# SUGÁRKÖVETŐ ALGORITMUSOK ÁTLAGOS BONYOLULTSÁGÁNAK VIZSGÁLATA

KANDIDÁTUSI ÉRTEKEZÉS
TÉZISEI

ÍRTA:
Márton Gábor

ASPIRÁNSVEZETŐ:
Dr. Risztics Péter
A MŰSZAKI TUDOMÁNY KANDIDÁTUSA

BME Folyamatszabályozási Tanszék
1995

# I. Célkitűzések

A sugárkövetéses módszer (ray tracing) az egyik legnépszerűbb képszintézis eljárás, amely nem csak arról ismert, hogy lehetőségei egyedülállóak különféle optikai jelenségek modellezésében, hanem arról is, hogy — eleganciája következtében — megvalósítása viszonylag egyszerű. Másrészről viszont ugyancsak egyedülálló ez a módszer a számítástechnikai erőforrásigényét tekintve is, aminek következtében úgy is emlegetik mint a leglassabb képszintézis eljárást. Gyorsítása örökzöld téma: egyrészt a számítógépes grafika keretein belül számos gyorsítási módszert dolgoztak ki, ezeket nevezhetjük *klasszikus* módszereknek, másrészt pedig, újabban, az algoritmus elméletből és diszkrét geometriából kifejlődött *algoritmikus geometria* (computational geometry) kutatói is számos új módszert javasoltak.

Ha valaki "a világ leggyorsabb sugárkövető programját" szeretné megalkotni, akkor ehhez először egy olyan gyorsítási *stratégiát* kellene találnia, amelyről már előre látható, más szóval elméleti úton igazolható, hogy érdemes az implementációs részletekkel, azaz a *taktikai* kérdésekkel foglalkozni. Az elméleti alapot az ilyen vizsgálatokhoz az algoritmus elmélet módszerei kínálják. Úgy tűnik, legalábbis jelenleg, hogy egy algoritmus sebességének "szabványos" mérőszáma a *legrosszabb esetre vett* válaszidő *aszimptotikus* viselkedése nagyon nagy méretű bemenetekre vonatkozóan.

Ha erről az elméleti alapról indulva összehasonlítjuk a különböző gyorsítási módszereket, akkor nagy csalódás ér bennünket a csaknem használhatatlan eredmények láttán: a sugárkövetés klasszikus technikái a lehető legrosszabb jellemzést kapják, az algoritmikus geometria eredményei pedig, amelyek között a legrosszabb esetre vonatkozóan optimális algoritmusok is vannak, nagy előfeldolgozási idővel társulnak. Nem tudunk tehát dönteni. Az intuíció ugyanakkor azt súgja, hogy a klasszikus módszerek méltatlanul rossz jellemzést kaptak, hiszen azok a "legrosszabb esetek", amelyek alapján azokat az utolsó helyre soroltuk be, csak elenyészően "kevesen vannak", azaz "átlagos esetben" ezek az algoritmusok vetekednek, ha ugyan nem jobbak, elméletileg jobban megalapozott társaiknál. Két kihívással találjuk így szemben magunkat: (1) a klasszikus algoritmusoknak egy olyan kvantitatív vizsgálatára lenne szükség, amely alkalmas azok viselkedését átlagos esetre vonatkozóan megadni, és így ezen módszereket az őket megillető helyre besorolni; (2) az algoritmikus geometriai kutatások által javasolt módszerekkel társuló előfeldolgozási időket oly mértékben kellene lecsökkenteni, hogy így ezek a módszerek a gyakorlatban is megvalósíthatók legyenek.

Értekezésemben az (1) kihívásra igyekeztem választ adni. Ehhez az alábbi főbb célokat tűztem ki:

1. Az átlagos bonyolultság vizsgálatokhoz egy általános elméleti keret megalkotása, és abban az átlagos esetre vett bonyolultsági mértéknek a lehető legáltalánosabb alakban való felírása. Ugyanezen általános keretben, lehetőség szerint, az ily módon nyerhető eredmények értelmezése.

2. A sugárkövetés gyorsítására szolgáló algoritmusok elemzésének elhelyezése ebben az elméleti keretben. Lényegében tehát egy modellt kell alkotni a további vizsgálatok számára. Ez, mint látni fogjuk, a paraméter tér és az azon feltételezett eloszlás megnevezését jelenti.

3. A sugárkövetés gyorsítására kidolgozott klasszikus módszerek átlagos bonyolultságának vizsgálata a feltételezett modell mellett. Ennek keretében meg kell becsülni azon eleminek tekinthető műveletek számát, amelyek a válaszidőt alapvetően meghatározzák. Ezek: tetszőleges kiküldött sugár esetében az algoritmusok által végrehajtott metszéspont-vizsgálatok átlagos száma, valamint térháló módszerek esetében a celláról cellára lépések átlagos száma.

4. Az algoritmusok előfeldolgozási idejének és tárigényének részletes vizsgálatára egy lehetséges út kijelölése a feltételezett modell mellett.

# II. Vizsgálati módszerek

Az értekezésben alapvetően deduktív utat követtem: először a lehető legáltalánosabban igyekeztem megfogalmazni, hogy algoritmusok átlagos bonyolultságának vizsgálata milyen közös elméleti alapon nyugszik (2.1. fejezet), ezután megmutattam, hogy a sugárkövető algoritmusok speciális esete ebben a keretben hogyan tárgyalható (2.3. fejezet), végül pedig a konkrét számítási lépések következtek (3., 4.6. és 5. fejezetek).

Az általános elméleti keret megalkotását azért tartottam szükségesnek, mert egyrészt nem találkoztam még hasonlóval a szakirodalomban, másrészt pedig azért, mert abból, még legabsztraktabb szintjén, viszonylag egyszerűen levezethető egy az ilyen típusú eredmények értelmezését megadó általános összefüggés (2.1.3. fejezet). Az általános keret megfogalmazásához induktív lépés vezetett egy egyszerű probléma vizsgálata alapján, és ezt a lépést az értekezésből sem akartam kihagyni (2.1.1. fejezet).

