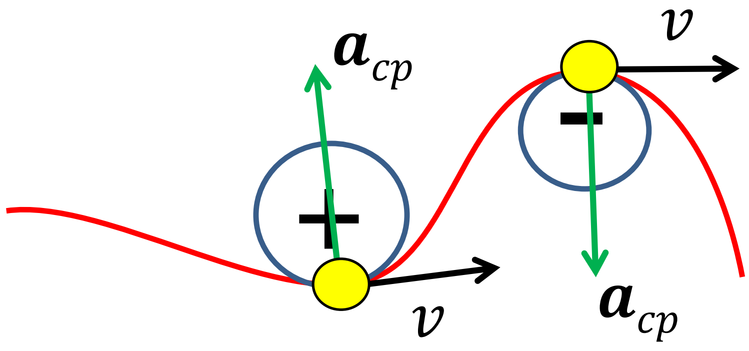
```
struct vec3 {
   float x, y, z;

   vec3(float x0, float y0, float z0) { x = x0; y = y0; z = z0; }

   vec3 operator*(float a) { return vec3(x * a, y * a, z * a); }
   vec3 operator+(vec3 v) { return vec3(x + v.x, y + v.y, z + v.z); }
   vec3 operator-(vec3 v) { return vec3(x - v.x, y - v.y, z - v.z); }
   vec3 operator*(vec3 v) { return vec3(x * v.x, y * v.y, z * v.z); }
};

float dot(vec3 v1, vec3 v2) { // for vectors
   return (v1.x * v2.x + v1.y * v2.y + v1.z * v2.z);
}
vec3 cross(vec3 v1, vec3 v2) { // for vectors
   return vec3(v1.y * v2.z - v1.z * v2.y,
               v1.z * v2.x - v1.x * v2.z,
               v1.x * v2.y - v1.y * v2.x);
}
```

Jó az euklideszi geometria föld (Geo) mérésre (meter)?





Görbék görbülete: κ

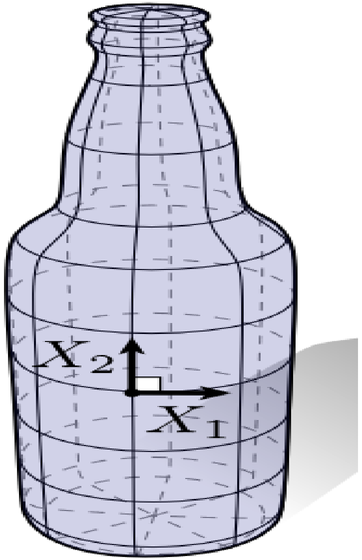


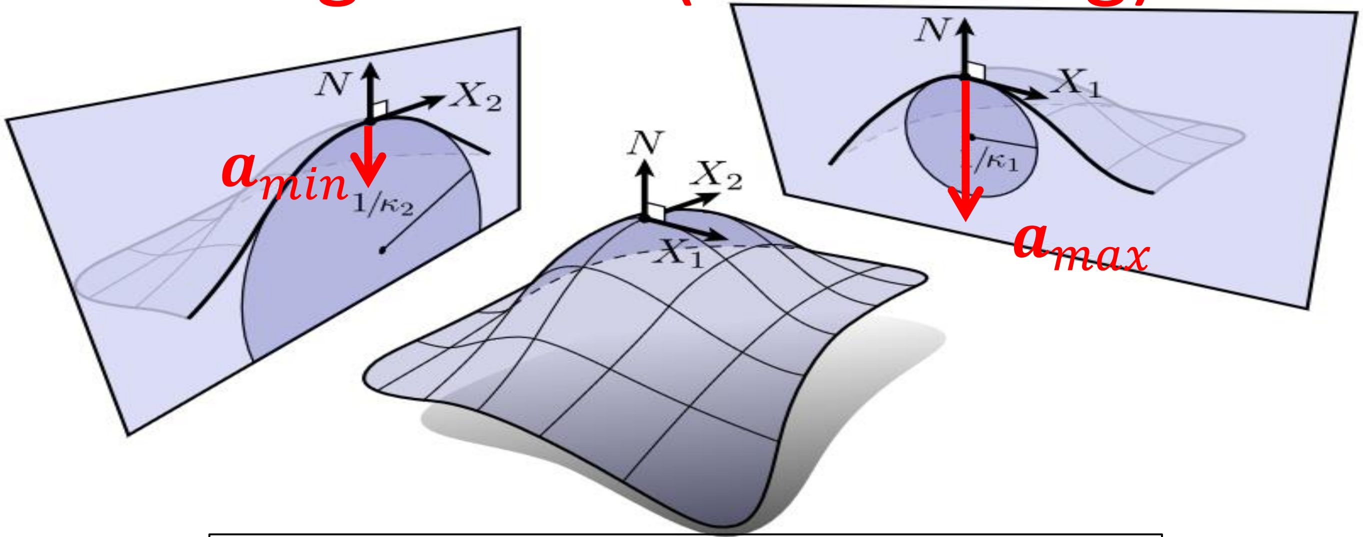
- Egységsebességű mozgás (centripetális) gyorsulás:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R}$$

- Simulókör sugarának reciproka

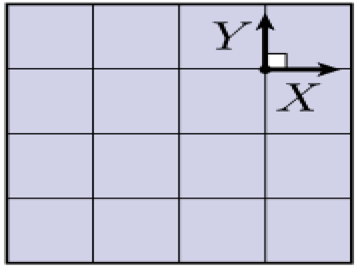
Felületek: fő görbületi irányok és Gauss görbület (Krümmung)



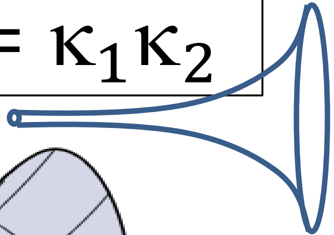


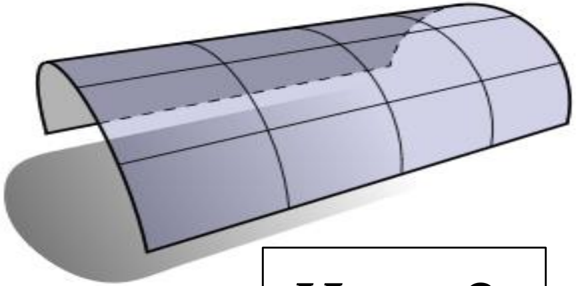
$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \boldsymbol{a}_{min} \cdot \boldsymbol{a}_{max}$$

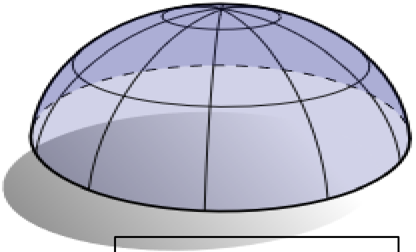
Theorema Egregium: K attól függ, hogy a felületen hogyan mérünk szöget és távolságot, és független a felület térbeli alakjától.