Az átlagos bonyolultságot jellemző mutatók várható értékeinek meghatározása (metszéspont vizsgálatok és cella-lépések várható száma) meglehetősen bonyolult integrálok kiértékelését igényli. Ezért többször is kellett olyan egyszerűsítésekhez folyamodni, amelyek biztosították, hogy a vizsgálatok matematikailag egyáltalán véghezvihetők legyenek. Az alkalmazott egyszerűsítések hatását minden esetben megbecsültem. Ennek érdekében a kiszámítandó mennyiségre alsó és felső becslést adtam. A kifejezések tömörsége érdekében azokban skalár mennyiségek mellett valós számintervallumokat is szerepeltettem; ezekre az intervallum aritmetika szabályai érvényesek.

Az értekezés keretében végzett vizsgálatok eredményei nem csak a háromdimenziós térre, hanem a kétdimenziós síkra vonatkozóan is érdekesek lehetnek. Annak érdekében, hogy a levezetett összefüggések mindkét esetre egyaránt érvényesek legyenek, azokat általános dimenziószámra adtam meg ($d = 2, 3$). Ennek "melléktermékeként" a képletek magasabb dimenziószámokra ($d > 3$) is helyesek; ennek a legtöbb helyen nincs gyakorlati jelentősége, vannak azonban az értekezésnek olyan pontjai, amelyek általános esetre is figyelemet érdemelhetnek (5.4. és 5.5. fejezetek).

Bár az algoritmusok átlagos előfelgolgozási idejének és tárigényének részletes vizsgálatára nem vállalkoztam, mégis bemutattam egy lehetséges módszer alapjait. Ezt az egyik vizsgált módszer ürügyén tettem meg: e módszer egy olyan általános, azaz a sugárkövetés speciális területén messze túl használható geometriai struktúrára épül, amelynek vizsgálatát nagy fontosságúnak éreztem, és ezért azt egy önállóan megálló fejezetben bemutattam (5. fejezet). Az itt bevezetett matematikai eszközök teremtik meg egyúttal a lehetőséget a többi módszer előfeldolgozási idejének és tárigényének az elemzésére; e vizsgálatokat magam nem végeztem el, de mindenütt utaltam a kiindulásként felhasználható gondolatra és a várható eredményre.

Az elméleti úton levezetett eredményeket szimulációs eredményekkel *illusztráltam*. Azért hangsúlyozom, hogy csupán illusztrációról és nem bizonyításról vagy alátámasztásról van szó, mert ezek az eredmények valóban nem is bizonyíthatják a következtetések helyességét, legfeljebb arról adhatnak tájékoztatást, hogy az alkalmazott modell mennyire helyénvaló.

# III. Tézisek

Minden tézist először egy mondatban, tömören megfogalmazok, egyes szám első személyben, majd azt pontokba szedve részletesebben is kifejtem, az értekezésben is használt többes szám első személyben.

## 1. tézis

*Az átlagos bonyolultság vizsgálatokhoz egy általános elméleti keretet alkottam, értelmezést adtam az ilyen típusú eredményekre, és speciális esetként elhelyeztem benne az értekezés későbbi tárgyát képező vizsgálatokat.*

**1.1.** Tegyük fel, hogy egy algoritmus az $o_1, \ldots, o_n, \ldots$ objektumokat dolgozza fel, és ezek az objektumok azonos típusúak, azaz ugyanazon *tér* különböző pontjaiként reprezentálhatók:

$$o_1, \ldots, o_n, \ldots \in \mathbf{O}, \tag{1}$$

ahol $\mathbf{O}$ az *objektum paraméter tér*. Ha az egyes objektumok különfélék is, ez az "egységes" paraméter tér mindig megkonstruálható mint az összes előforduló objektum paraméterek tere. Az $n$ számú objektum tetszőleges *konfigurációja* reprezentálható egy $n$-nessel, más néven konfiguráció vektorral:

$$(o_1, \ldots, o_n) \in \mathbf{O} \times \ldots \times \mathbf{O} = \mathbf{O}^n, \tag{2}$$

ahol $\mathbf{O}^n$ a *konfigurációs tér*.

Jelölje $t_n(o_1, \ldots, o_n)$ az algoritmus tetszőleges bonyolultsági mértékét az $o_1, \ldots, o_n$ bemeneti konfigurációra vonatkozóan (futási idejét vagy tárigényét). Ennek az összes lehetséges konfiguráció felett vett várható értéke, $\mathrm{E}[t(n)]$, azaz az algoritmus *átlagos bonyolultsága*, az alábbi kifejezéssel számítható:

$$\mathrm{E}[t(n)] = \int\limits_{o_1 \in \mathbf{O}} \cdots \int\limits_{o_n \in \mathbf{O}} t_n(o_1, \ldots, o_n)\, f_n(o_1, \ldots, o_n)\, do_1 \cdots do_n, \tag{3}$$

ahol $f_n(o_1, \ldots, o_n)$ az objektum konfigurációk súlyozására használt valószínűség sűrűség függvény.

**1.2.** A számítástudomány szabványos mérőszámát jelentő másik osztályozás, a *legrosszabb esetre* vonatkozó becslés ezzel szemben az alábbi függvényt veszi alapul:

$$t_{\max}(n) = \max_{o_1, \ldots, o_n \in \mathbf{O}} t_n(o_1, \ldots, o_n). \tag{4}$$

Még ha a kapott függvényeknek csak az *aszimptotikus viselkedését* tekintjük is, mint ahogyan az a számítástudományban szokásos, a kétféle becslés különböző eredményre vezethet. Ha például egy olyan esettel állunk szemben, amelyben az algoritmus legrosszabb esetre vett futási ideje $O(n^2)$, átlagos esetben azonban $O(n \log n)$ idő alatt fut le, akkor mit várhatunk ezen algoritmus valóságos futtatásakor? Erre a kérdésre a következő általános választ adhatjuk: tegyük fel, hogy algoritmusunk várható bonyolultságát a (3) összefüggésnek megfelelően kiszámítottuk! Ha $\mathrm{E}[t(n)]$ bonyolultsági osztályára az adódik, hogy

$$\mathrm{E}[t(n)] = O(F(n)), \tag{5}$$

akkor ebből az következik, hogy tetszőleges $G(n) \neq O(F(n))$ függvényre (azaz $F$-nél magasabb osztályú függvényre):

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{t_n(o_1,\ldots,o_n) \geq G(n)\} = 0, \tag{6}$$

feltéve, hogy az $o_1,\ldots,o_n$ objektumokat "a teszt során" ugyanazon $f_n(o_1,\ldots,o_n)$ valószínűség sűrűség függvény alapján választjuk ki, mint amilyet a várható érték számítása során figyelembe vettünk. Lényegében tehát azt állítjuk, hogy az algoritmus *mért* bonyolultságára *egyetlen* véletlen objektum sorozatra vonatkozóan a teszt hosszának növelésével *egyre inkább* az átlagos bonyolultság osztálya lesz jellemző, akkor is, ha az algoritmusnak a legrosszabb esetre vett bonyolultsága magasabb osztályú. Ez az állítás a *nagy számok gyenge törvényével* analóg. A kérdés, hogy a tétel élesíthető-e, és ha igen, akkor milyen feltételek mellett, a $\Pr\{t_n(o_1,\ldots,o_n) = O(F(n))\} = 1$ állítássá, amely a *nagy számok erős törvényével* lenne rokon, egyelőre nyitva marad.

**1.3.** A rekurzív sugárkövető algoritmus futási ideje az alábbi összefüggéssel jellemezhető:

$$T(n, L, P^2, D_{\max}) = O\left(P^2\,(2^{D_{\max}+1} - 1)\,(1 + L)\,Q(n)\right), \tag{7}$$

ahol $n$ a megjelenítendő objektumok száma, $L$ a fényforrások száma, $P^2$ a képpontok száma, $D_{\max}$ a maximális rekurziós mélység, $Q(n)$ pedig a metszéspont kereső eljárás válaszideje az objektumok számának függvényében (azaz azé az eljárásé, amely az egész algoritmus szíve: a bemenetekként megadott sugárhoz megtalálja az általa először metszett testet). Látszik, hogy a futási időt alapvetően $Q(n)$ határozza meg, hiszen a többi paraméter a színtér és a kívánt képminőség függvényei. A legrosszabb esetre vonatkozó vizsgálat azt mutatja, hogy a klasszikus algoritmusokra $Q(n) = O(n)$, ami a lehető legrosszabb (hiszen a naív keresés is ilyen válaszidejű).

A célul kitűzött vizsgálatokhoz, azaz $\mathrm{E}[Q(n)]$ meghatározásához először egy megfelelő konfigurációs teret és egy azon értelmezett eloszlást kell megneveznünk. Annak érdekében, hogy a számítások véghezvihetők legyenek, a következő feltételezésekkel élünk.

A színtér egybevágó, $r$ sugarú gömbökből áll. Ez nagy megszorítás, de a vizsgálatok a legfeljebb másodrendű primitívek (különböző sugarú gömbök, téglatest, henger, kúp) körére még viszonylag könnyen kiterjeszthetők; nem valószínű azonban, hogy azokat még tovább ki lehetne — és kellene — a későbbiekben terjeszteni. Az egyenlő sugarak feltételezése miatt az $\mathbf{O}$ objektum paraméter tér a gömbök lehetséges középpontjainak tere, tehát $\mathbf{O} \subseteq \mathbf{E}^3$ (általánosan: $\mathbf{O} \subseteq \mathbf{E}^d$).

Az átlagos bonyolultsági mértékek kiszámításához *egyenletes eloszlást* használunk az $\mathbf{O}^n$ konfigurációs térben. Emellett a választás mellett szól az, hogy (1) az egyenletes eloszlással a legkönnyebb általában számolni; (2) a valós színterek annyira sokfélék, hogy gyakorlatilag semmilyen *a priori* ismerettel nem rendelkezünk az eloszlásra vonatkozóan; (3) az egyenletes eloszlás feltételezésével kapott várható érték valójában egy olyan átlag, amely az összes lehetséges konfigurációt egyenlő súllyal veszi figyelembe, azaz *nincs kitüntetett konfiguráció*. Végül pedig, kifejezetten a könnyebb matematikai kezelhetőség érdekében, a véges $\mathbf{O}$ téren vett egyenletes eloszlás helyett ennek az egész $\mathbf{E}^3$ ($\mathbf{E}^d$) térre való kiterjesztését fogjuk használni, azaz a lehetséges konfigurációkat (a gömbök középpontjainak halmazát) egy $\rho$ intenzitású homogén Poisson pontfolyamattal modellezzük.

## 2. tézis

*Elvégeztem a sugárkövetés gyorsítására kidolgozott klasszikus módszerek átlagos bonyolultságának vizsgálatát a feltételezett modell mellett, azaz megbecsültem egy tetszőleges kiküldött sugár esetében az algoritmusok által végrehajtott metszéspont-vizsgálatok átlagos számát, valamint térháló módszerek esetében a celláról cellára lépések átlagos számát.*

A következőkben a levezetett összefüggéseket, a könnyebb olvashatóság érdekében, a $d = 3$ helyettesítéssel közlöm.[1]

**2.1.** Az összes vizsgált algoritmus lépésszámát alapvetően befolyásolja az, hogy a kiküldött sugár mentén az *első* metszéspont milyen távol van a sugár kezdőpontjától. Jelölje e távolságot $t^*$, mely nyilván valószínűségi változó! Némi egyszerűsítés után lehetővé válik e változó valószínűség sűrűség függvényének felírása:

$$f_{t^*}(\tau) = \rho\, r^2 \pi\, e^{-\rho\, r^2 \pi\, \tau}. \tag{8}$$

A későbbi számítások során mindvégig ezt az összefüggést használjuk, azonban tudjuk, hogy az említett egyszerűsítés következtében mindazon várható értékek, amelyeket ennek alapján számítunk ki, csak az

$$\left[e^{-\rho\, 4 r^3 \pi / 3}, 1\right] \tag{9}$$

szorzóval korrigálva érvényesek. Ez a korrekciós intervallum a gyakorlatilag szóba jövő esetekben egyébként elég szűk, hiszen alsó határa lényegében annak valószínűsége, hogy a sugár kezdőpontja nem esik valamelyik test belsejébe, és értéke közel van az 1-hez.