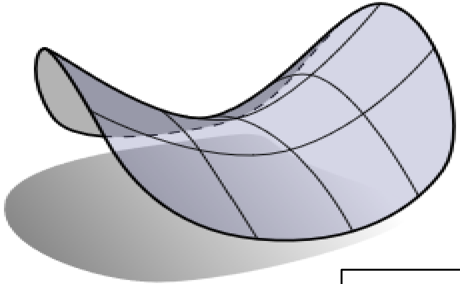


Gauss görbület: $K = \kappa_1 \kappa_2$





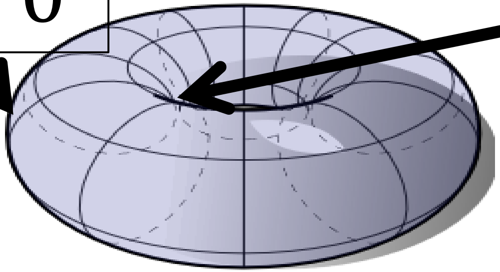


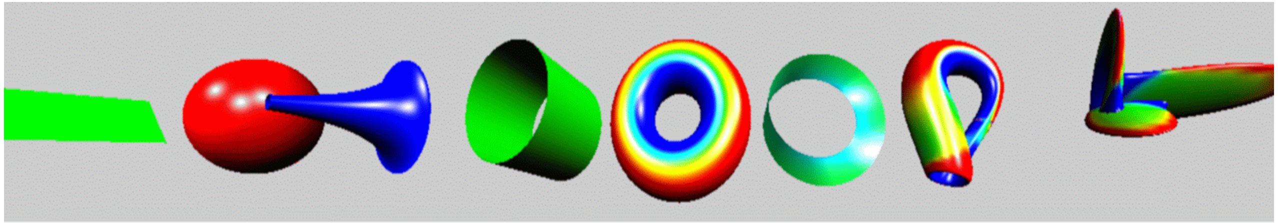


$K = 0$

$K > 0$

$K < 0$





Square Sphere Tractricoid Cylinder Torus Möbius Klein Boy

Gömbi geometria

$$\boxed{x^2 + y^2 + w^2 = R^2}$$

- Állandó pozitív görbület

$$K = 1/R^2$$

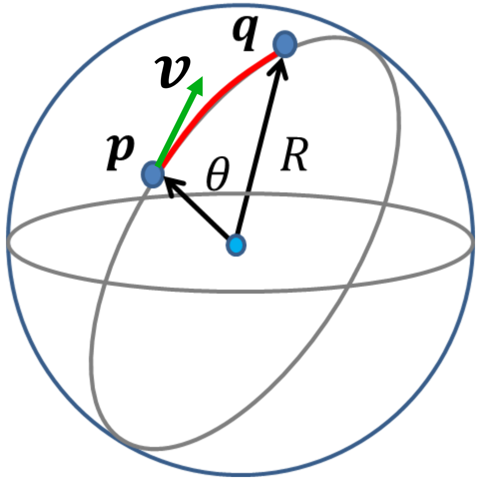
- Mi az egyenes? **főkör** = legrövidebb út

- Távolság? Ívhossz

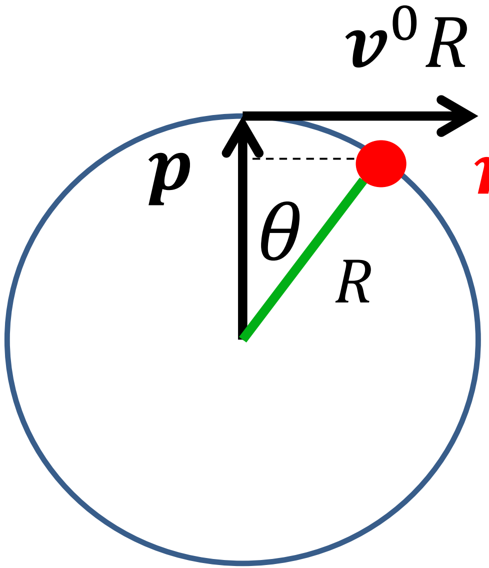
$$R\theta = \theta/\sqrt{K}$$

Euklidészi geometria axiómái nem jók:

1. Két pont **nem mindig** határoz meg egyértelműen egy egyenest.
2. Egy egyenesnek van legalább két pontja.
3. **Két egyenes mindig metszi egymást két pontban.**
4. Átmozgatható (egybevágó) dolgok mérete megegyező (homogén és izotróp).
5. A részek összege az egész mérete
6. …



Egyenes (Főkör) egyenlete



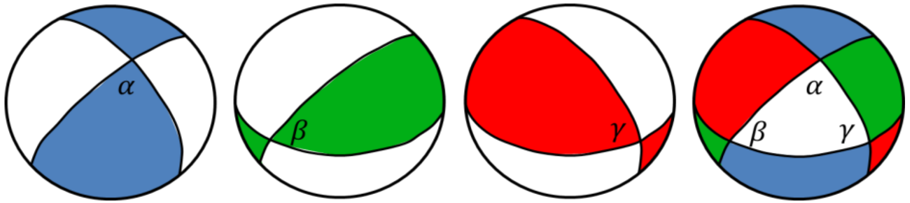
$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{p}\cos(\theta) + \boldsymbol{v}^0 R \sin(\theta)$$

$R\theta = t$ távolság egységsebességnél

$$\boxed{\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{p}\cos(t/R) + \boldsymbol{v}^0 R \sin(t/R)}$$

Elliptikus geometria

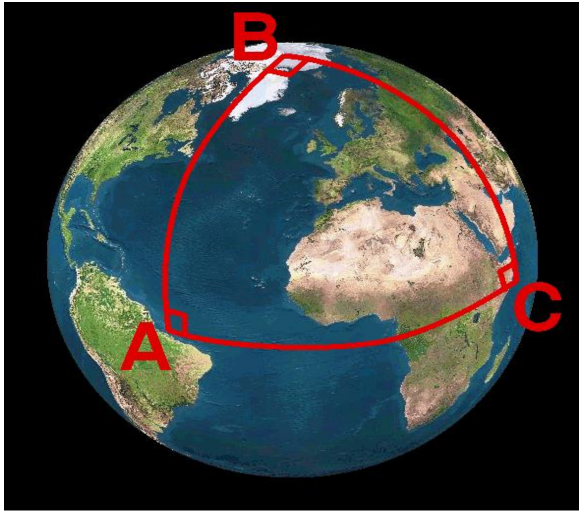
- Állandó pozitív görbület
- Egyenes=főkör=legrövidebb út
- Háromszög szögösszeg > π
  Háromszög területe:
  $$T = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)/K$$

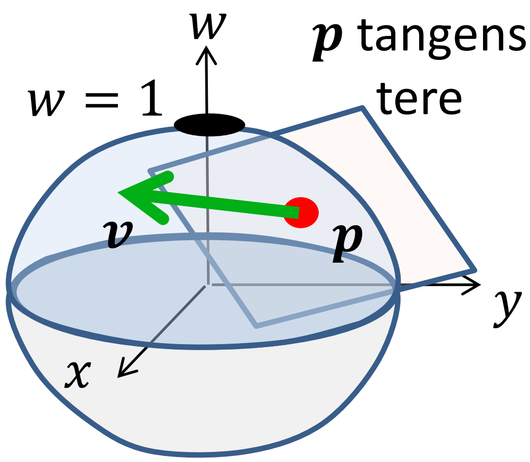


- Derékszögű háromszög:
  $$a^2 + b^2 > c^2$$

Csak a párhuzamossági axióma nem jó:

1. Két pont **(=átmérő)** meghatároz egy egyenest **(=geodétikus, főkör)**.
2. Egy egyenesnek van legalább két pontja.
3. **Két egyenes mindig metszi egymást egy pontban (=átmérő).**
4. Átmozgatható (egybevágó) dolgok mérete megegyező (homogén és izotróp)
5. A részek összege az egész mérete
6. …