**2.2.** A későbbiekben megvizsgált összes módszernek van egy közös tulajdonsága, nevezetesen az, hogy a metszéspont keresésekor az objektumokat a sugár kezdőpontjától való *távolságuk szerint sorban* veszik, vagy legalább is e *sorrendet nem nagyon permutálják*. Tekintsünk ezért most egy olyan képzeletbeli algoritmust, amely a kereséskor az objektumokat pontosan a sugár kezdőpontjától vett távolságuk szerint veszi sorba (egybevágó gömbök esetén e távolság lehet a kezdőpont és a gömb középpontjának távolsága): először megvizsgálja a kezdőponthoz legközelebbit; ha a sugár ezt metszi, akkor megáll,

[1] A kifejezésekben megjelenő $[a, b]$ jelölés az $\{x \in \mathbf{R} \mid a \le x \le b\}$ valós számintervallumot jelenti. Algebrai kifejezésekben egy egységként kezelve rá az *intervallum aritmetika* szabályai érvényesek: ha $\circ$ valós számpárokon értelmezett művelet $(+, -, \cdot, /)$, akkor ennek *intervallum kiterjesztése*:

$$[a_1, b_1] \circ [a_2, b_2] = \{x_1 \circ x_2 \mid a_1 \le x_1 \le b_1, a_2 \le x_2 \le b_2\},$$

a kivonás esetében például a szabály a következő: $[a_1, b_1] - [a_2, b_2] = [a_1 - b_2, b_1 - a_2]$.

egyébként pedig veszi a második legközelebbit, és így tovább, egészen az első metszéspont megtalálásáig! Ha e vizsgálatok számát $N_{\mathrm{M}}$ jelöli, akkor:

$$\mathrm{E}\left[N_{\mathrm{M}}\right] \in \frac{\rho\, 4r^3\pi/3}{(\rho\, r^3\pi)^d}\, e^{\rho\, r^3\pi}\Gamma\left(4, \rho\, r^3\pi\right) - [0,1]\,\rho\, 4r^3\pi/3, \tag{10}$$

amiből a metszéspont számító algoritmus $\mathrm{E}\left[Q(n)\right]$ várható válaszidejére vonatkozóan következik az

$$\mathrm{E}\left[Q(n)\right] = O\left(1\right) \tag{11}$$

összefüggés. Az eredmény váratlan: *az algoritmus várható válaszideje nem növekszik a végtelenségig az objektumok számával!* A következő eredmények lényegében e megállapítás finomításai lesznek az egyes konkrét metszéspont kereső módszerekre vonatkozóan.

**2.3.** A reguláris térhálóra alapozott metszéspont számító algoritmus válaszideje, tekintve, hogy az a térháló módszerek osztályába tartozik, az alábbi összefüggéssel jellemezhető:[2]

$$Q = T_0 + N_{\mathrm{M}}T_{\mathrm{M}} + N_{\mathrm{L}}T_{\mathrm{L}}, \tag{12}$$

ahol $T_0$ az első cella megtalálásához szükséges idő, $T_{\mathrm{M}}$ a sugár és egy objektum metszésének vizsgálatához szükséges idő, $N_{\mathrm{M}}$ a vizsgálatok száma, $T_{\mathrm{L}}$ a következő cellára lépéshez szükséges idő, $N_{\mathrm{L}}$ pedig a cella-lépések száma. A $T_0, T_{\mathrm{M}}, T_{\mathrm{L}}$ idők állandónak tekinthetők, azaz nem függenek az objektumok számától, így tehát az $N_{\mathrm{M}}$ és $N_{\mathrm{L}}$ számokat kell megvizsgálnunk.

Ha a reguláris térháló celláinak élhosszúsága $a$, akkor a szükséges metszéspont vizsgálatok száma tetszőleges sugár esetén:

$$\mathrm{E}\left[N_{\mathrm{M}}\right] \in \left[a\,(\sqrt{3}\pi)^{-1/2}, a\sqrt{3} + r\right]^2 \Big/ r^2 + \left[0, 2\,\rho\, v^{\square}_{a,r}\right], \tag{13}$$

ahol $v^{\square}_{a,r}$ egy $a$ oldalú kocka $r$ sugarú offszetjének térfogata (azaz azon pontok halmazának térfogata, amelyek a kockához az $r$ távolságnál közelebb vannak; e térfogat értéke $4r^3\pi/3 + 3ar^2\pi + 6a^2r + a^3$). A sugár mentén egyik celláról a következő cellára megtett lépések száma tetszőleges sugár esetén:

$$\mathrm{E}\left[N_{\mathrm{L}}\right] \in \left[1, \sqrt{3}\right] \frac{1}{\rho a r^2\pi} + [-3, 3]\,. \tag{14}$$

E vizsgálatok különböző sugarú gömbökre viszonylag könnyen kiterjeszthetők. Például, ha az objektumtér $\alpha_1$ arányban $R_1$ sugarú, $\alpha_2$ arányban $R_2$ sugarú, ..., $\alpha_n$ arányban $R_n$ sugarú, továbbra is $\rho$ intenzitású Poisson–gömböket tartalmaz ($\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$), akkor a szükséges metszéspont vizsgálatok száma tetszőleges sugár esetén:

$$\mathrm{E}\left[N_{\mathrm{M}}\right] \in \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left\{ \frac{\alpha_1(s_1 + r_1)^2 + \ldots + \alpha_n(s_n + r_n)^2}{\alpha_1 r_1^2 + \ldots + \alpha_n r_n^2} + c \right\} f_{R_1}(r_1)\cdots f_{R_n}(r_n)\, dr_1 \cdots dr_n, \tag{15}$$

[2] A térháló módszerekkel az objektum koherenciát közvetlenül aknázzuk ki oly módon, hogy az objektumokat tartalmazó szînteret diszjunkt cellákra osztjuk fel, melyek mindegyikéhez egy-egy listát rendelünk. Egy ilyen lista azon objektumokra tartalmaz referenciát, amelyek a cellával érintkeznek. Metszéspont kereséskor végig kell lépkedni mindazokon a cellákon, amelyeken a sugár áthalad, megvizsgálva közben az aktuális cella listáján lévő objektumokat. Reguláris háló esetén a cellák egybevágó kockák.

ahol

$$s_i = \left[a\,(\sqrt{3}\pi)^{-1/2} - r_i, a\sqrt{3}\right] \quad \text{és} \quad c = \left[0, \rho(\alpha_1 v^{\square}_{a,r_1} + \ldots + \alpha_n v^{\square}_{a,r_n})\right], \tag{16}$$

valamint $f_{R_i}(r_i)$ az $R_i$ sugár valószínűség sűrűség függvénye.

**2.4.** Octree esetén a metszéspont kereső algoritmus válaszidejére, tekintve, hogy az szintén a térháló módszerek közé tartozik, a reguláris hálónál látott (12) összefüggés érvényes.[3] Ha a strukúra oszthatatlan celláinak élhosszúsága $a$, akkor a szükséges metszéspont vizsgálatok száma tetszőleges sugár esetén a (13) összefüggéssel jellemezhető. A cella-lépések várható száma pedig:

$$\mathrm{E}\,[N_{\mathrm{L}}] = \mathrm{E}\,[N_{\mathrm{L}}^{\mathrm{reg}}] - \int_0^{\infty} \{\mathrm{E}\,[M_{\mathrm{LND}}\,|\,t^* = \tau] - 2\cdot \mathrm{E}\,[M_{\mathrm{L1}}\,|\,t^* = \tau]\, f_{t^*}(\tau)\}\, d\tau, \tag{17}$$

ahol $\mathrm{E}\,[N_{\mathrm{L}}^{\mathrm{reg}}]$ a lépések várható száma reguláris háló alkalmazása esetén, értékét a (14) összefüggés adja, valamint

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\,[M_{\mathrm{LND}}\,|\,t^* = \tau] \in \sum_{i=1}^{\max\{0,\lfloor \log_2(\tau/a)\rfloor\}} \Bigg\{ \left(\left[1,\sqrt{3}\right] \frac{1}{2^i a}\tau + [-3,3]\right) \\ \cdot \; e^{-\rho(v^{\square}_{2^i a,r} - \left[0, 2^i a\sqrt{3}\, r^2\pi - 4r^3\pi/3\right])} \Bigg\} + [0,3]\,,\end{aligned} \tag{18}$$

és

$$\mathrm{E}\,[N_{\mathrm{L1}}\,|\,t^* = \tau] \in \left[0, 3\,\max\left\{0, \log_2\frac{\tau}{a}\right\} + \frac{6r}{a} + 9\right]. \tag{19}$$

Az első cella megtalálásához szükséges idő, $T_0$, és egy cella-lépés ideje, $T_{\mathrm{L}}$, implementációtól függően $O(1)$–$O(\log n)$.

**2.5.** Sugárkoherencia módszer esetén a válaszidő az alábbi összefüggéssel jellemezhető:[4]

$$Q = T_0 + N_{\mathrm{M}} T_{\mathrm{M}}, \tag{20}$$

ahol $T_0$ az objektum index és az irány index meghatározásához szükséges idő (ezek alapján található meg az objektum lista), $T_{\mathrm{M}}$ a sugár és egy objektum metszésének vizsgálatához szükséges idő, $N_{\mathrm{M}}$ pedig a vizsgálatok száma. A $T_0$ idő állandónak tekinthető.

Ha az iránykocka felszínének felbontása minden irányban $N$, mégpedig úgy, hogy $N \geq \sqrt{6}$ teljesül, akkor a szükséges metszéspont vizsgálatok száma tetszőleges sugár esetén:

$$\mathrm{E}\,[N_{\mathrm{M}}] \in 2\pi\,\rho \sum_{i=0}^{2} \frac{(s + r\sqrt{1+\sigma^2})^i \sigma^{2-i}}{i!(\rho\, r^2\pi)^{3-i}} + h, \tag{21}$$

[3] A mindenütt egyenletesen finom reguláris térháló adaptív változata az octree (octal tree), amely csak a fontos helyeken sűrű, máshol pedig ritkább. Az elméleti vizsgálatok szempontjából a reguláris hálóból származtatható bizonyos kockák összeolvasztásával.

[4] Az irány technikák családjába tartozó módszer. Ezek sajátja, hogy az összes lehetséges irányok terét, amelyet az egyszerűség kedvéért általában egy kocka (iránykocka) felülete képvisel, irányhalmazokra osztjuk, majd erre alapozva a sugarak (5-dimenziós) terét ekvivalencia osztályokra bontjuk, és egy-egy osztályhoz azon objektumok listáját rendeljük, amelyekhez létezik az osztályban metsző sugár. A sugárkoherencia módszer esetén egy ekvivalencia osztályba tartoznak azon sugarak, amelyek ugyanazon objektumról erednek, és irányuk ugyanabba az irányhalmazba esik.

ahol

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{N}\left[1/3, \sqrt{6}\right], \\ s &= r\left[1-\sqrt{6}/N, 1+\sqrt{6}/N\right], \\ h &= \left[0, 2(2+\sqrt{6}/N)^3 \rho r^3 \pi/3\right]. \end{aligned} \tag{22}$$

**2.6.** A sugár osztályozás módszere esetén a válaszidő általános képletének megadása nagyon nagy nehézségbe ütközik, hiszen abban az 5-dimenziós adaptív felosztás költsége is benne van "elkenve"[5] Csupán az alábbi összefüggés felírására szorítkozhatunk:

$$Q = T_0 + T_0' + N_{\mathrm{M}} T_{\mathrm{M}}, \tag{23}$$

ahol $T_0$ a sugarat mint 5-dimenziós pontot tartalmazó hiperkocka megkeresésének ideje, feltéve, hogy az már "készen van", $T_0'$ az az idő, amelyet a "nem kész" hiperkockák készítésével kell eltölteni, $T_{\mathrm{M}}$ a sugár és egy objektum metszésének vizsgálatához szükséges idő, $N_{\mathrm{M}}$ pedig a vizsgálatok száma. Bár a $T_0$ és $T_0'$ idők nem tekinthetők állandóknak, csak az $N_{\mathrm{M}}$ szám vizsgálatára szorítkozunk.