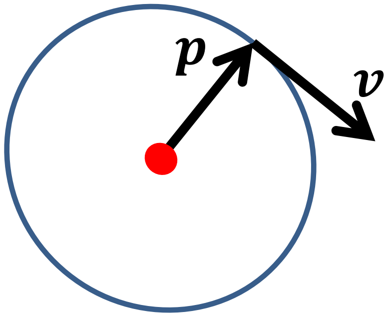
Gömbi/elliptikus geometria

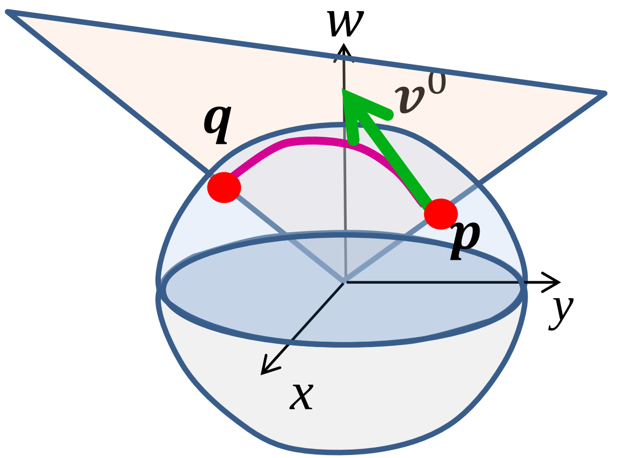
<u>Skaláris szorzás</u> az euklideszi ambiens térben:

$$\boxed{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + w_1 w_2}$$

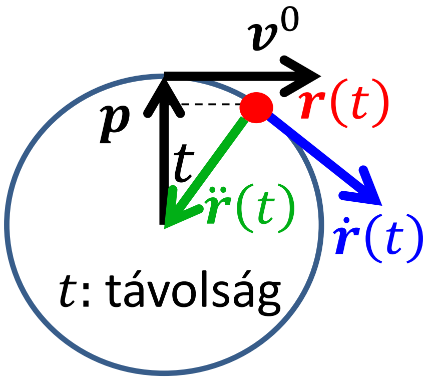
<u>Ambiens tér elemei:</u>

- **<u>Pontok:</u>** $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p} = 1,\ x^2 + y^2 + w^2 = 1$
- **<u>Vektorok a $\boldsymbol{p}$ pontban</u>:** $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} = 0$
    - A vektorok mások a tér különböző pontjaiban
    - A vektor a pont tangens terének eleme





Egyenes



Egységsebességű mozgás:

$$\boxed{\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{p}\cos t + \boldsymbol{v}^0 \sin t}$$

Gömbi kombináció (slerp):

$$\boldsymbol{r}(td) = \boldsymbol{p}\frac{\sin(1-t)d}{\sin d} + \boldsymbol{q}\frac{\sin td}{\sin d}$$

- **Gömbön marad:**

  $$\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}\cos^2 t + \boldsymbol{v}^0\cdot\boldsymbol{v}^0 \sin^2 t + 2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}^0 \sin t\cos t = 1$$

- **Egységsebességű mozgás**:

  $$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = -\boldsymbol{p}\sin t + \boldsymbol{v}^0\cos t,\quad \dot{\boldsymbol{r}}(t)\cdot\dot{\boldsymbol{r}}(t) = 1$$

- Ambiens tér **(origó, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$) síkjának** és a geometria metszete
- **Gauss görbület**: $\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = -\boldsymbol{r}(t) \quad\Rightarrow\quad K = \ddot{\boldsymbol{r}}_{min}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_{max} = 1$

Távolság

Távolság $d(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$: egységsebességű egyenesvonalú mozgás ideje:

$$\boldsymbol{r}(d) = \boldsymbol{p}\cos d + \boldsymbol{v}^0 \sin d = \boldsymbol{q}$$

$$\boxed{d(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \arccos(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p})}$$

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}\cos d + \boldsymbol{v}^0\cdot\boldsymbol{p}\sin d = \cos d = \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}$$

Kör implicit egyenlete:

$$R = d(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c}) = \arccos(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}) \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c} = \cos R}$$

Egy jó térkép …

- Euklideszi
- Valódi helyek és utak
  - Egy-egy értelmű folytonos leképzés
- Orientáció (jobbra/balra) valódi

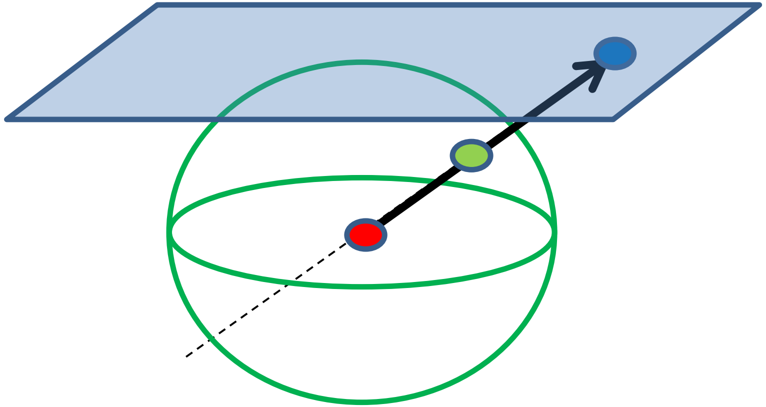
Topológiai hasonlóság

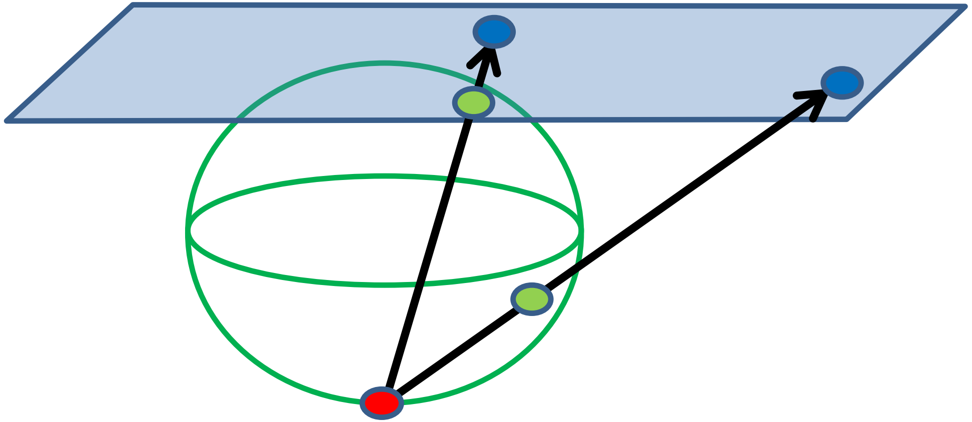
- Valódi egyenes/kör annak látszik
- Szögtartó
- Távolságarány tartó
- Területarány tartó

Gauss görbület megegyezik

Geometriai hasonlóság

Gömb vetítése a síkra





Középpontos vetítés

- Csak a felső félgömböt
- Egyenestartás: tárgy és vetítősugarak egy síkban, vetület ennek és a képsíknak a metszete
- Nem kör-, szög- és távolságtartó
- Beltrami-Klein