Ha a sugártér adaptív partícionálása során a minimális hiperkockák oldalhosszúsága a sugár kezdőpontjának koordinátái mentén (azaz az $\mathbf{E}^3$ tárgytérben) $a$, a sugár irányának koordinátái mentén (azaz az iránykocka felszínén) pedig $\nu$, mégpedig úgy, hogy $\nu \le 1/\sqrt{6}$ teljesül, akkor a szükséges metszéspont vizsgálatok száma tetszőleges sugár esetén a (21) összefüggéssel jellemezhető, a

$$\begin{aligned} \sigma &= \nu\left[1/3, \sqrt{6}\right], \\ s &= \frac{a}{2}\left[1-\nu\sqrt{6}, \sqrt{3}+3\nu\sqrt{2}\right], \\ h &= \left[0, 2(a(\sqrt{3}+3\nu\sqrt{2})/2 + r)^3 \rho r^3 \pi/3\right] \end{aligned} \tag{24}$$

helyettesítésekkel.

# 3. tézis

*Kidolgoztam egy új gyorsítási algoritmust, amely térbeli Voronoi–diagramon alapul, és ennek vizsgálatát is elvégeztem.*

**3.1.** A cella-lépések száma jelentősen csökkenthető az objektumtér olyan partíciójának alkalmazásával, ahol minden cellában csak egyetlen objektum van. Ez elérhető Voronoi–diagramok alkalmazásával.[6] Mivel a színtér nem véges számú izolált pontból áll, így vagy a struktúrát magát kell általánosítani úgy, hogy a részecskék ne csak pontok, hanem ponthalmazok is lehessenek (pl. hatvány diagrammá), vagy pedig közelítéssel kell

[5] Ennek a szintén az iránytechnikák közé tartozó módszernek az alapja az 5-dimenziós sugártér adaptív felosztása, amely felosztás csak ott válik finommá, ahol arra a sugárkövetés során ténylegesen szükség van. Az előfeldolgozás nem válik el élesen a sugárkövetési fázistól, hanem a felosztás "menet közben, a használattól" finomodik.

[6] Ha adottak a $p_1, \ldots, p_n \in \mathbf{E}^d$ *részecskék* (a tér többi pontjától való megkülönböztetésük érdekében nevezzük őket így), akkor az ezen részecskék által indukált *Voronoi–diagram* a térnek egy olyan felosztása régiókra, ahol az $i$-edik régióba kerülnek a tér azon pontjai, amelyek közelebb vagy ugyanolyan távolságra

élni. Számítástechnikailag a legolcsóbb megoldásnak tűnik az, hogy Voronoi–diagramot használunk, mégpedig a $p_1, \ldots, p_n$ halmazt úgy megválasztva, hogy az az objektumoknak bizonyos *reprezentatív pontjait* tartalmazza, például súlypontjukat. Ezzel a színtérnek egy olyan partícióját kapjuk, amelyben minden egyes cella nagy valószínűséggel pontosan egy, de legalábbis csak egy-két objektummal érintkezik. Így tehát egy *térháló módszerhez* jutottunk.

Egy-egy Voronoi–cellát az alábbi adatstruktúra reprezentálhat:

$$\langle x, y, z, L, P \rangle, \tag{26}$$

ahol $x, y, z$ a cellát indukáló részecske koordinátái, az $L$ lista azon objektumokra tartalmaz referenciákat, amelyek metszik a cellát, $P$ pedig azon részecskék listája, amelyek a részecskével *szomszédosak* a Voronoi–diagramban (azaz celláiknak közös lapja van).

A sugár által metszett cellák bejárása ezen adatstruktúra birtokában viszonylag egyszerű. Legyenek az $s$ sugár pontjai az

$$s(t) = s_0 + t\,\omega \quad (t \geq 0), \tag{27}$$

paraméteres alakban adottak, ahol $s_0 \in \mathbf{E}^3$ a sugár kezdőpontja, $\omega \in \mathbf{E}^3$ pedig a sugár irányvektora, és legyen $t_i$ az a paraméter érték, amelynél $s$ belép az $i$-ik bejárt cellába! Ha $q_i$ jelöli az $i$-ik cella indukáló részecskéjét, akkor az a paraméter érték, amelynél $s$ kilép az $i$-ik cellából, azaz belép az $(i+1)$-ik cellába:

$$t_{i+1} = \min_{\substack{q \in P(q_i) \\ t_q > t_i}} t_q, \quad \text{ahol} \quad t_q = \frac{(\frac{1}{2}(q_i + q) - s_0) \cdot (q - q_i)}{\omega \cdot (q - q_i)}, \tag{28}$$

és az $(i+1)$-ik cella ehhez a minimumhoz tartozó cella lesz („$\cdot$" itt skaláris szorzatot jelöl).

**3.2.** A Voronoi–diagramra alapozott metszéspont számító algoritmus válaszideje, tekintve, hogy az a térháló módszerek osztályába tartozik, az alábbi összefüggéssel jellemezhető:

$$Q = T_0 + N_{\mathrm{M}} T_{\mathrm{M}} + N_{\mathrm{L}} T_{\mathrm{L}}, \tag{29}$$

ahol $T_0$ az első Voronoi–cella megtalálásához szükséges idő, $T_{\mathrm{L}}$ a következő cellára lépéshez szükséges idő, $N_{\mathrm{L}}$ a lépések száma, $T_{\mathrm{M}}$ a sugár és egy objektum metszésének vizsgálatához szükséges idő, $N_{\mathrm{M}}$ pedig a vizsgálatok száma. A $T_0, T_{\mathrm{M}}$ idők állandónak tekinthetők, azaz nem függenek az objektumok számától (ha az ún. követési koherenciát kihasználjuk). A $T_{\mathrm{L}}$ idő függ az aktuális Voronoi–cella lapjainak számától:

$$T_{\mathrm{L}} = N_{\mathrm{V}} T_{\mathrm{V}}, \tag{30}$$

ahol $N_{\mathrm{V}}$ az aktuális Voronoi–cella lapjainak száma, $T_{\mathrm{V}}$ pedig valamely Voronoi–lap és a sugár közötti metszéspont kiszámításához (a (28) összefüggés jobboldalának kiértékeléséhez) szükséges idő, amely természetesen állandónak tekinthető. Így tehát az $N_{\mathrm{M}}, N_{\mathrm{L}}$ és $N_{\mathrm{V}}$ számokat kell megvizsgálni.