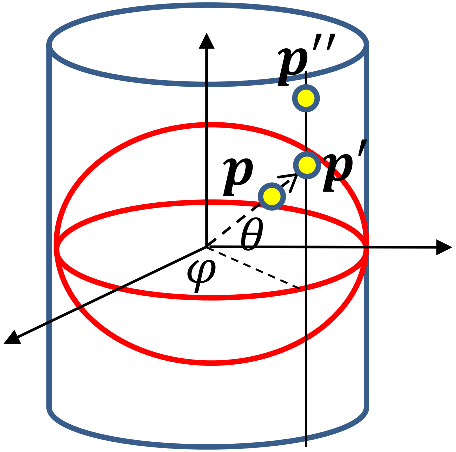
Sztereografikus vetítés

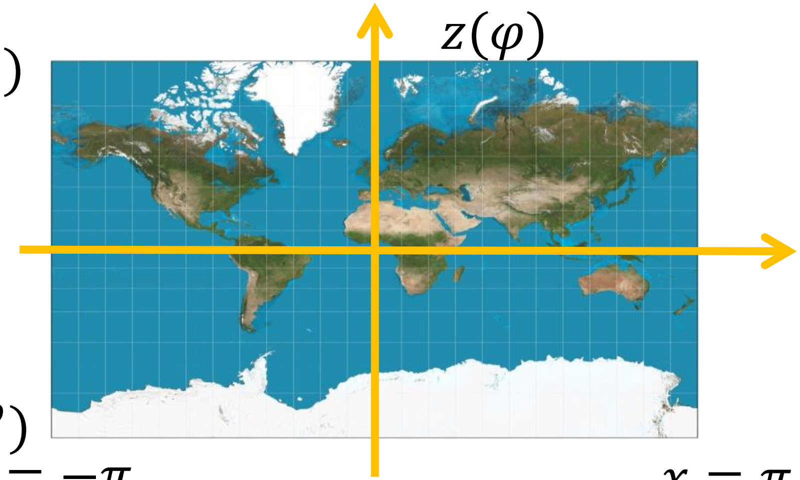
- A déli pólus kivételével egészet
- Nem egyenestartó
- Körtartó és szögtartó
- Nem távolságtartó
- Beltrami-Poincaré

(Gerardus) Mercator térkép

- **Szögtartó**, de torzítja a távolságot és területet

φ = hosszúság
θ = szélesség



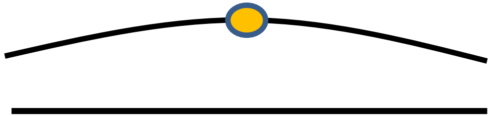


$$x = \varphi$$
$$z = \log\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right)$$

Homogén/izotróp geometriák

Gömb

Elliptikus geometria axiómák

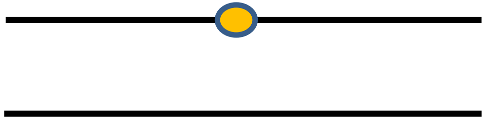


0 nem metsző egyenes

$$K > 0$$

Sík

Euklideszi geometria axiómák

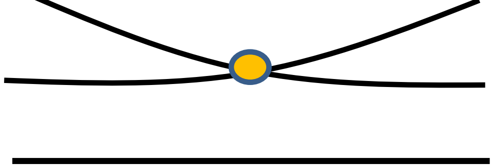


1 nem metsző egyenes

$$K = 0$$

???

Hiperbolikus geometria axiómák



több nem metsző egyenes

$$K < 0$$

Hiperbolikus (Bolyai) geometria

- Állandó negatív görbület
- Egyenes = legrövidebb út
- Háromszög szögösszeg < π
- Háromszög területe:

$$T = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)/K$$

- Derékszögű háromszög:

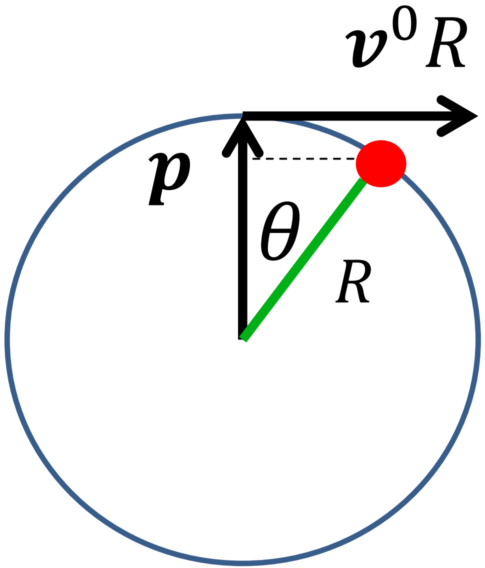
$$a^2 + b^2 < c^2$$

<u>Hiperbolikus geometria axiómái:</u>

1. Két pont meghatároz egy egyenest.
2. Egy egyenesnek van legalább két pontja.
3. **Egy egyeneshez egy rajta kívül fekvő ponton át <u>több</u> nem metsző egyenes húzható.**
4. Átmozgatható (egybevágó) dolgok mérete megegyező (homogén és izotróp).
5. A részek összege az egész mérete
6. …

- Homogén, izotróp: Minden pontban, minden irányban az érintőkör sugara és „völgység” állandó.
- Görbület = két ugyanolyan vektor skalárszorzata
- Gömb, ahol a sugár négyzete negatív szám

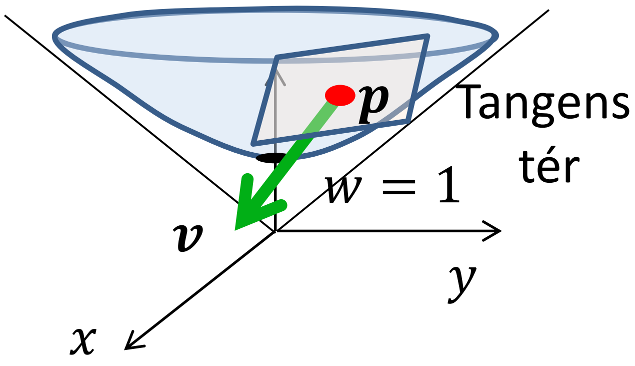
Egyenes egyenlete



$$\boxed{\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{p}\cos(t/R) + \boldsymbol{v}^0 R\sin(t/R)}$$

$$1/K = R^2 = -1 \quad \rightarrow \quad R = i$$

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{r}(t) &= \boldsymbol{p}\cos(t/i) + \boldsymbol{v}^0 i\sin(t/i)\\ &= \boldsymbol{p}\cosh(t) + \boldsymbol{v}^0\sinh(t)\end{aligned}}$$



Hiperbolikus geometria

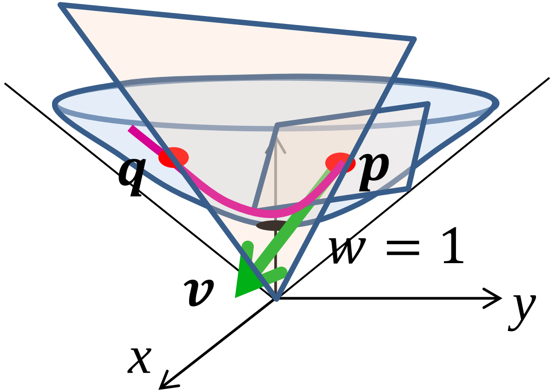
Skaláris szorzás Lorentz szorzat:

$$\boxed{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 - w_1w_2}$$

Ambiens tér: Minkowski tér

Ambiens tér elemei:

- **Pontok:** $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p} = -1,\ x^2 + y^2 - w^2 = -1$ és $w \geq 0$
- **Vektorok a $\boldsymbol{p}$ pontban:** $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} = 0$
    - A vektorok mások a tér különböző pontjaiban
    - A vektor a pont tangens terének eleme



Egyenes

Egységsebességű mozgás: $\boxed{\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{p}\cosh t + \boldsymbol{v}^0 \sinh t}$

Hiperbolikus kombináció: $\boldsymbol{r}(td) = \boldsymbol{p}\dfrac{\sinh(1-t)d}{\sinh d} + \boldsymbol{q}\dfrac{\sinh td}{\sinh d}$

- **Hiperboloidon marad:**

$$\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}\cosh^2 t + \boldsymbol{v}^0\cdot\boldsymbol{v}^0 \sinh^2 t + 2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}^0 \sinh t \cosh t = -1$$

- **Egységsebességű mozgás**:

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{p}\sinh t + \boldsymbol{v}^0 \cosh t$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t)\cdot\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}\sinh^2 t + \boldsymbol{v}^0\cdot\boldsymbol{v}^0 \cosh^2 t + 2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}^0 \sinh t \cosh t = 1$$

- Ambiens tér **(origó, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$) síkjának** és a geometria metszete
- **Gauss görbület**: $\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{r}(t) \quad \Rightarrow \quad K = \ddot{\boldsymbol{r}}_{min}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}_{max} = -1$

Távolság

Távolság $d(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$: egységsebességű egyenesvonalú mozgás ideje:

$$\boldsymbol{r}(d) = \boldsymbol{p}\cosh d + \boldsymbol{v}^0 \sin d = \boldsymbol{q}$$

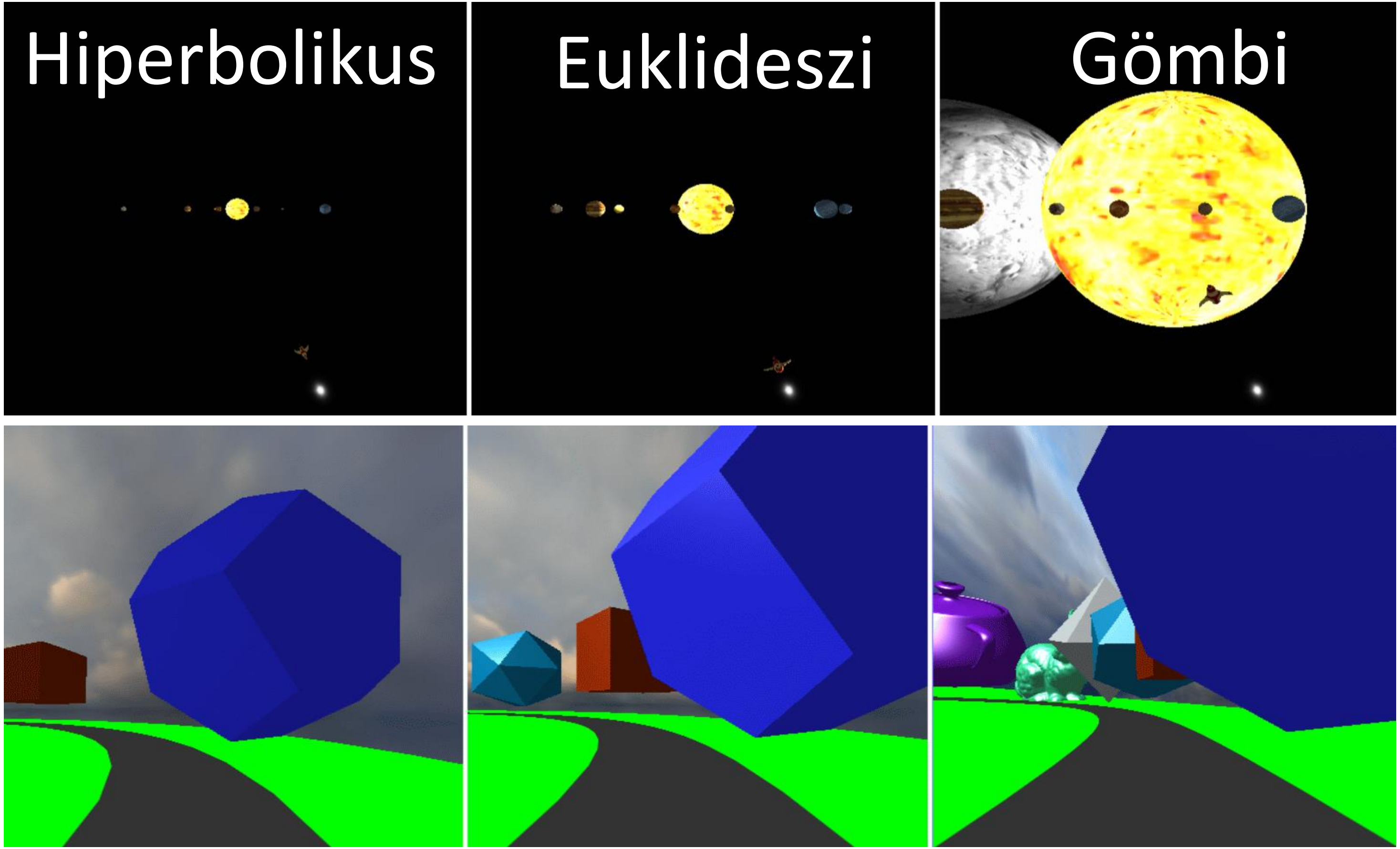
$$\boxed{d(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \operatorname{arccosh}(-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p})}$$

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}\cosh d + \boldsymbol{v}^0\cdot\boldsymbol{p}\sinh d = -\cosh d = \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}$$

Kör implicit egyenlete:

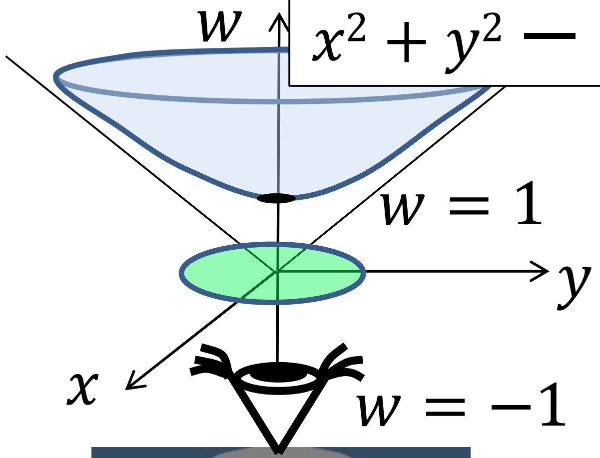
$$R = d(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c}) = \operatorname{arccosh}(-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}) \;\rightarrow\; \boxed{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c} = -\cosh R}$$