---

vannak az $i$-edik részecskéhez, mint bármely egyéb részecskéhez. E régiók alkotják a *Voronoi–cellák*at:

$$\mathcal{V}(p_i) = \left\{ p \in \mathbf{E}^d \mid \forall j \neq i : |p - p_i| \leq |p - p_j| \right\}. \tag{25}$$

A cella-lépések várható száma tetszőleges sugár esetén:

$$\mathrm{E}\left[N_{\mathrm{L}}\right] \in \left\{\frac{\left[\Gamma\left(4/3\right), \Gamma\left(1/3\right)\Gamma\left(2/3\right)\right]}{\left[\gamma\left(4/3, 4\rho\, r^3\pi/3\right), \Gamma\left(1/3\right)\gamma\left(2/3, 4\rho\, r^3\pi/3\right)\right]} - 1\right\}\left[e^{-10\rho\, r^3\pi/3}, 1\right], \tag{31}$$

míg a metszéspont vizsgálatok várható száma tetszőleges sugár esetén:

$$\mathrm{E}\left[N_{\mathrm{M}}\right] \in \mathrm{E}\left[N_{\mathrm{L}}\right] + \left[0, 32\rho\, r^3\pi/3\right] + 1, \tag{32}$$

a Voronoi–cellák lapjainak várható száma pedig a (35) összefüggésből számítható.

# 4. tézis

*Az egyik gyorsítási módszer alapját képező Voronoi–diagram átlagos bonyolultságának vizsgálatával demonstráltam annak lehetőségét, hogy az átlagos előfelgolgozási időre és tárigényre vonatkozó vizsgálatok a javasolt modellre hogyan vihetők véghez.*

**4.1.** Az átlagos előfelgolgozási időre és tárigényre vonatkozó vizsgálatok alapját a következő általános eredmények képezik ($d$ a dimenziószám). A $\rho$ intenzitású Poisson–pontfolyamat által indukált Voronoi–cellák csúcspontjai közül azoknak a száma, amelyek valamely alkotó részecskéje az $X$ (Lebesgue-mérhető) halmazba esik, az alábbi összefüggéssel jellemezhető:[7]

$$N_{\mathrm{V}}\{X\} \;\sim\; \rho|X|(d-1)!d^{d-1}\frac{1}{d+1}o_d\,\mathrm{E}_d\left[|\triangle|\right], \tag{35}$$

ahol $\mathrm{E}_d\left[|\triangle|\right]$ az egységsugarú $d$-gömb felületén független egyenletes eloszlással elszórt $d+1$ pont által kifeszített szimplex várható térfogata (speciálisan $\mathrm{E}_2\left[|\triangle|\right] = 3/2\pi$, és $\mathrm{E}_3\left[|\triangle|\right] = 4\pi/105$), $o_d$ pedig az egységsugarú $d$-gömb felülete. A másik eredmény szerint, a $\rho$ intenzitású Poisson–pontfolyamat által indukált azon Voronoi–lapok száma, amelyek alkotó részecskéi közül valamelyik az $X$ (Lebesgue-mérhető) halmazba esik, valamint metszik az $X$ tartományban egyenletes eloszlású kezdőponttal, de fix irányítással rendelkező, $L$ hosszúságú egyenesszakaszt, az alábbi összefüggéssel jellemezhető:

$$\mathrm{E}\left[N\{L,X\}\right] \;\sim\; L\,\rho^{1/d}\,\frac{d}{2}\,\kappa_d^{1/d}\,\Gamma\left(2-1/d\right)\,\mathrm{E}_d\left[|{-}|\right], \tag{36}$$

ahol $\mathrm{E}_d\left[|{-}|\right]$ az egységsugarú $d$-gömb felületén független egyenletes eloszlással elszórt két pontot összekötő szakasz vetületének várható hossza a gömb egy tetszőleges, de előre rögzített átmérőjén (speciálisan $\mathrm{E}_2\left[|{-}|\right] = 8/\pi^2$, és $\mathrm{E}_3\left[|{-}|\right] = 2/3$), $\kappa_d$ pedig az egységsugarú $d$-gömb térfogata.

[7] A $\sim$ jelölés a Miles-féle majdnem biztos aszimptotikus egyenlőséget jelenti. Ha például $X$ tetszőleges (Lebesgue-mérhető) halmaz, $N\{X\}$ az $X$ belsejébe eső Poisson–pontok száma, és $rX$-szel jelöljük az $r$-szeresére nagyított $X$-et, akkor:

$$\Pr\left\{\lim_{r\to\infty}\frac{N\{rX\}}{|rX|} = \rho\right\} = 1, \tag{33}$$

amit a tömörebb

$$N\{X\} \;\sim\; \rho|X| \tag{34}$$

jelöléssel fejezünk ki (vagy másképpen: $N\{X\} \to \rho|X|$ majdnem biztosan, ahogy $|X| \to \infty$).

**4.2.** Ha a diagramot a (26) összefüggésben adott adatstruktúrával reprezentáljuk, akkor tárigénye, tekintve, hogy átmenetileg a Voronoi–csúcsokat is tárolni kell ((37) struktúra):[8]

$$M = N_{\mathrm{V}} M_{\mathrm{V}} + n M_{\mathrm{C}} + \sum_{i=1}^{n} m_i M_{\mathrm{C}} + N_{\mathrm{O}} M_{\mathrm{O}}, \tag{38}$$

ahol $M_{\mathrm{V}}$ egy Voronoi–csúcs tárigénye, $N_{\mathrm{V}}$ a Voronoi–csúcsok száma, $M_{\mathrm{C}}$ egy Voronoi–cella (lényegében egy részecske) tárigénye a kapcsolódó két listát ($L$, $P$) üresnek véve, $n$ a cellák (lényegében az objektumok) száma, $m_i$ az $i$-edik cella szomszédainak száma, $M_{\mathrm{O}}$ egy objektum referencia mérete, $N_{\mathrm{O}}$ pedig az objektum referenciák összes száma.