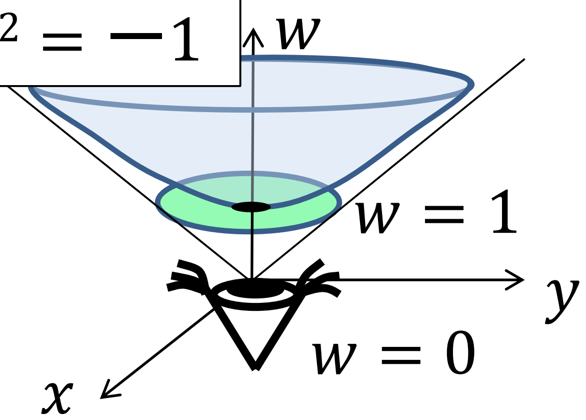
Összehasonlítás

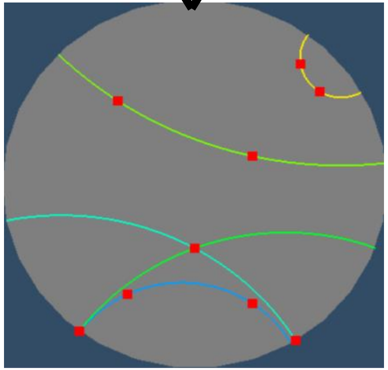


Beltrami – Poincaré/Klein diszk

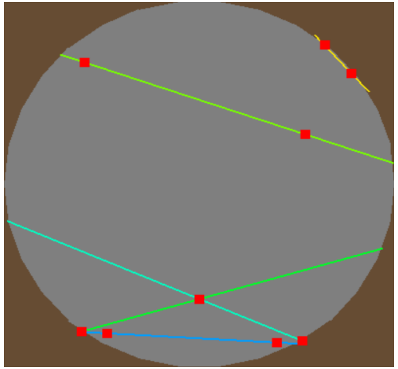
$$x^2 + y^2 - w^2 = -1$$



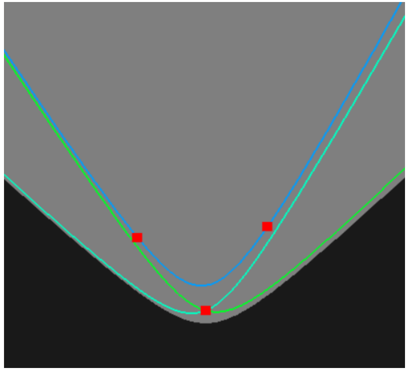




Poincaré: Szög és körtartó,
egyenes = alapkörre merőleges körív



Klein: Egyenestartó

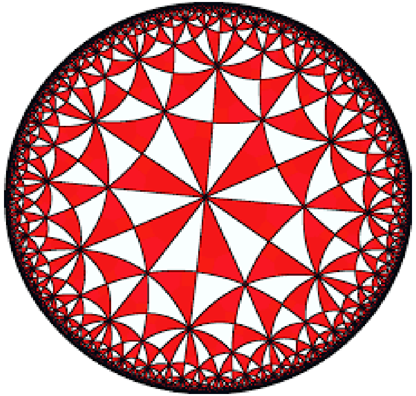


Minkowski tér

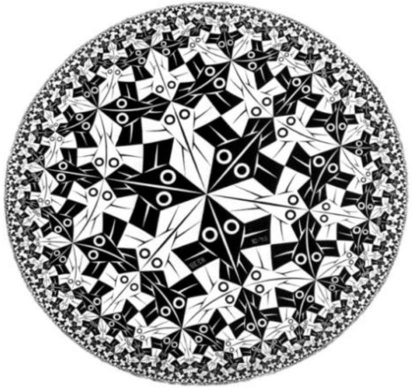
Ez egy gömb!

Escher és a Poincaré diszk

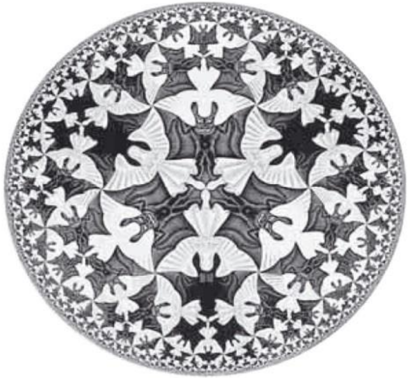
Circle limit III

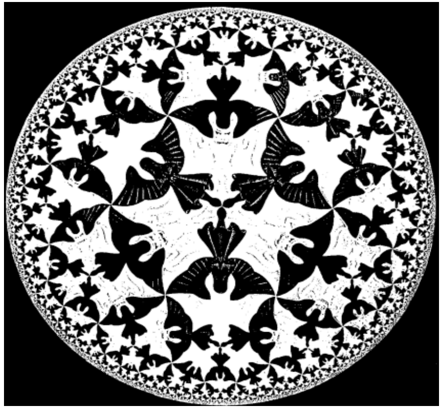


Circle limit I



Circle limit IV





vec4 műveletek

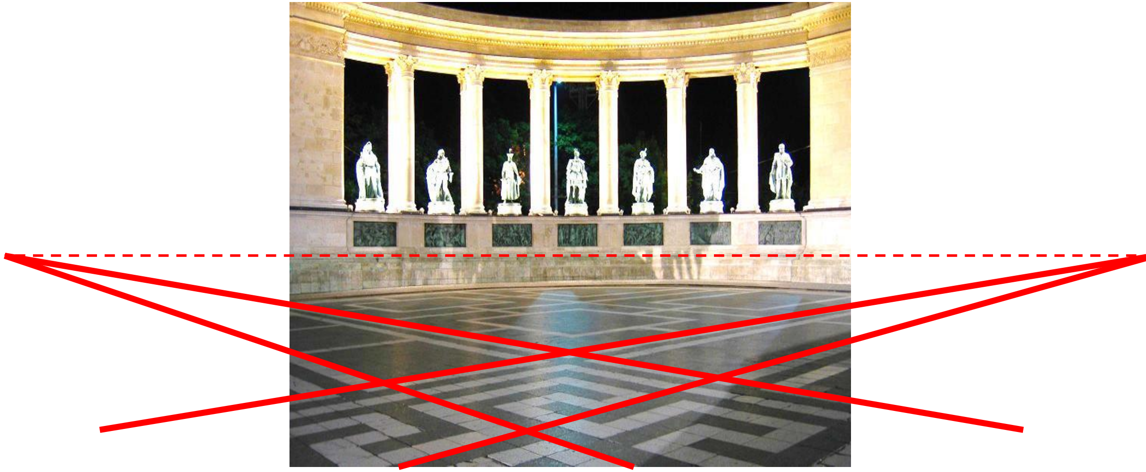
```
float s = 1; // 1: Euclidean; -1: Minkowski

float dot(vec4 a, vec4 b) { // affects length and normalize
  return a.x * b.x + a.y * b.y + a.z * b.z + s * a.w * b.w;
}

float length(vec4 v) { return sqrtf(dot(v, v)); }

vec4 normalize(vec4 v) { return v * 1/length(v)); }

vec4 lerp(vec4 p, vec4 q, float t) { return p * (1-t) + q * t; }

vec4 slerp(vec4 p, vec4 q, float t) {
  float d = acos(dot(p, q)); // distance
  return p * (sin((1-t) * d) / sin(d)) + q * (sin(t * d) / sin(d));
}

vec4 hlerp(vec4 p, vec4 q, float t) {
  float d = acosh(-dot(p, q)); // distance
  return p * (sinh((1-t) * d) / sinh(d)) + q * (sinh(t * d) / sinh(d));
}
```

Projektív geometria

- A „végtelen” is része a síknak
- Nincsenek párhuzamosok
- Programozási előny: nincs szingularitás és speciális eset
- Descartes és polár (és bármilyen távolsági) koordináták nem jók
- Az árnyék vagy a skála nélküli vonalzó geometriája

Projektív geometria axiómái:

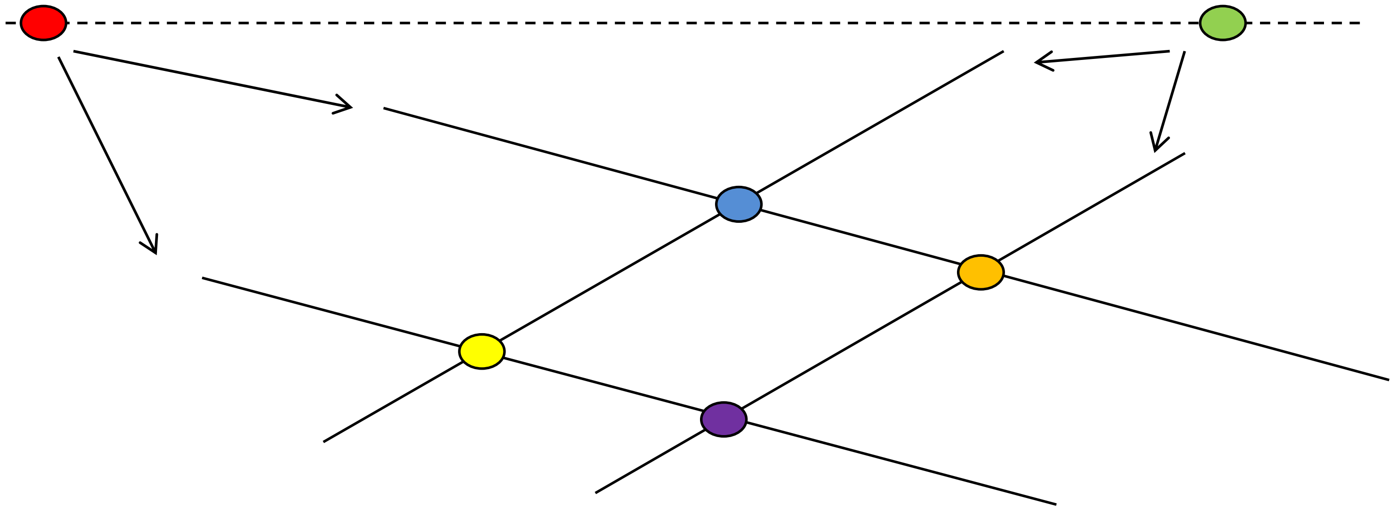
1. Két pont meghatároz egy egyenest.
2. Egy egyenesnek van legalább két pontja.
3. **Két egyenes pontosan egy pontban metszi egymást**



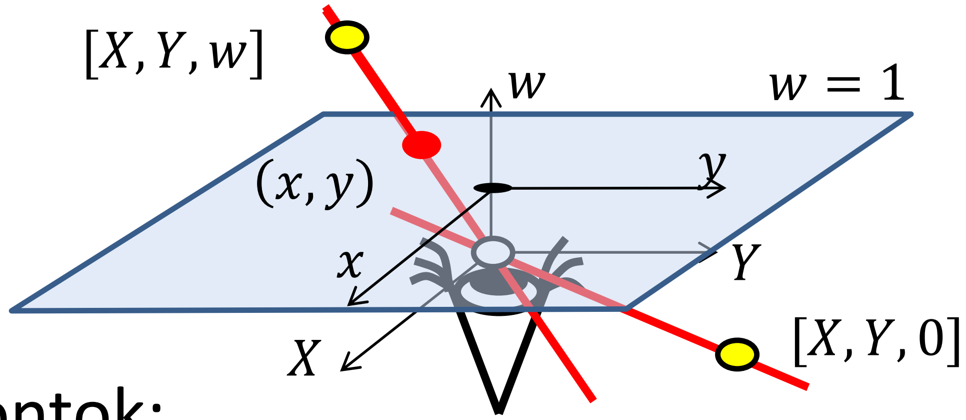
Euklideszi → Projektív sík

<u>Projektív geometria axiómái:</u>

1. Két pont meghatároz egy egyenest.
2. Egy egyenesnek van legalább két pontja.
3. **Két egyenes pontosan egy pontban metszi egymást**



Projektív sík analitikus geometriája



Euklideszi pontok:

$$(x, y) \rightarrow [x, y, 1] \sim [x \cdot w, y \cdot w, w] = [X, Y, w]$$

Homogén osztás: $x = \dfrac{X}{w}, \;\; y = \dfrac{Y}{w}$

$\boxed{w \neq 0}$

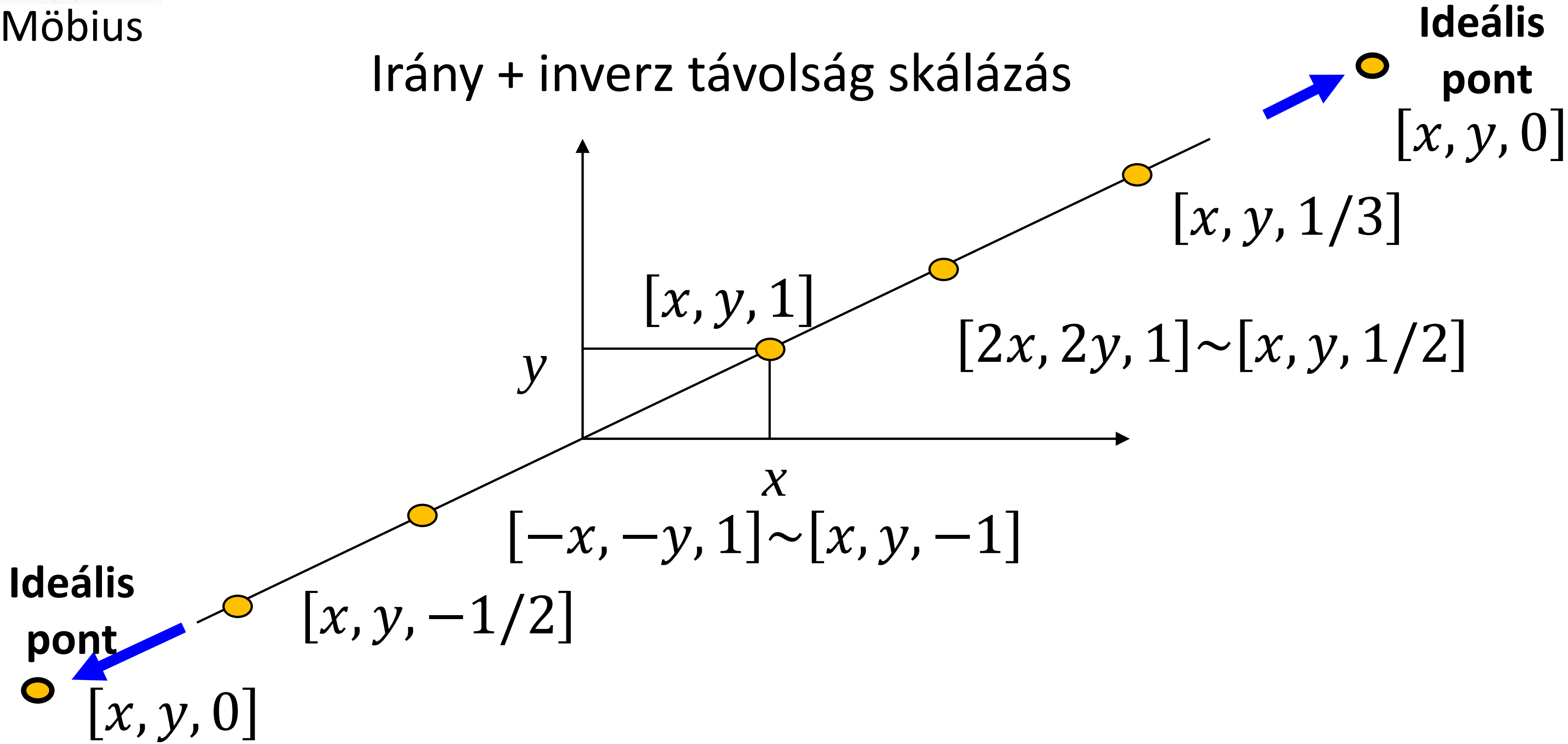
Ideális pontok:

$[X, Y, 0]$

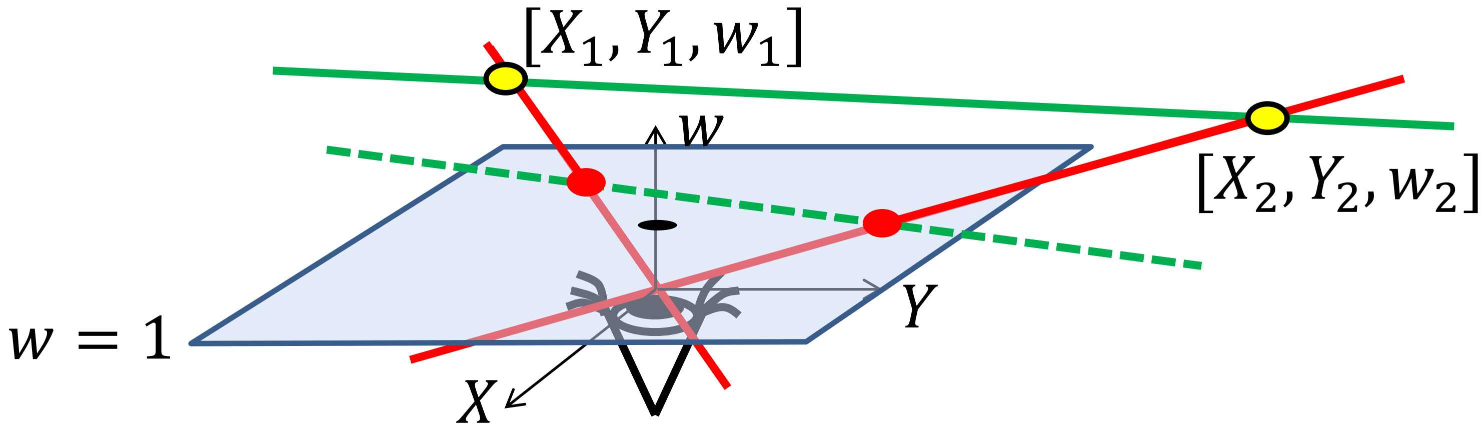
Möbius

Homogén koordináták

Irány + inverz távolság skálázás



Projektív egyenes parametrikus egyenlete



$$[X(t), Y(t), w(t)] = [X_1, Y_1, w_1](1 - t) + [X_2, Y_2, w_2]t$$

Egyenes implicit egyenlete

- Euklideszi egyenes, Descartes koordináták:

$$n_x x + n_y y + d = 0$$

- Euklideszi egyenes, homogén koordináták:

$$n_x X/w + n_y Y/w + d = 0 \qquad w \neq 0$$

- Projektív egyenes:

$$\boxed{n_x X + n_y Y + dw = 0} \qquad w \cancel{\neq} 0$$

Pont: sorvektor $\quad [X, Y, w]\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ d \end{bmatrix} = 0$ Egyenes: oszlopvektor

Dualitás

- Ha egy tétel pontok és egyenesek viszonyáról szól, akkor a pont és egyenes felcserélhetők benne.
- 2D pont: 3 elemű sorvektor, homogén
  - 2D projektív sík pont $\sim$ 3D euklideszi tér origót metsző egyenes
- 2D egyenes: 3 elemű oszlopvektor, homogén
  - 2D projektív sík egyenes $\sim$ 3D euklideszi tér origót metsző egyenes
- **2D egyenes egyenlete**:

$$\boxed{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{l} = 0}$$

  - 2D pont 3D vektora merőleges a 2D egyenes 3D vektorára

Metszés és illeszkedés

- $\boldsymbol{p}_1$ ***és*** $\boldsymbol{p}_2$ ***pontra illeszkedő*** $\boldsymbol{l}$ ***egyenes***:

$$\boxed{\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{l} = 0, \;\; \boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{l} = 0 \;\rightarrow \boldsymbol{l} = \boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{p}_2}$$

$$\boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{p}_1 \qquad\qquad \boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{p}_2$$

- $\boldsymbol{l}_1$ ***és*** $\boldsymbol{l}_2$ ***egyenes*** $\boldsymbol{p}$ ***metszéspontja***:

$$\boxed{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{l}_1 = 0, \qquad \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{l}_2 = 0 \;\rightarrow \boldsymbol{p} = \boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2}$$

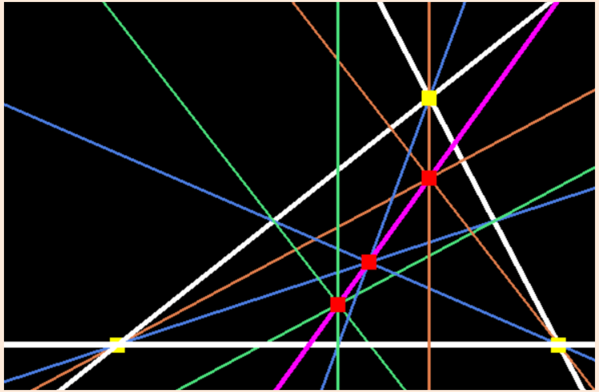
$$\boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{l}_1 \qquad\qquad \boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{l}_2$$

- $\boldsymbol{p}$ **ponton átmenő** $\boldsymbol{L}$ **egyenesre merőleges** $\boldsymbol{l}$ **egyenes** ($\boldsymbol{L}^* = \boldsymbol{L}$-ből a w törlése)

$$\boxed{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{l} = 0, \;\; \boldsymbol{l}_X \boldsymbol{L}_X + \boldsymbol{l}_Y \boldsymbol{L}_Y = \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{L}^* = 0 \;\rightarrow \boldsymbol{l} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L}^*}$$

Euler egyenes

```
vec3 v[0] = vec3(x0,y0,1), v[1] = vec3(x1,y1,1), v[2] = vec3(x2,y2,1);
m[2] = v[0] + v[1]; // midpoints
m[0] = v[1] + v[2];
m[1] = v[2] + v[0];
e[0] = cross(v[1], v[2]); // edges
e[1] = cross(v[2], v[0]);
e[2] = cross(v[0], v[1]);

for (int i = 0; i < 3; i++) {
    median[i]   = cross(v[i], m[i]);
    altitude[i] = cross(v[i], vec3(e[i].x, e[i].y, 0));
    bisector[i] = cross(m[i], vec3(e[i].x, e[i].y, 0));
}
centroid     = cross(median[0], median[1]);
orthocenter  = cross(altitude[0], altitude[1]);
circumcenter = cross(bisector[0], bisector[1]);
euler = cross(centroid, circumcenter); // Euler's line
```



Projektív tér homogén koordinátákkal

- Euklideszi pontok: $(x, y, z) \to [x, y, z, 1] \sim [x \cdot w, y \cdot w, z \cdot w, w] = [X, Y, Z, w]$
- Homogén osztás: $x = \frac{X}{w},\ \ y = \frac{Y}{w},\ \ z = \frac{Z}{w}$
- Ideális pontok: $[X, Y, Z, 0]$
- Egyenes paraméteres egyenlete:
$$[X(t), Y(t), Z(t), w(t)] = [X_1, Y_1, Z_1, w_1](1 - t) + [X_2, Y_2, Z_2, w_2]t$$
- Sík implicit egyenlete:
$$n_x X + n_y Y + n_z Z + dw = 0$$

Pont/Sík/RGBA osztály

```
struct vec4 {
   float x, y, z, w;

   vec4(float x0, float y0, float z0, float w0) {
        x = x0; y = y0; z = z0, w = w0;
   }

   vec4(vec3 v) { x = v.x; y = v.y; z = v.z, w = 1; }  // Euk->Proj

   operator vec3() { return vec3(x/w, y/w, z/w); }      // Proj->Euk
};

float dot(vec4 a, vec4 b) { // point and plane
   return a.x * b.x + a.y * b.y + a.z * b.z + a.w * b.w;
}

vec4 lerp(vec4 p, vec4 q, float t) { return p * (1 - t) + q * t; }
```