A Voronoi–csúcsok $N_{\mathrm{V}}$ száma a (35) eredmény értelmében $\sim O(n)$, hiszen $n \sim \rho|X|$, egy cella szomszédainak $\mathrm{E}[m_i]$ várható száma ugyancsak ennek következtében konstans, $\mathrm{E}[N_{\mathrm{O}}]$ pedig $n$-szer valamely gömböt metsző gömbök várható száma, szintén konstans, így az átlagos tárigény $\mathrm{E}[M(n)] \sim O(n)$.

**4.3.** Az előfeldolgozási időre a következő összefüggést írhatjuk fel (az egyszerűség kedvéért csak a Voronoi–diagram felépítésének idejét mutatva és nem belevéve az $L$ és $P$ listák felépítésének idejét):

$$P = \sum_{i=1}^{n} \left\{ N_{\mathrm{L},i} T_{\mathrm{L}} + N_{\mathrm{Z},i} T_{\mathrm{Z}} + N_{\mathrm{U},i} T_{\mathrm{U}} + (d+1) N_{\mathrm{U},i} T_{\mathrm{K}} + \tbinom{N_{\mathrm{U},i}}{2} (d+1)^4 T'_{\mathrm{K}} \right\}, \tag{39}$$

ahol $N_{\mathrm{L},i}$ az $i$-edik részecske lokalizálásához szükséges cella-lépések száma,[9] $T_{\mathrm{L}}$ egy lépés ideje, $N_{\mathrm{Z},i}$ az $i$-edik részecske által "megzavart" Voronoi–csúcsok száma, $T_{\mathrm{Z}}$ egy csúcs vizsgálatának ideje, $N_{\mathrm{U},i}$ az $i$-edik részecske beszúrásakor létrehozott új Voronoi–csúcsok száma, $T_{\mathrm{U}}$ egy új csúcs létrehozásának ideje, $T_{\mathrm{K}}$ egy szomszédos Voronoi–csúcs regisztrálásának ideje (a reá mutató referencia beírása a kölcsönös összekötések megvalósításakor), $T'_{\mathrm{K}}$ pedig két referencia összehasonlítási ideje.

A (36) összefüggés értelmében $\mathrm{E}[N_{\mathrm{L},i}] \sim O\left(n^{1/d}\right)$. Mivel az $\mathrm{E}[N_{\mathrm{Z},i}]$ és $\mathrm{E}[N_{\mathrm{U},i}]$ várható értékek állandók, valamint az $L$ és $P$ listák felépítésének várható ideje az objektumok számával egyenesen arányos, az átlagos előfeldolgozási időre az $\mathrm{E}[P(n)] \sim O\left(n^{1+1/d}\right)$ összefüggés adódik.

---

[8] A felhasznált Bowyer-féle algoritmusban a diagramot a Voronoi–cellák csúcsainak gráfjával reprezentáljuk. Egy Voronoi–csúcsot az alábbi struktúra ír le:

$$\langle p_0, \ldots, p_d, v_0, \ldots, v_d \rangle, \tag{37}$$

ahol $p_0, \ldots, p_d$ az alkotó részecskékre mutató referenciák, $v_0, \ldots, v_d$ pedig a szomszédos Voronoi–csúcsokra mutató referenciák (a csúcsból kiinduló Voronoi–élek mentén). Erre alapozva Bowyer algoritmusa *inkrementális konstrukciót* használ, azaz a részecskéket egyenként szúrja be a korábban beszúrt részecskék által már meghatározott félkész diagramba.

[9] a Bowyer-féle algoritmusban a diagram súlypontából a cellákon lépkedve keressük meg az új részecske beszúrása által okozott "zavar" helyét.

# IV. Publikációk


[1] Márton Gábor. Számítógépes grafika: a 3-dimenziós megjelenítés néhány problémája. *TDK Konferencia.* Budapesti Műszaki Egyetem, 1988. november.

[2] Márton Gábor. A sugárkövetéses módszer a háromdimenziós raszter grafikában. *Végzős Konferencia.* Budapesti Műszaki Egyetem, 1989. április.

[3] Márton Gábor. Felület modellező és megjelenítő program. Diplomaterv, Budapesti Műszaki Egyetem, 1989. június.

[4] Gábor Márton. Surface triangulation using voronoi diagrams. *Seminar on Intelligent Measurement Systems, Budapest*, Budapest, July 2–4 1990. Technical University of Budapest.

[5] T. Horváth, P. Márton, G. Risztics, and L. Szirmay-Kalos. Ray coherence between sphere and a convex polyhedron. *Computer Graphics Forum*, 2(2):163–172, 1992.

[6] G. Márton, P. Risztics, and L. Szirmay-Kalos. Quick ray-tracing exploiting ray coherence theorems. *7th Symp. on Microcomputer Appl.*, pages 387–397, Budapest, 1992.

[7] B. Dobos, G. Márton, P. Risztics, and L. Szirmay-Kalos. Számítógépes módszerek tájrendezéshez. *Térinformatika a felsőoktatásban szimpozium*, Budapest, 1992. október 7–8. KÉE Tájrendezési Tanszék.

[8] L. Szirmay-Kalos and G. Márton. On hardware implementation of scan-conversion algorithms. *8th Symp. on Microcomputer Appl.*, pages 505–514, Budapest, 1994.

[9] Gábor Márton. Acceleration of ray tracing via voronoi-diagrams. Alan W. Paeth, editor, *Graphics Gems V*, pages 268–284. Academic Press, Boston, 1995.

[10] Gábor Márton and László Szirmay-Kalos. On average-case complexity of ray tracing algorithms. *Winter School of Computer Graphics '95*, pages 187–196, Plzen, Czech Republic, 14–18 February 1995. University of West Bohemia.

[11] László Szirmay-Kalos and Gábor Márton. On convergence and complexity of radiosity algorithms. *Winter School of Computer Graphics '95*, pages 313–322, Plzen, Czech Republic, 14–18 February 1995. University of West Bohemia.

[12] László Szirmay-Kalos, Gábor Márton, Balázs Dobos, Tamás Horváth, Péter Risztics, and Endre Kovács. *Theory of Three Dimensional Computer Graphics.* Akadémiai Könyvkiadó, Budapest, 1995. (edited by László Szirmay-Kalos).